



Anais da XII Semana de Matemática

21 à 24 de novembro de 2023
Unidade Acadêmica de Matemática – UFCG

www.mat.ufcg.edu.br/semanamat2023

SUMÁRIO

1	Apresentação	4
2	Programação	5
3	Programação (Workshop da Pós-Graduação)	7
4	Mesas Redondas	10
5	Exposição de Artes Visuais: “Por todas as Matemáticas”	12
6	Plenária de Abertura	14
7	Palestras	16
8	Minicursos	22
8.1	Uma conversa sobre as “Variedades” de Nehari e suas aplicações	23
8.2	Nem todo DFU É um DIP, mas ...	24
8.3	Redação Matemática	25
8.4	O Jogo Poker e o Ensino de Probabilidade	26
8.5	Introdução ao Python	27
8.6	Introdução a Fractais	28
9	Oficinas	29
9.1	Conectando Ideias: Explorando os Conectivos Lógicos com Foco no Ensino Médio	30
9.2	Explorando Conceitos Visuais na Matemática com o uso da Expressão Gráfica	31
9.3	Mágica ou Matemática? Façam suas Apostas! Utilizando o Encanto da Mágica como Porta de Entrada para o Mundo da Matemática	32
9.4	Origamática: Observando a Matemática através do Origami	33

10 Workshop da Pós-Graduação	34
Sessão temática de álgebra	35
10.0.1 Classification and polynomial identities of two-dimensional Jordan algebras	36
10.0.2 Número de redução, fecho de Ratliff-Rush, e um problema aberto	37
10.0.3 Cocaracteres Y -próprios graduados de $UT_m(F)$	38
10.0.4 Identidades de pares e crescimento das codimensões	39
10.0.5 Irreducible Graded Bimodules over Algebras and a Pierce Decomposition of the Jacobson Radical	40
Sessão temática de EDP Evolução	41
10.1.1 Controlabilidade exata na fronteira para as vibrações longitudinais de uma barra (Em homenagem ao prof. Luiz Adauto Medeiros)	42
10.1.2 Combinação de técnicas analíticas e computacionais para um sistema de três de leis de conservação	43
10.1.3 Problemas de Cauchy de ordem superior e potências fracionárias	44
10.1.4 Dynamics of thermoelastic plate system with terms concentrated in the boundary	45
10.1.5 Estratégias tipo switching para controlabilidade de sistemas parabólicos	46
Sessão temática de EDP Elíptica	47
10.2.1 Existência de soluções para uma equação Choquard fracionária com crescimento exponencial crítico	48
10.2.2 Quasilinear elliptic problems with general concave-convex nonlinearities	49
10.2.3 Degenerate elliptic equations in \mathbb{R}^2 with critical growth	50
10.2.4 Elliptic systems involving sublinear and superlinear nonlinearities	51
10.2.5 On nonlinear perturbations of a integrodifferential equation with critical exponential growth	52
Sessão temática de Geometria	53
10.3.1 Rigidity and nonexistence of complete hypersurfaces via Liouville type results and other maximum principles, with applications to entire graphs	54
10.3.2 Serrin type problems in Riemannian manifolds	55
10.3.3 Trapped and Totally Trapped submanifolds in spacetimes models	56
10.3.4 Revisiting linear Weingarten hypersurfaces immersed into a locally symmetric Riemannian manifold	57
10.3.5 Stochastically complete, parabolic, and λ -Liouville spacelike submanifolds with parallel mean curvature vector	58
11 Comunicações Orais	59
11.1 O Metodo Dos Gradientes Conjugados	60
11.2 Resolução Numérica Da EDO Que Modela O Decaimento Radioativo Do Carbono-14, Usando O Método De-Adams-Bashforth-Moulton	66

11.3 O Teorema Dos Zeros De Hilbert	72
11.4 Aplicando Equações Diferenciais: Lei Do Resfriamento De Newton	77
11.5 Fórmulas De Frenet Para Curvas Espaciais	83
11.6 Juros Compostos Como Aplicação De Equações Diferenciais	89
11.7 Aplicando Diagonalização De Matrizes A Classificação De Cônicas	95
11.8 Um Estudo Sobre A Integral Gaussiana	101
11.9 O Teorema De Pitágoras No Disco De Poincaré	107
11.10 Os Paradoxos E Suas Contribuições No Avanço Da Matemática	112
11.11 Um Estudo Das Ações Parciais De Grupos E A Relação Com Semigrupos Inversos	118
11.12 Uma Introdução À Dinâmica Do Tráfego	123
11.13 Teorema Do Ponto Fixo De Banach E Algumas Aplicações	129
11.14 Álgebras De Azumaya	135
11.15 Aplicações Das Equações Diferenciais A Modelos De Crescimento Populacional E Infectologia	141
11.16 Explorando Padrões De Mortalidade Em Campina Grande Comparando O Modelo Poisson Vs. Binomial Negativo	146
11.17 O Uso Do Jogo Disputa Algebrica Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental	150
11.18 Gamificação Na Matemática: Proposta De Modelagem No Ensino De Fração Com Minecraft	155
11.19 O Ensino De Progressão Aritmética Através De Jogos: Relato De Uma Investigação Do Pibid	160
11.20 Estudio del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores sobre argumentación, EGD y diseño de tareas	165

APRESENTAÇÃO

A **Semana de Matemática** é um encontro bianual de natureza científica promovido pela Unidade Acadêmica de Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da UFCG, seu objetivo é reunir alunos, professores, pesquisadores e demais interessados em Matemática. Para este fim, abrimos um leque de atividades como palestras, minicursos, oficinas, comunicações, propiciando um encontro com a pesquisa de ponta na área da Matemática, trabalhos de iniciação científica, discussões e reflexões sobre a Matemática no Brasil e no mundo. Historicamente, a Semana da Matemática homenageia professores por suas contribuições prestadas a UAMat e esta edição será em homenagem aos professores Daniel Cordeiro de Moraes e Vandik Estevam Barbosa.

A XII Semana de Matemática ocorreu no período de 21 a 24 de novembro de 2023.

Os organizadores da XII Semana de Matemática expressam sua gratidão a todos os convidados, autores e participantes que contribuíram para o sucesso de mais uma edição.

Comitê Organizador

Alânnio Barbosa Nobrega
Denilson da Silva Pereira
Severino Horácio da Silva
Jacqueline Félix de Brito
Rodrigo Cohen Mota Nemer
José Lindomberg Possiano Barreiro
Leomaques Francisco Silva Bernardo
Pammella Queiroz de Souza
Romildo Nascimento de Lima

Comitê Científico

Carolina Bhering de Araújo – IMPA
Claudianor Oliveira Alves – UFCG
Daniel Cordeiro de Moraes Filho – UFCG
Diogo Diniz Pereira da Silva e Silva – UFCG
Henrique Fernandes de Lima – UFCG
Hilário Alencar da Silva – UFAL
Jaqueline Godoy Mesquita – UNB
Liliane de Almeida Maia – UNB

PROGRAMAÇÃO

XII Semana da Matemática

Programação

	Terça-feira 21/11/2023	Quarta-feira 22/11/2023	Quinta-feira 23/11/2023	Sexta-feira 24/11/2023
08:00 - 08:30		Minicursos M1 (CAA 303) M2 (CAA 305)	Minicursos M1 (CAA 303) M2 (CAA 305)	Palestra Paolo Piccione - USP
08:30 - 09:10				
09:10 - 09:30				
09:30 - 10:20		Palestra Jaqueline Mesquita - UnB	Palestra Nancy Garcia - UNICAMP	Mesa Redonda Novo Ensino Médio 09:10 - 10:30
10:20 - 10:50		<i>Coffee Break Apresentação de Pôster</i>	<i>Coffee Break Apresentação de Pôster</i>	<i>Coffee Break Apresentação de Pôster</i> 10:30 - 11:00
10:50 - 12:20	Mesa Redonda Inclusão e Minorias	Mesa Redonda Pós-Graduação em Matemática	Palestra Viviane Santos - UFAL 11:00 - 11:40 Colação de Grau PROFMAT 11:40 - 12:40	
12:00 - 14:00	Intervalo			
14:00 - 15:00	Credenciamento (Auditório Rosa Tânia)	Workshop da Pós-Graduação Minicurso/Oficinas M3 (CAA 303), M4 (CAA 305), M5 (REENGE 07), M6 (CAA 306), OF1(CAA 401), OF2 (CAA 404)	Workshop da Pós-Graduação Minicurso/Oficinas M3 (CAA 303), M4 (CAA 305), M5 (REENGE 07), M6 (CAA 306), OF1(CAA 401), OF2 (CAA 404)	Premiação OCM
15:00 - 16:00	Abertura (Auditório Rosa Tânia)			
16:00 - 16:20	Homenagem Daniel Cordeiro	<i>Coffee Break</i>	<i>Coffee Break</i>	
16:20 - 16:40	Homenagem Vandik Barbosa			
16:40 - 17:20	Palestra Claudianor Alves - UFCG	Workshop da Pós-Graduação	Workshop da Pós-Graduação	
17:20 - 18:30	Apresentação Cultural Exposição de Artes Visuais: "Por Todas as Matemáticas" Coquetel	Intervalo		
18:30 - 19:15		Palestra Leo Yokoyama - UFRJ	Palestra Romildo Nascimento - UFCG	
19:15 - 19:30		<i>Coffee Break</i>	<i>Coffee Break</i>	
19:30 - 21:30		Oficinas OF3 (CX 04), OF4 (CX 04)	Oficinas OF3 (CX 04), OF4 (CX 04)	

PROGRAMAÇÃO (WORKSHOP DA PÓS-GRADUAÇÃO)

Sessão temática de Álgebra (22 de novembro de 2023)

Organizador da sessão: Diogo Diniz (UFCG)

Local: Auditório da UAF

Horário	Palestrante	
14:00 – 14:40	Viviane Ribeiro Tomaz da Silva - UFMG	Classification and polynomial identities of two-dimensional Jordan algebras
14:40 – 15:20	Douglas de Souza Queiroz (IFPB)	Número de redução, fecho de Ratliff-Rush, e um problema aberto
15:20 – 16:00	Thiago Felipe da Silva (UFCG)	Cocaracteres Y – Próprios Graduados de $UT_m(F)$
16:00 – 16:30	Coffee Break	
16:30 – 17:10	David Levi da Silva Macêdo – UFERSA	Identidades de pares e crescimento das codimensões
17:10 – 17:50	Antonio de Franca - UFCG	Irreducible Graded Bimodules over Algebras and a Pierce Decomposition of the Jacobson Radical

Sessão temática de EDP Evolução (22 de novembro de 2023)

Organizador da sessão: Severino Horácio (UFCG)

Local: Auditório da UAMAT

Horário	Palestrante	Título da Palestra
14:00 – 14:40	Aldo Trajano Lourêdo – (UEPB)	Controlabilidade exata na fronteira para as vibrações longitudinais de uma barra.
14:40 – 15:20	Aparecido Jesuíno de Souza (UEPB)	Combinação de técnicas analíticas e computacionais para um sistema de três de leis de conservação
15:20 – 16:00	Flank D. M. Bezerra (UEPB)	Problemas de Cauchy de ordem superior e potências fracionárias
16:00 – 16:30	Coffee Break	Coffee Break
16:30 – 17:10	Cláudio Odair Pereira da Silva (UEPB)	Dynamics of thermoelastic plate system with terms concentrated in the boundary
17:10 – 17:50	Felipe chaves (UEPB)	Estratégias tipo switching para controlabilidade de sistemas parabólicos

Sessão temática de EDP Elíptica (23 de novembro de 2023)

Organizador da sessão: Alânnio Nóbrega

Auditório da UAMAT

Horário	Palestrante	
14:00 – 14:40	Rodrigo Clemente (UFRPE)	Existência de soluções para uma equação Choquard fracionária com crescimento exponencial crítico.
14:40 – 15:20	Edcarlos Domingos da Silva (UFG)	Quasilinear elliptic problems with general concave-convex nonlinearities
15:20 – 16:00	Angelo Roncalli Furtado de Holanda (UFCG)	Degenerate elliptic equations in R^2 with critical growth
16:00 – 16:30	Coffee Break	
16:30 – 17:10	Diego Ferraz (UFRN)	Elliptic systems involving sublinear and superlinear nonlinearities
17:10 – 17:50	Yane Lisley Araújo (UFRPE)	On nonlinear perturbations of a periodic integrodifferential equation with critical exponential growth

Sessão temática de Geometria (23 de novembro de 2023)

Organizador da sessão: Marco Lázaro

Auditório da UAF

Horário	Palestrante	
14:00 – 14:40	Railane Antonia(UFPB)	Rigidity and nonexistence of complete hypersurfaces via Liouville type results and other maximum principles, with applications to entire graphs
14:40 – 15:20	Marcio Silva Santos (UFPB)	Serrin type problems in Riemannian manifolds
15:20 – 16:00	Eraldo Almeida Lima Junior (UFPB)	Trapped and Totally Trapped submanifolds in spacetimes models
16:00– 16:30	Coffee Break	
16:30 – 17:10	Lucas Siebra Rocha (UFCG)	Revisiting linear Weingarten hypersurfaces immersed into a locally symmetric Riemannian manifold
17:10 – 17:50	Weiller Felipe Chaves Barboza (UFPB)	Stochastically complete, parabolic, and spacelike submanifolds with parallel mean curvature vector

MESAS REDONDAS

- **Mesa Redonda: Pós-Graduação em Matemática**

- Romildo Nascimento de Lima - UFCG (Mediador)
- Claudianor Oliveira Alves - UFCG
- Hilário Alencar da Silva - UFAL
- Mário Eduardo Rangel - UFCG
- Nancy Lopes Garcia - UNICAMP

- **Mesa Redonda: Inclusão e minorias, um tema a ser abordado**

- Severino Horácio da Silva UFCG (Mediador)
- Maria Verônica do Nascimento Fernandes Santos - UFCG/NAI
- Flank David Moraes Bezerra - UFPB
- Leo Akio Yokoyama - UFRJ/Escola de Aplicação

- **Mesa Redonda: O novo Ensino Médio**

- Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG (Mediador)
- José Cláudio da Silva Teodista - ECIT Francisco Ernesto do Rêgo
- Renata Almeida leite - ECIT Francisco Ernesto do Rêgo
- Maria do Socorro de Souza Cordão - Gerente Regional de Educação da Secretaria de Estado da Educação e Ciência e Tecnologia, no município de Campina Grande.
- Carlos Augusto de Medeiros UFCG/Coordenador Administrativo - UAED

**EXPOSIÇÃO DE ARTES VISUAIS:
“POR TODAS AS MATEMÁTICAS”**

Descrição

A exposição visual intitulada “Por Todas as Matemáticas” objetiva expor durante todo o evento, desenhos realistas e hiper-realistas a grafite de importantes mulheres matemáticas que contribuíram para a ciência ao longo dos séculos. Esta exposição contará com relatos sobre as contribuições individuais de cada cientista exposta, será uma breve viagem a história da Matemática sob o viés feminino, no qual estará interligada a questões de gênero e raça. As matemáticas homenageadas em desenhos serão: 1. Hipátia de Alexandria (Primeira mulher documentada como tendo sido matemática. Como chefe da escola platônica em Alexandria); 2. Maria Gaetana Agnesi (Reconhecida como tendo escrito o primeiro livro que tratou, simultaneamente, do cálculo diferencial e integral); 3. Sophie Germain (contribuições fundamentais à teoria dos números e à teoria da elasticidade); 4. Mary Fairfax Greig Somerville (Estudou matemática e astronomia, tendo sido a primeira mulher nomeada para a Royal Astronomical Society); 5. Sofia Kovalevsky (teoria das equações diferenciais parciais, matemática analítica e mecânica.); 6. Emmy Noether (física teórica e álgebra abstrata); 7. Mileva Maric (matemática responsável pela fundamentação da teoria da relatividade); 8. Katherine Johnson; (Estrela além do tempo- matemática negra da Nasa); 9. Dorothy Vaughan (Estrela além do tempo- matemática negra da Nasa); 10. Mary Jackson (Estrela além do tempo- matemática negra da Nasa); 11. Hedy Lamarr (matemática e atriz criadora da tecnologia Wifi)); 12. Maria Laura Mouzinho Leite Lopes (Primeira mulher doutora em matemática no Brasil); 13. Maryam Mirzakhani (primeira mulher a obter a medalha Fields); 14. Eliza Maria (primeira mulher negra a obter título de doutorado no Brasil); 15. Alva Rosa Lana Vieira (primeira mulher indígena a obter licenciatura em matemática no Brasil); entre outras.

PLENÁRIA DE ABERTURA

A importância da coragem para atingir nossos sonhos

Claudianor Oliveira Alves (UFCG)
Unidade Acadêmica de Matemática
Universidade Federal de Campina Grande

Resumo

Nessa palestra, que na realidade é mais uma conversa, iremos refletir sobre a importância de ter coragem para conseguir atingir as nossas metas, reconhecendo nessa virtude algo indispensável na nossa vida sobretudo nos momentos de dificuldades, sejam eles nos estudos ou na vida pessoal.

PALESTRAS

Um convite às equações com retardos e as aplicações

Jaqueline Godoy Mesquita - UNICAMP

Resumo

Nesta palestra, irei apresentar as equações com retardos, apresentar uma abordagem histórica destas equações, problemas em aberto na área e em desenvolvimento, bem como possíveis aplicações destas equações.

A Estatística como ferramenta fundamental

Nancy Lopes Garcia - UNICAMP

Resumo

Nesta palestra vou apresentar alguns dos problemas aplicados que geraram dissertações e teses. Estes exemplos vão desde dados de espectroscopia do infravermelho a identificação de respondentes a placebo passando por identificação de ritmo em textos escritos, estudos de curvas de carga de distribuição de energia elétrica, análise de imagens de tecidos tingidos.

Fenômenos de bifurcação em problemas variacionais geométricos

Paolo Piccione - USP

Resumo

Apresentarei uma visão geral da Teoria Clássica de Bifurcação, seguida por uma exploração de suas aplicações contemporâneas na Geometria Riemanniana. Os tópicos abordados incluirão superfícies mínimas e de curvatura média constante, bem como o problema de Yamabe.



Carreira de professor: dúvidas, expectativas e felicidade! E o prazer da Matemática como professor. Passarei por dificuldades financeiras? Será que fiz a escolha certa? O que é Matemática? Para que serve a Matemática? Por que aprender Matemática? O que ensinar de Matemática?

Leo Akio Yokoyama - Escola de Aplicação UFRJ

Resumo

Essa palestra apresenta, além das reflexões sobre as perguntas acima, as possibilidades do magistério, e o importante papel do prazer ao se ensinar Matemática através de mágicas, jogos e brincadeiras. Serão apresentadas mágicas relacionadas a conceitos matemáticos. Os participantes são convidados a desvendar seus segredos e a partir daí discute-se a relevância e pertinência dessa aplicação em sala de aula. O mesmo será feito com os jogos, brincadeiras e desafios. A Mágica tem um efeito surpreendente e desperta a curiosidade dos espectadores de imediato. Os conceitos matemáticos são de nível fundamental, mas nem por isso os recursos são triviais. Não são! É importante tratar desse assunto em cursos de formação inicial e continuada. Os professores interessados por esse viés não o encontram nesses espaços, e têm que buscar por conta própria. Não é preciso de muitas tecnologias ou aparatos didáticos. O que é preciso, sim, é amor pela disciplina e pelo ensinar.

Aristarco e as distâncias astronômicas

Romildo Nascimento de Lima - UFCG

Resumo

No presente trabalho, trataremos de Aristarco (aprox. 310-230 a.C.), um excepcional astrônomo da antiguidade que nos deixou um livro muito interessante sobre o cálculo das distâncias do nosso planeta à Lua e ao Sol, bem como sobre o tamanho desses corpos celestes. Aristarco encontrou um modo simples e, ao mesmo tempo, bastante engenhoso para comparar as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua. Esse modo tão engenhoso será explicitado no trabalho, mostrando que com a Matemática Básica é possível tirar algumas conclusões muito importantes.

MINICURSOS

8.1 Uma conversa sobre as “Variedades” de Nehari e suas aplicações

Prof. Dr. João Rodrigues dos Santos Júnior – UFPA

Resumo

Neste minicurso pretendemos apresentar o conjunto de Nehari como um vínculo natural a ser considerado quando se pretende obter pontos críticos de um funcional I associado. Se I for de classe C^2 (caso regular), daremos condições suficientes sobre o espaço de Banach E e o funcional para que o conjunto de Nehari seja uma C^1 variedade de codimensão 1 e mostremos como este fato pode ser usado para obter pontos críticos de I . Se I for de classe C^1 (caso não-regular), mostraremos que sob certas condições é possível garantir a existência de um homeomorfismo entre o conjunto de Nehari e a esfera unitária (a qual é uma C^1 variedade se E satisfaz uma condição adequada), usaremos tal homeomorfismo para contornar a falta de uma estrutura diferenciável no conjunto de Nehari e mostremos como aplicar este caso a resolução de um problema elíptico. Finalmente, estudaremos o caso em que o funcional é indefinido na origem e veremos que os métodos anteriores não se aplicam.

Carga horária: 3 h

8.2 Nem todo DFU É um DIP, mas ...

Prof. Dr. Antônio Pereira Brandão Júnior – UFCG

Resumo

Na teoria de anéis, um domínio de ideais principais (DIP) é um domínio de integridade no qual todo ideal é principal, e um domínio de fatoração única (DFU) é um domínio de integridade no qual vale uma propriedade análoga ao Teorema Fundamental da Aritmética. É um fato conhecido que todo DIP é um DFU, mas nem todo DFU é um DIP. Por exemplo, o anel dos polinômios em uma indeterminada com coeficientes inteiros é um DFU, mas não é um DIP. Neste minicurso, mostraremos que todo DFU com apenas uma quantidade finita de elementos irredutíveis, a menos de associados, deve ser um DIP.

Carga horária: 3 h

8.3 Redação Matemática

Bolsistas do PET-Matemática/UFCG sob à supervisão do Tutor Prof. Leomaques Francisco Silva Bernardo.

Resumo

Nesse minicurso abordaremos a temática: redação matemática, onde a princípio introduziremos os conceitos básicos, tais como símbolos matemáticos e escrita corrente até os conceitos mais avançados, como, por exemplo, negação de sentenças matemáticas, contra positiva, recíproca de uma sentença e técnicas de demonstrações. O principal objetivo da presente atividade é que os participantes possam aperfeiçoar sua escrita matemática, relembrando conceitos básicos vistos nos cursos de graduação em matemática Licenciatura e/ou Bacharelado. Além disso, saber utilizar com clareza as técnicas e argumentos clássicos necessários a uma demonstração matemática. Para o desenvolvimento do minicurso contaremos com exposições realizadas por integrantes do Grupo, tendo como principal material didático auxiliador os livros: “Um convite a Matemática” e “Manual de redação Matemática” do Prof. Dr. Daniel Cordeiro – UFCG.

Carga horária: 4 h

8.4 O Jogo Poker e o Ensino de Probabilidade

Bolsistas do PET-Matemática/UFCG sob à supervisão do Tutor Prof. Leomaques Francisco Silva Bernardo.

Resumo

Nesse minicurso apresentaremos a probabilidade envolvida nas partidas do jogo Poker, bem como suas regras e uma possibilidade de intervenção metodológica para o ensino dos conceitos básicos de probabilidade. O principal objetivo da presente atividade é que os participantes possam aperfeiçoar a base conceitual da probabilidade a partir do meio lúdico do jogo apresentado, e assim, aumentar suas possibilidades de abordagem deste conteúdo em sua futura carreira docente. Para o desenvolvimento do minicurso contaremos com exposições realizadas por integrantes do Grupo, tendo como principal material didático auxiliador o artigo: “Aplicação de jogos de pôquer através de tecnologias digitais para ensino de probabilidade” dos autores Marco Antônio Ribeiro e Carla Guimarães Regina Brighenti disponível na revista eletrônica: Professor de Matemática Online.

Carga horária: 4 h

8.5 Introdução ao Python

Bolsistas do PET-Matemática e Estatística/UFCG sob à supervisão da Tutora Profa. Josefa Itailma da Rocha.

Resumo

Nesse minicurso focaremos no uso da biblioteca sympy de matemática simbólica do Python para resolver problemas de cálculo e álgebra linear.

Carga horária: 4 h

8.6 Introdução a Fractais

Bolsistas do PET-Matemática e Estatística/UFCG sob à supervisão da Tutora Profa. Josefa Itailma da Rocha.

Resumo

Fractais são figuras geométricas não clássicas compostas por partes que são semelhantes à figura completa. Nesse minicurso apresentaremos alguns Fractais clássicos como a curva de Koch e o triângulo de sierpinski, estudando a sua geometria. Além disso, apresentaremos um algoritmo que pode ser usado para a construção desses objetos.

Carga horária: 4 h

OFICINAS

9.1 Conectando Ideias: Explorando os Conectivos Lógicos com Foco no Ensino Médio

Bolsistas do PIBID/Matemática/CCT/UFCG sob à supervisão da Profa. Jacqueline Félix de Brito Diniz.

Resumo

A oficina “Conectando Ideias” propõe uma abordagem inovadora e lúdica para se trabalhar lógica no Ensino Médio, explorando os conectivos lógicos de maneira envolvente e prática por meio da técnica de Gamificação. Compreender a lógica é fundamental não apenas para a matemática, mas também para a resolução de problemas cotidianos e a tomada de decisões. Além disso, por meio de um envolvente jogo educativo, atividades práticas, discussões em grupo e exemplos concretos, os participantes serão mediados a compreender a função de alguns conectivos lógicos (“e”, “ou”, “se . . . então”) na construção de argumentos sólidos e na análise de proposições compostas.

Carga horária: 4 h

9.2 Explorando Conceitos Visuais na Matemática com o uso da Expressão Gráfica

Bolsistas do PIBID/Matemática/CCT/UFCG sob à supervisão da Profa. Jacqueline Félix de Brito Diniz.

Resumo

Expressão Gráfica é um campo de estudo que utiliza elementos de desenho, imagens, modelos, materiais manipuláveis e recursos computacionais aplicados às diversas áreas do conhecimento, com a finalidade de apresentar, representar, exemplificar, aplicar, analisar, formalizar e visualizar conceitos. Pensando nisso, preparamos esta oficina com o objetivo de explorar conceitos visuais da Matemática através de desenhos geométricos, comumente abordados na disciplina de Expressão Gráfica, e com isso explorar o uso de materiais e elementos de desenho no ensino e aprendizagem da Matemática.

Carga horária: 4 h

9.3 Mágica ou Matemática? Façam suas Apostas! Utilizando o Encanto da Mágica como Porta de Entrada para o Mundo da Matemática

Bolsistas do PIBID/Matemática/CCT/UFCG sob à supervisão da Profa. Jacqueline Félix de Brito Diniz.

Resumo

As chamadas “matemáticas” são utilizadas como dinâmicas em momentos de apresentação professor-aluno ou como dinâmicas quebra gelo, mas podem ser muito mais que isso. Existe bastante matemática por trás dessas dinâmicas e podem ser uma porta de entrada direta ao encantamento do aluno em relação ao mundo da matemática. Dentre as inúmeras possibilidades, que podem ser divididas por áreas, destacamos a aritmética, lógica, análise combinatória e geometria para aplicar e fundamentar o conceito que há por trás delas.

Carga horária: 4 h

9.4 Origamática: Observando a Matemática através do Origami

Bolsistas do PIBID/Matemática/CCT/UFCG sob à supervisão da Profa. Jacqueline Félix de Brito Diniz.

Resumo

Esta oficina utiliza como metodologia a prática do origami em meio a matemática. Iremos detalhar de uma forma dinâmica a geometria plana e a geometria espacial através de uma aula prática, contemplando o recurso do “origami”, em que os alunos irão confeccionar figuras e sólidos geométricos, contribuindo assim para a melhoria do seu processo de ensino-aprendizagem através de matérias manipulados. Como conclusão que se pode tirar dessa experiência vivenciada é a importância dos recursos didáticos manipulados.

Carga horária: 4 h

WORKSHOP DA PÓS-GRADUAÇÃO

Workshop da Pós-Graduação
Sessão temática de álgebra

10.0.1 Classification and polynomial identities of two-dimensional Jordan algebras

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva - (UFMG)

Resumo

We classify two-dimensional Jordan algebras over an arbitrary field of characteristic different from two and we determine a finite basis for their polynomial identities. Its content is joint work with D. Diniz, D. J. Gonçalves and M. S. Souza.

Partially supported by Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) - grant APQ-01149-18.

10.0.2 Número de redução, fecho de Ratliff-Rush, e um problema aberto

Douglas de Souza Queiroz (IFPB)

Resumo

Nesta palestra traremos alguns resultados envolvendo o número de redução de certos ideais e diversos outros invariantes algébricos que se relacionam com o mesmo. Nosso objetivo aqui é trazer teoremas e proposições clássicos da literatura e também alguns resultados que pertencem a trabalhos recentes do autor. Dentre esses resultados encontramos um que associa tal número ao invariante s^* , que trata do comportamento assintótico do fecho de Ratliff-Rush. Finalizaremos a apresentação exibindo uma questão, que se encontra sem solução, envolvendo tais invariantes.

10.0.3 Cocaracteres Y -próprios graduados de $UT_m(F)$

Thiago Felipe da Silva (UFCG)

Resumo

O conceito de identidades polinomiais surgiu por volta da década de 30 do século XX com os trabalhos de M. Dehn e W. Wagner, tendo se tornado área de extensivas investigações apenas na década de 50 do mesmo século, onde estas revelaram-se campo frutífero com os notáveis trabalhos de Jacobson, Kaplansky, Levitzki, Dubnov e Ivanov. Uma identidade polinomial de uma álgebra A é um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ tal que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para todo $a_1, \dots, a_n \in A$. O estudo do crescimento assintóticos das identidades polinomiais é feito através da sequência de seus cocaracteres $\chi_n(A)$, onde o n -ésimo cocaráter é o S_n -caráter do fator

$$P_n(A) = \frac{P_n}{(T(A) \cap P_n)},$$

à grosso modo, estes medem o que não é identidade. As álgebras das matrizes triangulares superiores $UT_m(F)$ destacam-se na classe das álgebras que satisfazem identidades polinomiais, à saber: estas são geradoras das chamadas variedades minimais com expoentes 'fixados', além disso, suas identidades polinomiais podem servir para mensurar a complexidade das identidades polinomiais de uma álgebra finitamente gerada que não satisfazem identidades polinomiais matriciais. Com enorme prazer, nessa XII Semana da Matemática iremos mostrar a forma explícita da sequência de cocaracteres na versão Y -própria graduada da $UT_m(F)$, esse é um recente trabalho publicado em 2022 devido aos autores L. Centrone e T.F. Silva. Venha curtir essa viagem conosco!

10.0.4 Identidades de pares e crescimento das codimensões

David Levi da Silva Macêdo – UFERSA

Resumo

Nessa palestra definiremos as identidades polinomiais para representações de álgebras de Lie, também conhecidas com identidades fracas. Essas identidades estão relacionadas a pares da forma $(A; L)$ onde A é uma álgebra associativa envolvente para a álgebra de Lie L . Apresentaremos os principais resultados obtidos nesse ambiente com relação ao crescimento das codimensões e existência do expoente.

10.0.5 Irreducible Graded Bimodules over Algebras and a Pierce Decomposition of the Jacobson Radical

Antônio de França - UFCG

Resumo

It is well known that the ring radical theory can be approached via language of modules. In this work, we present some generalizations of classical results from module theory, in the two-sided sense. We proved that if M is a finitely generated G -graded A -bimodule, where G is an abelian group, A is a finite dimensional simple G -graded associative algebra, and F is an algebraically closed field of characteristic zero, then there exist nonzero homogeneous elements $w_1, \dots, w_m \in M$ such that

$$M = Aw_1 + \dots + Aw_n,$$

where $w_i A = Aw_i \neq 0$ for all $i = 1, \dots, n$ and each Aw_i is irreducible. The elements w_i 's are associated to the irreducible characters of G . We also describe graded bimodules over graded semisimple algebras. And we finish by presenting a Pierce decomposition of the graded Jacobson radical of any finite dimensional F -algebra with a G -grading.

In collaboration with Irina Sviridova (MAT/UnB).



**Workshop da Pós-Graduação
Sessão temática de EDP Evolução**



10.1.1 Controlabilidade exata na fronteira para as vibrações longitudinais de uma barra (Em homenagem ao prof. Luiz Aduino Medeiros)

Aldo Trajano Lourêdo – UEPB

Resumo

Nesta palestra abordaremos o problema da controlabilidade exata de um sistema que descreve as pequenas vibrações de uma barra que é presa em uma extremidade e na outra extremidade da barra é colada uma massa. Para obter a controlabilidade exata deste sistema, usaremos o método HUM devido ao Lions.

10.1.2 Combinação de técnicas analíticas e computacionais para um sistema de três de leis de conservação

Aparecido Jesuíno de Souza – UFPB

Resumo

Nesta palestra vamos falar de um sistema de três leis de conservação proveniente da modelagem matemática para um fluxo trifásico (óleo, água, gás) unidimensional num meio poroso, sujeito à injeção de um polímero o qual é completamente dissolvido na fase aquosa com o intuito de aumentar a viscosidade de tal fase e conseqüentemente otimizar a recuperação de óleo, [1, 2]. Uma das peculiaridades de tal sistema é que o mesmo não é estritamente hiperbólico já que há coincidências de pares de velocidades características ao longo de uma curva, bem como ao longo de duas superfícies interiores ao espaço de estados tridimensional envolvendo as saturações de duas das fases e a concentração do polímero. A consequência da perda da hiperbolicidade estrita é que não é possível aplicar a teoria clássica de Lax, [3], para sistemas de leis de conservação estritamente hiperbólicos na construção de soluções de problemas de Riemann sendo então necessário usar uma generalização da construção de Lax para o método das curvas de onda de Liu, [4, 5]. Dada a dificuldade de visualização e entendimento das iterações de tais curvas de onda e de outros entes geométricos na geometria tridimensional do espaço de estados, fazemos uso de uma técnica que concilia métodos computacionais com a teoria de leis de conservação para construir e exibir soluções de alguns problemas de Riemann de interesse prático.

Referências:

- [1] E. Isaacson. Global solution of a Riemann problem for a nonstrictly hyperbolic system of conservation laws arising in enhanced oil recovery. Rockefeller University preprint, 1981.
- [2] A. de Souza, D. Marchesin. The three-phase polymer model in porous media. Proceedings of the HYP2022. Malaga, ES, To appear.
- [3] P. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws II. Comm. Pure Appl. Math., 10, pp. 537-566, 1957.
- [4] T. P. Liu. The Riemann problem for general systems of conservation laws. J. Diff. Eqs., 18, pp. 218–234, 1975.
- [5] A. Azevedo, A. de Souza, F. Furtado, D. Marchesin, B. Plohr. The Solution by the Wave Curve Method of Three-Phase Flow in Virgin Reservoirs. Transp. Porous Media, 83, 99– 125, 2010.



10.1.3 Problemas de Cauchy de ordem superior e potências fracionárias

Frank D. M. Bezerra - UFPB

Resumo Nesta palestra apresentaremos alguns resultados relacionados à existência e regularidade de soluções para alguns problemas de Cauchy de ordem superior com uma abordagem via potências fracionárias de operadores lineares.

10.1.4 Dynamics of thermoelastic plate system with terms concentrated in the boundary

Cláudio Odair Pereira da Silva -UEPB

Resumo In this paper we show the existence, uniform boundedness and upper semicontinuity of the global attractors of autonomous thermoelastic plate systems with Neumann boundary conditions when some reaction terms are concentrated in a neighborhood of the boundary and this neighborhood shrinks to boundary as a parameter varepsilon goes to zero.

10.1.5 Estratégias tipo switching para controlabilidade de sistemas parabólicos

Felipe chaves - UFPB

Resumo Nesta palestra discutiremos algumas propriedades de controlabilidade para sistemas por meio de estratégias do tipo switching. Mais precisamente, focaremos na controlabilidade de sistemas parabólicos com vários atuadores e a restrição de que, em cada instante de tempo, no máximo um controle está atuando no sistema. Daremos condições necessárias e suficientes, dependendo somente dos operadores envolvidos, para que a controlabilidade de sistemas com estratégias tipo switching ocorram.

**Workshop da Pós-Graduação
Sessão temática de EDP Elíptica**



10.2.1 Existência de soluções para uma equação Choquard fracionária com crescimento exponencial crítico

Rodrigo Clemente - UFRPE

Resumo Nesta palestra, abordaremos uma classe de equações do tipo Choquard envolvendo o operador fracionário. Nosso propósito consiste em empregar técnicas variacionais e estimativas minimax para investigar a existência de soluções quando a não linearidade exibe crescimento exponencial crítico, conforme estabelecido pela desigualdade de Trudinger-Moser.

10.2.2 Quasilinear elliptic problems with general concave-convex nonlinearities

Edcarlos Domingos da Silva - UFG

Resumo It is established existence and multiplicity of solution for the following class of quasilinear elliptic problems

$$\begin{cases} -\Delta_{\Phi} u = \lambda a(x)|u|^{q-2}u + |u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, is a smooth bounded domain, $1 < q < \ell \leq m < p < \ell^*$ and $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is suitable N- function. The main feature here is to determinate whether the Nehari method can be applied finding the largest positive number $\lambda^* > 0$ such that our main problem admits at least two distinct solutions for each $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Furthermore, using an specific sequence, we prove existence of at least two solutions for each $\lambda \in [\lambda^*, \lambda + \epsilon)$.

10.2.3 Degenerate elliptic equations in \mathbb{R}^2 with critical growth

Angelo Roncalli Furtado de Holanda - UFCG

Resumo

In this work we study a class of semilinear degenerate elliptic equations in the whole space \mathbb{R}^2 with the Grushin operator as its principal part and nonlinearities in the critical growth range. We prove the existence of at least one nontrivial weak solution by combining the mountain-pass theorem, Trudinger-Moser inequality and a version of result due to Lions for critical exponential growth in \mathbb{R}^2 in the corresponding weighted Sobolev space. This is joint work with Claudianor O. Alves (UFCG).

10.2.4 Elliptic systems involving sublinear and superlinear nonlinearities

Diego Ferraz - UFRN

Resumo

Combining topological methods and a priori estimates of solutions of some auxiliary problem, we establish the existence and multiplicity of solutions of some class of elliptic systems. We give here some relevant applications to elliptic systems in dimension $N \geq 2$, whose are not possible to study from the variational point of view or by using the blow-up technique coupled with Liouville-type results. For instance, we establish new results for some Hamiltonian systems without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, that is usually required in this type of problems, even more, the nonlinearities could have arbitrary growth in some parts of the domain. We also give a relevant application for some biharmonic equation with very weak assumptions.

10.2.5 On nonlinear perturbations of a integrodifferential equation with critical exponential growth

Yane Lisley Araújo - UFRPE

Resumo

In this talk we discuss the existence of solutions for integrodifferential equations. These equations involve a nonlocal operator with a measurable kernel that satisfies "structural properties" that are more general than the standard kernel of the fractional Laplacian operator. Additionally, the potential can be periodic or asymptotically periodic, and the nonlinear term exhibits critical exponential growth in the sense of Trudinger-Moser inequality.

**Workshop da Pós-Graduação
Sessão temática de Geometria**



10.3.1 Rigidity and nonexistence of complete hypersurfaces via Liouville type results and other maximum principles, with applications to entire graphs

Railane Antonia - UFPB

Resumo

In this talk, we will investigate complete hypersurfaces with some positive higher order mean curvature in a semi-Riemannian warped product space. Under standard curvature conditions on the ambient space and appropriate constraints on the higher order mean curvatures, we establish rigidity and nonexistence results via Liouville type results and suitable maximum principles related to the divergence of smooth vector fields on a complete noncompact Riemannian manifold. Application to standard warped product models, like the Schwarzschild, Reissner-Nordström and pseudo-hyperbolic spaces, as well as steady state type spacetimes, are given and a particular study of entire graphs is also presented.

Referências:

[1] R. Antonia, G. M. Bisci, H. F. de Lima and M.S. Santos, Rigidity and nonexistence of complete hypersurfaces via Liouville type results and other maximum principles, with applications to entire graphs, to appear in Asymptotic Analysis.

10.3.2 Serrin type problems in Riemannian manifolds

Marcio Silva Santos - UFPB

Resumo

In this talk, we deal with Serrin-type problems in Riemannian manifolds. More precisely, we present a Heintze-Karcher inequality and a Soap Bubble result, with its respective rigidity, when the ambient space has a Ricci tensor bounded below. After, we approach a Serrin problem in bounded domains of manifolds endowed with a closed conformal vector field. Our primary tool, in this case, is a new Pohozaev identity, which depends on the scalar curvature of the manifold. Applications involve Einstein and constant scalar curvature spaces.

10.3.3 Trapped and Totally Trapped submanifolds in spacetimes models

Eraldo Almeida Lima Junior - UFPB

Resumo

In his seminal paper Penrose related the trapped surfaces and the so called Black Holes which are regions in space where the even the light cannot scape. Recently many characterizations were obtained for compact trapped surfaces and submanifolds in order to understand Black Holes in spacetimes of usual or higher dimensions. Based on that we studied noncompact trapped submanifolds in certain spacetimes and we will present some characterizations of parabolic trapped submanifolds and complete totally(super-symmetry) trapped submanifolds.

10.3.4 Revisiting linear Weingarten hypersurfaces immersed into a locally symmetric Riemannian manifold

Lucas Siebra Rocha - UFCG

Resumo

In this talk based on [2], we are going to deal with complete linear Weingarten hypersurfaces immersed in a locally symmetric Riemannian manifold, which is supposed to obey standard curvature restrictions. Assuming that such a hypersurface satisfies a suitable Okumura type inequality, we will apply a version of the Omori-Yau's maximum principle to prove that it must be either totally umbilical or isometric to an isoparametric hypersurface having two distinct principal curvatures. When the ambient space is Einstein, we will also use a technique recently developed by Alías and Meléndez in [1] to establish a sharp integral inequality for compact linear Weingarten hypersurfaces.

Referências:

- [1] Alías, L.J. and Meléndez, J. Integral Inequalities for Compact Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in the Euclidean Sphere. *Mediterr. J. Math.* 17, 61 (2020).
- [2] de Lima, E.L., de Lima, H.F. and Rocha, L.S. Revisiting linear Weingarten hypersurfaces immersed into a locally symmetric Riemannian manifold. *European Journal of Mathematics* 8, 388–402 (2022).

10.3.5 Stochastically complete, parabolic, and λ -Liouville space-like submanifolds with parallel mean curvature vector

Weiller Felipe Chaves Barbosa - UFPB

Resumo

We deal with n -dimensional spacelike submanifolds immersed with parallel mean curvature vector in a pseudo-Riemannian space form of index λ and constant sectional curvature c . Considering the cases when c is either spacelike or timelike, we are able to prove that such a spacelike submanifold is either totally umbilical or it holds a lower estimate for the supremum of the norm of its traceless second fundamental form, occurring equality if the spacelike submanifold is pseudo-umbilical and its principal curvatures are constant. In our approach, we use three main core concepts: Stochastic completeness, parabolicity and λ -Liouville property.

Referências:

[1] Weiller F.C. Barboza; Henrique F. de Lima and Marco A.L. Velásquez. Stochastically complete, parabolic and λ -Liouville spacelike submanifolds with parallel mean curvature vector. To appear in Potential Analysis.

COMUNICAÇÕES ORAIS

O Metodo Dos Gradientes Conjugados

O MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

Joelson Joventino Santos¹ - joelson.joventino@estudante.ufcg.edu.br
Sabrina Kely Jacinto Xavier¹ - sabrina.kely@estudante.ufcg.edu.br
Luiz Antônio da Silva Medeiros¹ - luiz.silva@professor.ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Os Métodos Gradientes Conjugados têm sido estudados desde a década de 1950, a motivação para tal era a solução de sistemas provenientes da discretização de equações diferenciais parciais viabilizadas pela entrada dos computadores nos cálculos científicos. Neste presente trabalho, buscamos apresentar e introduzir o Método dos Gradientes Conjugados, desde a sua fundamentação teórica à implementação do algoritmo estabelecido pelo Método, estabelecendo assim suas propriedades e aplicações.

Palavras-chave: Gradiente Conjugado; Otimização; Programação Não-Linear; Métodos Computacionais

1. Introdução

Os Métodos Gradientes Conjugados (MGC) têm sido estudados desde a década de 1950, a motivação para tal era a solução de sistemas provenientes da discretização de equações diferenciais parciais viabilizadas pela entrada dos computadores nos cálculos científicos. A base para o que seria futuramente desenvolvido é amplamente creditado ao trabalho de Hestenes e Stiefel (1952).

Para uma matriz A definida positiva, resolver sistemas da forma $Ax = b$, equivale a minimizar a função vetorial

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c,$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Com efeito, sendo A definida positiva, a função quadrática é convexa e portanto possui um único ponto crítico que é seu minimizador. Ou seja,

$$x^* = \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c, x \in \mathbb{R}^n \right\} \Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow Ax^* = b.$$

Iremos inicialmente, apresentar algumas definições e resultados importantes acerca da construção do Método dos Gradientes Conjugados de forma a apresentar as ferramentas utilizadas no desenvolvimento teórico. Dessa forma, os resultados a seguir são cruciais para um melhor entendimento da parte prática do MGC.

Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica definida positiva. Os vetores d_0, d_1, \dots, d_k são chamados A-conjugados se

$$d_i^T A d_j = 0, \text{ para todo } i \neq j.$$

com $i, j = 0, 1, \dots, k$.

Perceba que essa definição pode ser ampliada para matrizes que não sejam definidas positivas. Porém, caso A seja definida positiva e d_0, d_1, \dots, d_k não nulos, então esses vetores são linearmente independentes.

Teorema 1. Considere o problema

$$\text{minimize } f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c,$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica definida positiva, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Sejam d_0, d_1, \dots, d_{n-1} direções A-conjugadas e seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto inicial arbitrário. Definimos

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k,$$

onde λ_k é o passo ótimo da minimização de $f(x_k + \lambda d_k)$. Siga daí os seguintes resultados:



$$(i) \lambda_k = \frac{-\nabla f(x_k)^T d_k}{d_k^T A d_k};$$

$$(ii) \nabla f(x_k)^T d_j = 0, j = 0, 1, \dots, k-1;$$

(iii) x_n é o mínimo de f em \mathbb{R}^n .

Teorema 2. (Teorema dos Subespaços Expandidos) Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1, temos que x_k minimiza f em $B_k = \{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}\}$, para $k = 1, \dots, n$.

2. Metodologia

Esta foi uma pesquisa realizada de forma exploratória, onde estudamos os principais livros e artigos de autores que são referência na área de Otimização, dentre eles Friedlander (1994), Bertsekas (1996), Burden e Faires (2003), Martinez e Santos (2020), Izmailov e Solodov (2018). Semanalmente eram expostos, em encontros; nossos estudos na forma de seminários, nesses seminários sob orientação do Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros discutimos e demonstramos todos os conceitos aqui apresentados.

3. Resultado e discussão

O método de Gradiente Conjugado (MGC) proposto por Hestenes e Stiefel, no ano de 1952, gera um conjunto de n direções conjugadas e de descida para $f : d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$, com $d_0 = -\nabla f(x_0)$ e

$$d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) + \beta_k d_k, \quad (1)$$

onde β_k é um escalar e deve ser escolhido de modo que duas direções seguidas d_k e d_{k+1} sejam A-conjugadas, ou seja, $d_{k+1}^T A d_k = 0$, assim

$$\beta_k = \frac{\nabla f(x_{k+1})^T A d_k}{d_k^T A d_k}. \quad (2)$$

Teorema 3. As direções d_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$ gerados por 1 e 2 são direções A-conjugadas.

Teorema 4. Depois de k iterações do MGC, os gradientes $\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_{k-1})$ são mutuamente ortogonais.

A maneira de calcular o resíduo r_k em uma iteração k ($r_k = b - A x_k = -\nabla f(x_k)$), assim como λ_k e β_k , não é única, existem diversas fórmulas cujas combinações fornecem várias versões do MGC. No entanto, apesar de que todas essas versões sejam matematicamente equivalentes, sua implementação computacional não é. Buscamos a versão que apresenta em termos de trabalho computacional, memória gasta e precisão. Segundo Bertsekas (1996) tal versão calcula r_k, λ_k e β_k da seguinte forma:

$$(i) \lambda_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k};$$

$$(ii) r_{k+1} = r_k - \lambda_k A d_k;$$

$$(iii) \beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}.$$

Através da construção feita até aqui com base nos últimos resultados, podemos exibir um algoritmo de Gradiente Conjugado propício ao uso com fins de otimização de funções quadráticas:

- Inicialização: São dados a estimativa $0 < x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$;

$$d_0 = r_0 = -\nabla f(x_0) = b - Ax_0; \text{ (se } d_0 = 0 \text{ paramos)}$$

$$\delta_0 = r_0^T r_0;$$

$$k = 0;$$

- Para $k = 0, 1, \dots$

$$h_k = Ad_k; \lambda_k = \frac{\delta_0}{d_k^T h_k};$$

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k; r_{k+1} = r_k + \lambda_k d_k; \text{ (se } < r_k \text{ devolve)}$$

Se $\|r_{k+1}\| < \epsilon$, saída com $x_* = x_{k+1}$; (paramos)

$$\delta_1 = r_{k+1}^T r_{k+1};$$

$$\beta_k = \frac{\delta_1}{\delta_0};$$

$$\delta_0 = \delta_1; \text{ (aqui muda a iteração)}$$

$$d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k d_k.$$

Quanto à memória ocupada: são necessários vetores de dimensão n para armazenar h , x , r , d e uma matriz de dimensão $n \times n$ para armazenar A (numa implementação para sistemas esparsos, o armazenamento de A depende de seu número de elementos não nulos e da estrutura de dados usada).

Quanto ao esforço computacional gasto: temos, por iteração, um produto de matriz por vetor (Ad_k) e dois produtos internos, além das multiplicações por escalar e adições envolvidas nas fórmulas recursivas. Logo, o número de operações por iteração é $O(2n^2)$.

Com considerações adicionais pode se mostrar um resultado "mais forte" sobre a convergência do MGC, conforme estabelece o teorema a seguir.

Teorema 5. *Se a matriz A de ordem n possui n autovalores distintos, então O MGC converge, no máximo, em n iterações.*

Por fim, apresentamos em prática o algoritmo recém exibido e a aplicação do Método do Gradiente Conjugado. Optamos por exibir um exemplo de uma função quadrática bidimensional, justamente para acompanhar geometricamente as sequências geradas pelo métodos evidenciando as suas propriedades.

Exemplo 1. *Dada a função quadrática $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 2xy + 8y + 3y^2$, ao aplicarmos o algoritmo apresentado, tomando como ponto inicial $x_0 = (-2, 2)$, obtemos os seguintes resultados:*

	d_i	δ_i	h_i	λ_i	x_{i+1}	r_{i+1}	β_i
$i = 0$	(12; 8)	208	(52; 72)	13/75	(0.08; -0.613)	(2.986; -4.48)	0.139
$i = 1$	(4.654; -3.368)	28.9865	(7.226; -10.9)	0.4121	(2; -2)	(0; 0)	-

Tabela 1: Resultado do Algoritmo MGC aplicado à função do Exemplo 1

Dessa forma, como $r_2 = (0; 0)$ podemos concluir que $x_2 = (2; -2)$ é o minimizador desta função, ou seja, o vetor $x^* = x_2 = (2; -2)$ é solução do sistema $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Graficamente, temos a seguinte representação do processo de minimização desta função através do algoritmo:

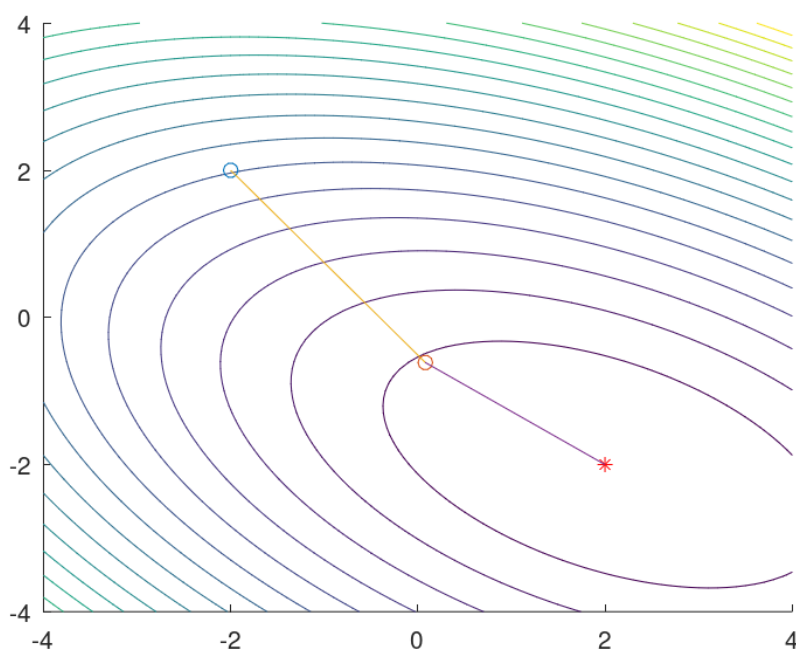


Figura 1: Algoritmo MGC do Exemplo 1 utilizando o OCTave.

4. Conclusões

A pesquisa permitiu estabelecer o Método dos Gradientes Conjugados, bem como suas propriedades, de modo a permitir definir o seu algoritmo para obter os pontos críticos de funções quadráticas ao tempo de analisar a sua convergência. Para isto, aplicamos o método em exemplos bidimensionais para melhor visualização e entendimento do algoritmo. Entretanto, da pesquisa, entendemos que o MGC pode ser utilizado também para matrizes definidas negativas e algumas vezes, para matrizes quadradas arbitrárias, estas sem garantias de que o algoritmo convirja.

Agradecimentos

O presente trabalho é fruto de uma Iniciação Científica parcialmente financiada pelo MEC/FNDE/PET.

Referências

- BERTSEKAS, D. P. *Nonlinear programming*. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1996. Citado na página 2.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. São Paulo - SP: Thompson Learning, 2003. Citado na página 2.
- FRIEDLANDER, A. *Elementos de programação não linear*. Campinas - SP: Editora da Unicamp, 1994. Citado na página 2.
- HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, v. 49, p. 409–436, 1952. Citado na página 1.
- IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Otimização: Métodos Computacionais. Volume 2*. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, 2018. Citado na página 2.
- MARTINEZ, J. M.; SANTOS, S. A. *Métodos Computacionais de Otimização*. Campinas - SP: Editora da Unicamp, 2020. Citado na página 2.

Resolução Numérica Da EDO Que
Modela O Decaimento Radioativo Do
Carbono-14, Usando O Método
De-Adams-Bashforth-Moulton

Resolução numérica da EDO que modela o decaimento radioativo do carbono-14, usando o método de Adams-Bashforth-Moulton

Lucas Hariel Cavalcanti de Oliveira^{1, 2} - lhcant@outlook.com
Carlos Vinício Carvalho Cunha¹ - carlos.vinicio@estudante.ufcg.edu.br
Marcelo Vítor de Oliveira Silva¹ - marcelo.vitor@estudante.ufcg.edu.br
Deise Mara Barbosa de Almeida¹ - deise@mat.ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

²Parcialmente financiado pelo MEC/FNDE/PET

Resumo: O processo de modelagem de diversos problemas recaem em uma equação diferencial, e que para resolver o problema, devemos encontrar a função solução da equação diferencial. O propósito deste trabalho é estudar o método numérico de passo múltiplo de Adams-Bashforth-Moulton de 4^ª ordem, para encontrar a solução aproximada da equação diferencial ordinária de primeira ordem que modela o decaimento do carbono-14, costumeiramente utilizado no processo de datação. Para tal, fazemos a descrição do processo de modelagem matemática do processo de datação por decaimento radioativo do carbono-14 e a descrição do método objeto de estudo. Por fim, mostramos a solução analítica do problema e a comparamos com a solução numérica fornecida pelo método numérico. Constatamos a eficiência do método na resolução de problemas do tipo.

Palavras-chave: equação diferencial ordinária; decaimento radioativo; método numérico

1. Introdução

Uma equação diferencial ordinária (EDO) consiste em uma equação formada por derivadas e cuja incógnita é uma função dependente somente de uma variável. Diversos problemas são modelados através de uma equação diferencial ordinária. Neste trabalho, buscamos a resolução numérica de uma EDO em particular.

Uma interessante aplicação das EDO's ocorre no processo de datação por decaimento radioativo. Cada elemento radioativo possui um decaimento característico, no qual o tempo que este elemento leva para sua atividade ser reduzida à metade é chamado de meia vida. No processo de datação por decaimento radioativo, o elemento mais usual é o carbono-14 que apresenta meia vida de aproximadamente 5.730 anos e pode datar materiais de até 40 mil anos, mas se torna ineficiente em datações de objetos com idade maior que 40.000 anos.

No presente trabalho buscamos explorar o processo de decaimento radioativo do carbono-14 descrito por uma EDO de primeira ordem, utilizando o método numérico de Adams-Bashforth-Moulton de 4^ª ordem. Este é um método de passo múltiplo que tem como objetivo a resolução de problemas de valor inicial. Para tanto, o método foi implementado em linguagem computacional Python, por seu fácil manuseio e versatilidade, na implementação dos métodos e elaboração dos gráficos. A fim de testar a eficiência do método numérico na resolução de problemas do tipo, faremos a comparação da solução analítica com a obtida numericamente.

2. Modelagem Matemática

Com o passar do tempo, devido à sua natureza instável, os elementos radioativos apresentam uma redução da massa e da atividade do núcleo instável, a uma frequência que lhe é característica, até se rearranjar em um modelo mais estável. Esse processo de transmutação dos núcleos instáveis em formas mais estáveis é denominado de decaimento radioativo. Uma forma de analisar o decaimento é medindo o tempo necessário para que a atividade do núcleo radioativo seja reduzida à metade, a chamada meia vida. Tal descrição é feita por meio de uma equação diferencial ordinária.

A taxa na qual ocorre o processo de decaimento em um material radioativo é diretamente proporcional ao número de núcleos radioativos presentes na amostra, ou seja, àqueles núcleos que ainda não sofreram decaimento. Se denotarmos por Q a quantidade de matéria radioativa presente em um determinado momento t , a taxa de variação de Q é expressa por:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q.$$

De acordo com (ALVES, 2015), resolvendo a EDO pelo método analítico de variáveis separáveis, obtemos a expressão de Q :

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

sendo λ a chamada constante de decaimento, que é relativa a cada material radioativo e Q_0 a quantidade de matéria que ainda não decaiu num instante $t = 0$.

Note que ainda não é possível determinar o valor da constante de decaimento. De acordo com (GARCIA; GONÇALVES; BUSKE, 2011), considerando a meia vida de um elemento como $T_{1/2}$ e $Q = \frac{Q_0}{2}$, segue das equações anteriores que:

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Daí,

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Assim, podemos determinar a constante de decaimento conhecendo a meia vida de um elemento, possibilitando calcular a sua taxa de decaimento.

3. Metodologia

Grande parte dos problemas descritos por EDO's não podem ser resolvidos por meio de um Método Analítico, pela inviabilidade do problema ou pela inexistência de solução analítica, (MAIOLI; AFONSO, 2015) e (FIGUEIRÊDO, 2021). Por esse motivo, são utilizados os Métodos Numéricos, que contornam as dificuldades encontradas na obtenção de soluções analíticas, fornecendo, por meio de algoritmos, o que chamamos de soluções numéricas (uma aproximação à solução analítica).

Para a resolução numérica das EDO's com valor inicial, utilizamos o método de passo Adams-Bashforth-Moulton de 4º ordem, que é um método de passo múltiplo e consiste na combinação de dois outros métodos (LOBÃO; SANCHES; FURLAN, 2017). O primeiro é o método de Adams-Bashforth de passo 4, considerado um método explícito, pois utiliza no cálculo de um novo ponto somente informações de pontos já determinados. A equação de iteração deste método é dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}).$$

Já o segundo é o Adams-Moulton de passo 3, que é um método implícito, utiliza no cálculo de um novo ponto os valores já calculados e uma estimativa do valor a ser calculado. Este método tem como equação de iteração:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Conforme Filho (2007), o método explícito, por sua construção, não gera bons resultados. Já o método implícito precisa ser utilizado em conjunto com o método explícito, pois necessita de uma estimativa do próprio valor a ser calculado. Dessa forma, a ideia da combinação desses dois métodos é prever e corrigir os pontos calculados: o método explícito utiliza uma estimativa inicial dos valores e o implícito faz uma correção (refina essa estimativa), caracterizando um método do tipo preditor-corretor. O corretor pode ser aplicado mais de uma vez para melhorar ainda mais o resultado.

Em uma primeira iteração de um método de passo múltiplo, já são necessários valores iniciais dos pontos que queremos estimar; o que pode parecer ambíguo. Para solucionar esta questão, utilizamos um método de passo simples, aquele que na estimativa de um novo valor utilizam informações de um único ponto estimado anteriormente, para terminar uma estimativa. Neste trabalho, optamos por utilizar o método de passo simples de Runge-Kutta de 4º ordem, que, apesar de agregar uma quantidade maior de iterações, dispõe de uma precisão maior do que a maioria dos outros métodos de passo simples (MAIOLI; AFONSO, 2015). A equação de iteração deste método é dada da seguinte forma:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4),$$

sendo

$$k_1 = f(x_i, y_i), k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \text{ e } k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

Temos ainda que h é definido por:

$$h = \frac{b - a}{m},$$

sendo a e b os extremos do intervalo em que calculamos a solução, e m o número de partições, uma vez que o domínio deve ser discretizado para construção do método.

4. Resultado e discussão

Consideremos o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} Q' = -\lambda_{C14}Q \\ Q_0 = 100\%, \text{ para } Q_0 = Q(0) \\ 0 \leq t \leq 50.000 \end{cases} .$$

Como apresentado na modelagem matemática, para calcularmos a taxa de decaimento de um material radioativo, precisamos conhecer a sua constante de decaimento que, por sua vez, pode ser determinada conhecendo a meia vida do material. A meia vida de um elemento radioativo é obtida experimentalmente. Para o carbono-14, é de aproximadamente 5.730 anos (ALVES, 2015). Sabendo disso, podemos calcular a sua constante de decaimento:

$$\lambda_{C14} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} = 1,20968 \times 10^{-4}.$$

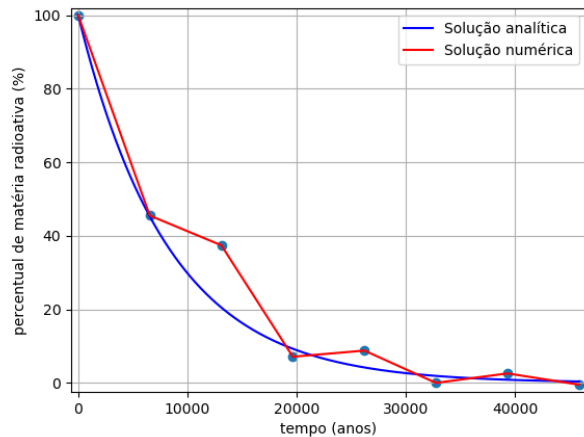
Considerando a proporção de massa radioativa no instante inicial $Q_0 = 100\%$, da Equação (1) segue que o decaimento radioativo do carbono-14 é dado por:

$$Q = e^{(-1,20968 \times 10^{-4})t}.$$

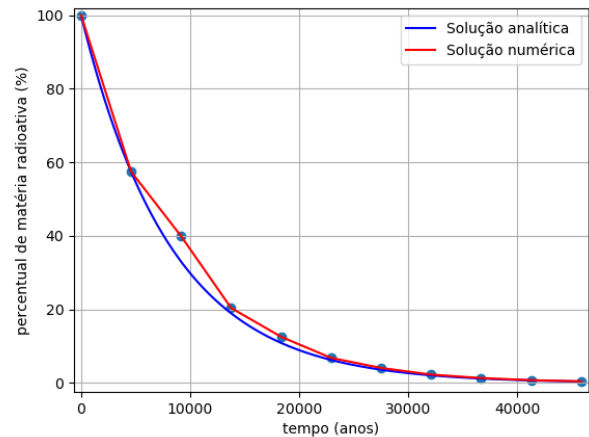
Esta é a solução analítica do problema de decaimento do carbono-14 que utilizaremos para comparar a solução obtida através do método numérico.

Na implementação do método de Adams-Bashforth-Moulton de 4th ordem feita em linguagem computacional Python, inicialmente consideramos um número de 7 e 10 subintervalos para o cálculo da solução numérica. Posteriormente, utilizamos 20 e 30 subintervalos para verificar se havia melhora na obtenção da solução. Após essa implementação, geramos o gráfico das soluções analítica e numérica para compará-las. Em todos os gráficos da Figura (1) temos a solução analítica em azul e as soluções numéricas em vermelho usando diferentes quantidades de subintervalos.

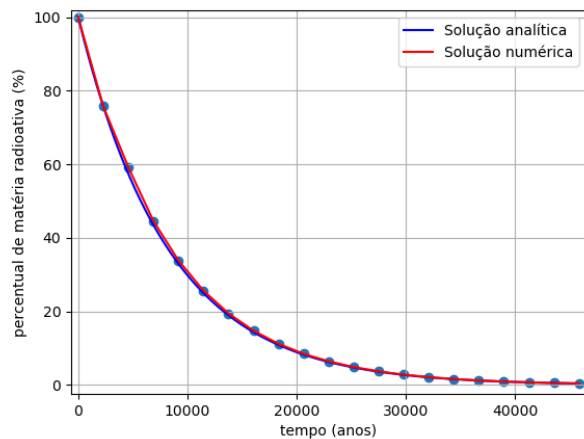
Na Figura (1a), temos o gráfico da solução numérica com sete subintervalos, em que percebemos que os pontos calculados ficaram distantes da solução exata, cometendo erros significativos na aproximação da solução. Já na Figura 1b, cuja implementação foi feita utilizando 10 subintervalos, podemos notar uma melhora na aproximação da solução obtida pelo método. Isso ocorreu por conta do tamanho de h , que foi relativamente menor. Analisando as Figuras (1c) e (1d), é perceptível a relação existente entre o tamanho subintervalos e a aproximação com a solução analítica, constatando que quanto maior for a quantidade de subintervalos ou, equivalentemente, quanto menor o h , mais próxima à solução numérica encontra-se da solução exata. Dessa forma, podemos constatar que o método numérico se mostrou eficiente na resolução do problema proposto.



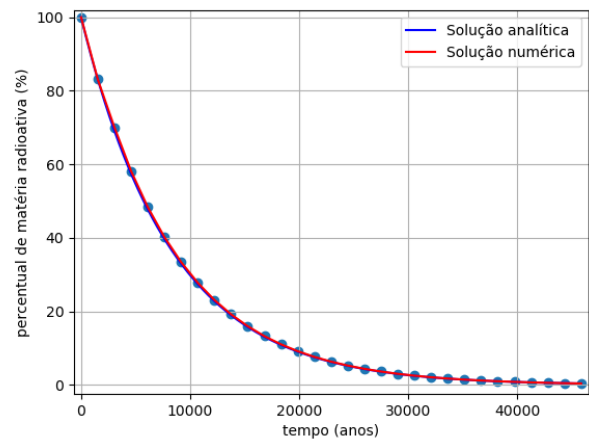
(a) 7 subintervalos



(b) 10 subintervalos



(c) 20 subintervalos



(d) 30 subintervalos

Figura 1: Solução Analítica e Numérica do problema de decaimento radioativo do carbono-14

5. Conclusões

Neste trabalho apresentamos o problema de decaimento radioativo do carbono-14 cuja solução é dada por resolver uma equação diferencial ordinária. Mostramos a solução analítica do problema, que modela a taxa de decaimento do carbono-14, a descrição do método numérico Adams-Bashforth-Moulton de 4º ordem com o qual encontramos a solução numérica e, então, fizemos a comparação da solução analítica com a solução numérica obtida.

Observando os resultados graficamente, percebemos que, ao comparar a solução analítica e solução numérica, o método numérico apresentou uma eficiência expressiva na resolução do problema, aproximando-se tanto da solução analítica a ponto de tornar difícil diferenciá-las. Além disso, com esta análise dos gráficos, é perceptível que a partir de 40.000 anos o percentual de carbono-14 que ainda não decaiu é muito próximo de zero, confirmando a ineficiência deste elemento na datação de objetos que apresentam idade superior a 40 mil anos.

Referências

- ALVES, W. B. Sobre a datação por decaimento radioativo. *Revista Eletrônica UNIVAG*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- FIGUEIRÊDO, J. R. E. Introdução aos métodos numéricos na resolução de equações diferenciais de primeira ordem. *Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - Curso de Licenciatura em Matemática*, p. 9, 2021. Citado na página 2.
- FILHO, F. F. C. *Algoritmos numéricos*. [S.l.]: LTC, 2007. ISBN 9788521615378. Citado na página 2.
- GARCIA, K. B.; GONÇALVES, V. de M.; BUSKE, D. Aplicação de equações diferenciais no cálculo do decaimento radioativo. *Universidade Federal de Pelotas*, 2011. Citado na página 2.
- LOBÃO, D. C.; SANCHES, I. J.; FURLAN, D. L. Introdução aos métodos numéricos. *Universidade Federal Fluminense - Volta Redonda*, p. 114; 131–135, 2017. Citado na página 2.
- MAIOLI, G.; AFONSO, S. M. S. Métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias. *Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho- Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus Rio Claro*, p. 8; 44; 131–135, 2015. Citado na página 2.

O Teorema Dos Zeros De Hilbert

O TEOREMA DOS ZEROS DE HILBERT

Lívia Tito Ribeiro¹ - livia.tito@estudante.ufcg.edu.br

Thyago Santos de Souza¹ - thyago@mat.ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Neste estudo, exploramos o Teorema dos Zeros de Hilbert e sua aplicação na Geometria Algébrica. Realizamos uma revisão abrangente das principais definições e resultados teóricos que formam a base para a compreensão desse teorema e sua relevância na solução de problemas geométricos. Destacamos a importância da teoria de ideais, variedades algébricas, corpos algebricamente fechados e espaços afins. Além disso, abordamos teoremas importantes, como o Teorema da Base de Hilbert, que se mostrou essencial para a demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, nosso objetivo principal. Este trabalho, conduzido como parte de um trabalho de iniciação científica, representa uma contribuição significativa para a formação acadêmica da autora discente e os resultados obtidos ampliaram sua compreensão teórica e prática do Teorema dos Zeros de Hilbert, abrindo caminho para futuras pesquisas e avanços na área. Em resumo, este estudo destaca a importância de estabelecer uma base teórica sólida para a abordagem de teoremas importantes, como o Teorema dos Zeros de Hilbert, e demonstra a relevância desse teorema na Geometria Algébrica.

Palavras-chave: Teorema dos Zeros de Hilbert; Álgebra Comutativa; Introdução à Geometria Algébrica

1. Introdução

O Teorema dos Zeros de Hilbert, ou Nullstellensatz Hilberts, como é conhecido em alemão, estabelece uma conexão entre variedades algébricas e ideais em anéis de polinômios sobre corpos algebricamente fechados. É um resultado de destaque na Geometria Algébrica, revelando vínculos entre a álgebra e a geometria.

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma das versões desse teorema, assim como sua demonstração, e destacar uma aplicação relevante. Para essa análise, tomamos como base principalmente as referências (BORGES; TENGAN, 2015), (ATIYAH; MACDONALD, 1969) e (FULTON, 2008).

Iniciaremos apresentando as principais definições e resultados fundamentais necessários para a compreensão do assunto deste trabalho. Isso inclui a teoria de ideais em anéis de polinômios e variedades algébricas, que são conceitos importantes para o entendimento deste Teorema.

Na sequência, discutiremos a importância do Teorema da Base de Hilbert como um componente essencial na demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, evidenciando seu papel na construção de argumentos matemáticos coerentes.

Além disso, exploraremos o Teorema dos Zeros de Hilbert examinando suas implicações na Geometria Algébrica e destacando sua relevância na conexão entre variedades algébricas e ideais de polinômios.

Finalmente, apresentaremos uma aplicação prática do Teorema dos Zeros de Hilbert no contexto da Geometria Algébrica, a correspondência entre variedades algébricas e ideais radicais.

2. Metodologia

Este trabalho decorre de uma iniciação científica e tem como principal objetivo a demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert e a apresentação de uma aplicação na Geometria Algébrica. A metodologia adotada é composta pelas seguintes etapas:

Começamos com uma revisão bibliográfica abrangente, que engloba desde os conceitos básicos, como tipos e propriedades de ideais de polinômios sobre anéis comutativos, definição de variedades algébricas afins e ideais de definição, até resultados mais complexos, como o Teorema da Base de Hilbert. Essa revisão fornece uma base sólida para a compreensão da demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, permitindo uma análise mais clara do resultado.

Em seguida, avançamos para a demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert, seguindo uma abordagem detalhada. Esta etapa é essencial para a compreensão completa desse teorema. Além da demonstração, exploramos uma aplicação deste teorema na Geometria Algébrica. Demonstrando, assim, como esse teorema

desempenha um papel importante na conexão entre álgebra e geometria.

A metodologia é concluída com a síntese das conclusões e implicações do trabalho, destacando a relevância teórica e prática do Teorema dos Zeros de Hilbert e sua aplicação. Além disso, todas as fontes consultadas ao longo da pesquisa serão devidamente referenciadas, garantindo a integridade do trabalho.

3. Resultado e discussão

Nesta seção, destacamos as principais definições e resultados estudados durante a realização do trabalho. Esses conceitos são fundamentais para alcançar o objetivo da demonstração do Teorema dos Zeros de Hilbert e para uma melhor compreensão da aplicação deste teorema na Geometria Algébrica.

Dessa forma, enfatizamos a importância das definições e resultados apresentados a seguir, pois eles constituem a base teórica essencial para a consecução de nossos objetivos neste estudo.

Definição 1 (Corpo algebricamente fechado). Um corpo k é considerado corpo algebricamente fechado se, para todo polinômio não constante $f(x) \in k[x]$, existe um elemento $a \in k$ tal que $f(a) = 0$.

Definição 2 (Espaço Afim). Seja k um corpo. O espaço afim n -dimensional (sobre k) é definido por

$$\mathbb{A}_k^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in k, i = 1, \dots, n\}$$

Simplemente, \mathbb{A}_k^n é o conjunto $k^n = k \times k \times \dots \times k$, n vezes (produto cartesiano, considerado sem estrutura de espaço vetorial).

Definição 3 (Variedade Algébrica Afim). Uma variedade algébrica afim X definida por um ideal $I \subsetneq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é o conjunto

$$X = V(I) = \{p \text{ em } \mathbb{A}_k^n \mid f(p) = 0, \text{ para todo } f \text{ em } I\}.$$

Definição 4 (Ideal de definição). O ideal de definição da variedade algébrica afim X , é denotado por $\mathfrak{I}(X)$. Este ideal é o conjunto de todos os polinômios $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tais que $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para todo ponto $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$.

Teorema 1 (Teorema da base de Hilbert). Seja A um anel noetheriano. Então, o anel de polinômios $A[x]$ é noetheriano.

Lema 1 (Lema de Zariski). Seja $k \subseteq L$ uma extensão de corpos tal que L é finitamente gerado como k -álgebra, ou seja, existem $a_1, \dots, a_n \in L$ satisfazendo $L = k[a_1, \dots, a_n]$. Então $k \subseteq L$ é algébrica.

Proposição 1. Seja k corpo algebricamente fechado. Todo ideal maximal $\mathfrak{M} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ é da forma

$$\mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n),$$

para certos $a_1, \dots, a_n \in k$.

Teorema 2. Se k é um corpo algebricamente fechado e se $I \subsetneq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ é um ideal próprio, então $V(I) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $I \subsetneq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ um ideal próprio, então existe $\mathfrak{M} \subset k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ maximal tal que $I \subseteq \mathfrak{M}$. Logo $V(\mathfrak{M}) \subseteq V(I)$. Pela proposição 1, existem $a_1, \dots, a_n \in k$ tais que $\mathfrak{M} = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} V(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) &\subseteq V(I) \\ &\Rightarrow \{p\} \subseteq V(I), \end{aligned}$$

com $p = (a_1, \dots, a_n)$. Portanto, $V(I) \neq \emptyset$ ■

Teorema dos Zeros de Hilbert (Nullstellensatz). Seja k um corpo algebricamente fechado e seja $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ um ideal. Então

$$\mathfrak{I}(V(I)) = \sqrt{I}$$

Demonstração. Seja $h \in \sqrt{I}$, então existe $m \gg 0$ tal que $h^m \in I$. Seja $p \in V(I)$ arbitrário. Logo,

$$\begin{aligned}(h^m)(p) &= 0 \\ \Rightarrow (h(p))^m &= 0 \\ \Rightarrow h(p) &= 0.\end{aligned}$$

Logo, $h \in \mathfrak{I}(V(I))$.

Reciprocamente, tome $g \in \mathfrak{I}(V(I))$. Pelo Teorema 1 podemos escrever geradores $I = (f_1, \dots, f_r) \subset k[x_1, \dots, x_n]$. Agora, considere o ideal

$$J = (f_1, \dots, f_r, tg - 1) \subset k[x_1, \dots, x_n, t]$$

onde t é uma indeterminada sobre $k[x_1, \dots, x_n]$. Considere também a variedade correspondente

$$V(J) \subseteq \mathbb{A}_k^{n+1}.$$

Note que os polinômios f_1, \dots, f_r e $tg - 1$ não têm zeros em comum em \mathbb{A}_k^{n+1} e, pelo Teorema 2, podemos escrever

$$1 = \sum_{i=1}^r H_i f_i + G(tg - 1),$$

com $H_i, G \in k[x_1, \dots, x_n, t]$. Aplicando um homomorfismo de anéis adequado, obtemos a igualdade

$$1 = \sum_{i=1}^r H_i \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{g} \right) f_i + G \left(\frac{1}{g} g - 1 \right).$$

Multiplicando por uma potência apropriada de g , obtemos

$$g^s = \sum_{i=1}^r L_i f_i,$$

com $L_i \in k[x_1, \dots, x_n]$. Portanto, $g \in \sqrt{I}$. ■

Corolário 1. Tem-se a seguinte bijeção

$$\{\text{Variedades algébricas em } \mathbb{A}_k^n\} \longleftrightarrow \{\text{Ideais radicais em } k[x_1, \dots, x_n]\}.$$

Em resumo, os resultados estudados representam um avanço significativo na compreensão e aplicação do Teorema dos Zeros de Hilbert na Geometria Algébrica. Essas descobertas não apenas enriquecem nosso conhecimento teórico, mas também fornecem uma fundamentação consistente para abordar problemas geométricos.

4. Conclusões

Neste estudo, demonstramos o Teorema dos Zeros de Hilbert e uma de suas aplicações na Geometria Algébrica. O trabalho abrangeu uma revisão das principais definições e resultados teóricos que constituíram a base essencial para a compreensão desse teorema e de sua relevância na resolução de problemas geométricos.

Em particular, destacamos a importância da base teórica nos estudos iniciais como ideais, variedades algébricas, corpos algebricamente fechados e espaços afins. Esses conceitos desempenharam um papel muito importante na análise do Teorema dos Zeros de Hilbert, permitindo uma boa compreensão de suas implicações na Geometria Algébrica.

Esse trabalho foi conduzido no contexto de uma iniciação científica e resultou em uma contribuição significativa para formação acadêmica da discente. Os resultados obtidos ampliam sua compreensão teórica e prática desse teorema, abrindo oportunidades para futuras pesquisas na área.

Referências

ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1969. Citado na página 1.

BORGES, H.; TENGAN, E. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. Citado na página 1.

FULTON, W. *Algebraic Curves: An introduction to algebraic geometry*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 2008. Citado na página 1.

Aplicando Equações Diferenciais: Lei Do Resfriamento De Newton

Aplicando Equações Diferenciais: Lei do Resfriamento de Newton

Érick Emanuel Teixeira da Silva¹ - erick.emmanuel@estudante.ufcg.edu.br

Álison Santos Medeiros¹ - alisson.santos@estudante.ufcg.edu.br

Natanael Souza Costa¹ - natanael.souza@estudante.ufcg.edu.br

Márcia Cristina Silva Brito¹ - marciacs@ufcg.edu.br

Maria Gisélia Vasconcelos¹ - giseliam@ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Primeiramente as equações diferenciais foram aplicadas às ciências físicas, e mais tarde estendida a outras áreas, abrangendo desde a engenharia e a biologia, como também os negócios, a história, os esportes e as artes por exemplo. Muitos princípios que regem o comportamento do mundo físico são relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são chamadas de Equações Diferenciais. O estudo das equações diferenciais teve início no século XVII através do matemático e filósofo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) e do físico inglês Isaac Newton (1642–1727), que juntos fundamentaram as bases do cálculo diferencial e integral. Newton, foi o cocriador das equações diferenciais e as utilizou para mostrar que a força que mantém a lua em sua órbita é a mesma que causa a queda dos objetos no chão. Utilizaremos um tipo simples de equações diferenciais que são as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem que servem de modelo para diversos tipos de problemas. Abordaremos a modelagem da Lei do Resfriamento de Newton.

Palavras-chave: Lei do Resfriamento de Newton; Aplicação de EDO; Modelagem Matemática.

1. Introdução

Para estudo do tema e desenvolvimento deste trabalho utilizamos a pesquisa exploratória, pois trata-se de um estudo baseado nas referências (BASSANEZI; JR., 1988), (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020), (BRAUN, 1992), (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012) e (ZILL, 2016). Nas referências citadas, o leitor pode encontrar as demonstrações dos resultados omitidos neste trabalho.

Muitos problemas importantes que surgem em diversas áreas, são formulados por equações que envolvem a derivada de uma função desconhecida.

Uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida é chamada **Equação Diferencial**.

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem são da forma $F(x, y, y') = 0$, mas geralmente pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Existem em geral muitas soluções de uma equação diferencial de primeira ordem.

Todas as soluções possíveis de uma equação diferencial é chamada de **solução geral**.

A representação geométrica da solução geral é uma família infinita de curvas, chamadas de **curvas integrais**.

Cada curva integral está associada a um valor particular de c e é o gráfico da solução correspondente aquele valor particular de c . Satisfazer uma condição inicial significa identificar a curva integral que contém o ponto inicial dado.



Definição 1. Um problema de valor inicial de uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal é dado por

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Uma **solução** φ deste problema de valor inicial é uma solução da equação $y' = f(x, y)$ (i.e., $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$) que também satisfaz a condição inicial (i.e., $\varphi(x_0) = y_0$).

As condições suficientes para a existência de uma solução única de uma equação diferencial de primeira ordem são definidas pelo teorema a seguir, também chamado de Teorema de Picard.

Teorema 1 (O Teorema de Existência e Unicidade de Cauchy).¹

Se o campo vetorial $f(x, y)$ é contínuo com relação a x e y em algum retângulo $\{(x, y) \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$, se a derivada parcial de f com relação a y existe e é contínua e se (x_0, y_0) é um ponto dentro deste retângulo, então existe um $\epsilon > 0$ e uma única função φ definida em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ que é uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Uma classe simples de equações diferenciais de primeira ordem que podem ser resolvida usando a integração é a de **equações separáveis**.

Definição 2 (Equação Separável).

Se o lado direito da equação

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

puder ser expresso como uma função $g(x)$ que depende apenas de x multiplicada por uma função $p(y)$ que depende apenas de y , então a equação é chamada de **separável**².

Métodos para solução de equações separáveis

Para resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot p(y)$$

multiplique por dx e por $h(y) = \frac{1}{p(y)}$ para obter

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Depois integre os dois lados

$$\begin{aligned} \int h(y)dy &= \int g(x)dx \\ H(y) &= G(x) + c \end{aligned}$$

onde mesclamos as duas constantes de integração em um único símbolo c .

A equação $H(y) = G(x) + c$ dá uma solução implícita para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot p(y)$.

¹Este resultado é também chamado de Teorema de Picard. Embora a contribuição de Picard tenha ocorrido depois do trabalho de Cauchy, Picard foi o primeiro a estabelecer uma ligação desse teorema com o método das aproximações sucessivas.

²Um procedimento para resolver equações separáveis foi descoberto implicitamente por Gottfried Leibniz em 1691. A técnica explícita chamada separação de variáveis foi formalizada por John Bernoulli em 1694.

2. Metodologia

No ano de 1701, Newton publicou anonimamente um artigo intitulado "Scala Graduum Caloris", onde descreve um método para medir temperaturas de até 1000°C , algo impossível aos termômetros da época.

O método era fundamentado no que atualmente recebeu o nome de "Lei do Resfriamento de Newton" que afirma que a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio circundante.

2.1 Modelo Matemático da Lei do Resfriamento de Newton

Como modelo matemático da lei do Resfriamento de Newton depende do tempo, no que se segue, utilizaremos t como variável independente.

Lei do Resfriamento de Newton

Entre dois corpos em contato existe transferência de calor por condução, do corpo mais quente para o mais frio. Se a temperatura do objeto em qualquer instante é $T(t)$ e a temperatura do meio ambiente é $T_m(t)$, o aumento da temperatura do objeto em qualquer instante será diretamente proporcional à diferença de temperatura com o meio ambiente

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m(t) - T(t))$$

onde k é uma constante de condução térmica.

Esta equação é uma equação linear que pode ser facilmente resolvida uma vez conhecida a temperatura do meio $T_m(t)$. O caso mais simples é quando a temperatura do meio ambiente é constante, nesse caso a equação $\frac{dT}{dt} = k(T_m - T(t))$ é de variáveis separáveis.

Trataremos aqui da Lei do Resfriamento de Newton, quando a temperatura do meio ambiente T_m é constante.

Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente na temperatura T , tende aquela do meio que o cerca T_m . Assim, se a temperatura $T < T_m$, este corpo se aquecerá e, caso contrário, se resfriará. A temperatura do corpo considerada uniforme, será pois uma função de tempo $T = T(t)$. Verifica-se experimentalmente que quanto maior for o valor $|T - T_m|$ mais rápida será a variação de $T(t)$.

Assim,

$$\frac{dT}{dt} = k(T_m - T(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T_m - T(t)} = k dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dT}{T_m - T} = \int k dt + C$$

E portanto,

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

onde $k > 0$ e T_0 é a temperatura inicial. A temperatura do objeto aproxima-se assintoticamente à temperatura do meio.

3. Resultado e discussão

Consideremos o problema a seguir, que foi encontrado, em parte, em (BASSANEZI; JR., 1988).

Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. A temperatura do escritório era de $20^{\circ}C$. Quando a polícia chega, duas horas depois da chamada, examina o cadáver e mede a sua temperatura, achando $35^{\circ}C$. Uma hora depois, mediu novamente, obtendo $34,2^{\circ}C$, e o detetive prende a secretária. Por quê?

Análise do Problema: Estamos considerando que a temperatura normal de uma pessoa seja contante e igual $36,5^{\circ}C$.

Seja $T(t)$ a temperatura do corpo da vítima no instante t (t em horas). Assim, sabemos que $T(0) = 36,5^{\circ}C$, $T(t_1) = 35^{\circ}C$ e $T(t_1 + 1) = 34,2^{\circ}C$, onde t_1 é o tempo decorrido desde o instante da morte. Quando a polícia chegou, temperatura do escritório era de $T_m = 20^{\circ}C$.

A equação do resfriamento para este caso é,

$$T(t) = 20 + (36,5 - 20)e^{-kt}$$

Temos então que,

$$\begin{aligned} 35 &= 20 + 16,5e^{-kt_1} &\Rightarrow & \frac{15}{16,5} = e^{-kt_1} \\ 34,2 &= 20 + 16,5e^{-k(t_1+1)} &\Rightarrow & \frac{14,2}{16,5} = e^{-k(t_1+1)} \end{aligned}$$

Donde obtemos que,

$$\frac{15}{e^{-kt_1}} = \frac{14,2}{e^{-k(t_1+1)}} \Rightarrow \frac{15}{14,2} = \frac{1}{e^{-k}} \Rightarrow e^k \cong 1,056338 \Rightarrow k \cong 0,05481$$

$$\text{Portanto, } t_1 = \frac{-\ln\left(\frac{15}{16,5}\right)}{k} \Rightarrow t_1 \cong 1,73892h.$$

Podemos concluir, então que o assassinato ocorreu há 1h, 44 minutos e 20 segundos antes da polícia chegar. Portanto, quando a secretária telefonou, seu chefe ainda estava vivo.

No modelo matemático, a temperatura do corpo só atinge a temperatura ambiente T_m no limite quando $t \rightarrow \infty$. Na realidade, entretanto, a temperatura ambiente é atingida num tempo finito.

Podemos encontrar o tempo necessário t_{∞} para que T atinja 99% de T_m . Em termos matemático, isto significa que se o erro relativo for de menor ou igual a 1%, podemos considerar T como sendo igual a T_m . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{99}{100}T_m &= T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt_{\infty}} &\Rightarrow & e^{-kt_{\infty}} = \left| \frac{1}{100} \cdot \frac{T_m}{T_m - T_0} \right| \\ -kt_{\infty} &= \ln \left| \frac{T_m}{100(T_m - T_0)} \right| &\Rightarrow & t_{\infty} = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{100(T_m - T_0)}{T_m} \right| \end{aligned}$$

Este é um problema de ficção policial muito interessante e realmente impossível, pois os dados colhidos pelo legista estão completamente fora da realidade, uma vez que neste caso, o tempo necessário para o corpo atingir a temperatura de $19,8^{\circ}C$ (equivalente a 99% da temperatura ambiente) seria $t_{\infty} = 80,5h$, quando o valor normal para t_{∞} é aproximadamente $6h$.

Concluindo que, *nem sempre um problema com respostas convincentes está baseados em dados reais.*

Pergunta: Quais seriam as medidas corretas obtidas pelo legista para termos uma melhor aproximação da realidade?

Tomando $t_{\infty} = 6h$ na fórmula $t_{\infty} = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{100(T_m - T_0)}{T_m} \right|$, obtemos

$$6 = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{100(20 - 36,5)}{20} \right| \Rightarrow k \cong 0,7354664$$

Se quisermos $t_1 = 1,73892h$, fazemos

$$\begin{aligned} T(t_1) &= 16,5 \cdot e^{-0,7354664 \cdot 1,73892} + 20 \cong 24,6^{\circ}C \\ T(t_1 + 1) &= 16,5 \cdot e^{-0,7354664 \cdot 2,73892} + 20 \cong 22,2^{\circ}C \end{aligned}$$

Por outro lado, *nem sempre um problema com dados convenientes é real.*

Agora, suponha que o indivíduo assassinado estivesse com febre quando morreu. Seria ainda possível descobrir o instante "exato" de sua morte?

Não seria possível concluir o instante "exato" de sua morte pois, precisamos da temperatura do corpo do indivíduo no instante da morte.

□

4. Conclusões

As equações diferenciais podem ser utilizadas em áreas de conhecimentos diversos como, a Física, a Química, a Biologia, a Arte, a História, dentre outras, para resolver problemas de situações diárias. Quando um cientista florense se depara com uma vítima, seja ela de homicídio ou de morte natural, é importante estimar o instante em que o óbito aconteceu. O que mostra ser as equações diferenciais uma ferramenta importante ao cientista florense.

Agradecimentos

Agradecemos as Professoras Gisélia e Márcia, pela disponibilidade de montar um Seminário de Estudo, que visa a melhoria dos nossos conhecimentos na área de matemática.

Referências

- BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo.: Editora Harbra Ltda, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 4.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro.: 11. ed. LTC, 2020. Citado na página 1.
- BRAUN, M. *Differential Equations and Their Applications*. New York: 4th ed. Springer, 1992. Citado na página 1.
- NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*. São Paulo: 8th ed Pearson, 2012. Citado na página 1.
- ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo: 3. ed Cengage Learning, 2016. Citado na página 1.

Fórmulas De Frenet Para Curvas Espaciais

Fórmulas de Frenet para Curvas Espaciais

Luciana Karla Silva Cavalcanti¹ - luciana.karla@estudante.ufcg.edu.br

Maria Nazaré Dantas de Sousa¹ - maria.nazare@estudante.ufcg.edu.br

Márcia Cristina Silva Brito¹ - marciacsb@ufcg.edu.br

Maria Gisélia Vasconcelos¹ - giselia@ufcg.edu.br

¹ Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde - Cuité, PB, Brasil

Resumo: Um dos métodos mais eficientes para resolver problemas em geometria consiste na escolha de um sistema de coordenadas adaptado ao problema. Aqui vamos apresentar um sistema de coordenadas natural para o estudo de curvas. De início, foram apresentadas algumas definições básicas, muito importantes para o estudo das curvas espaciais, e a partir disso, definiremos as fórmulas de Frenet no espaço, que são um sistema de coordenadas natural para o estudo de curvas. As fórmulas de Frenet descrevem as propriedades de uma partícula que se move ao longo de uma curva contínua e diferenciável, independentemente do movimento no espaço euclidiano.

Palavras-chave: Curvas; Fórmulas de Frenet; Curvas Espaciais.

1. Introdução

Um dos métodos mais eficientes para resolver problemas em geometria consiste na escolha de um sistema de coordenadas adaptado ao problema. O matemático e astrônomo francês Jean Frédéric Frenet (1816 - 1900), descobriu, independentemente do seu compatriota Joseph Alfred Serret as hoje chamadas fórmulas de Frenet-Serret das curvas (planas e espaciais), que nos fornece um sistema de coordenadas natural para o estudo de curvas. As fórmulas de Frenet descrevem as propriedades de uma partícula que se move ao longo de uma curva contínua e diferenciável ou as propriedades geométricas da própria curva, independentemente do movimento no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Para estudo do tema e desenvolvimento deste trabalho utilizamos a pesquisa exploratória, pois trata-se de um estudo baseado nas referências (CARMO, 2005), (TENENBLAT, 2008).

As demonstrações dos resultados desta seção serão omitidos, caso contrário, estenderia o trabalho, mas as mesmas são encontradas na nossa principal referência (CARMO, 2005).

Definição 1. Uma *curva parametrizada diferencial* em \mathbb{R}^3 é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida no intervalo aberto $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. A variável $t \in I$ é o *parâmetro da curva* e o subconjunto de \mathbb{R}^3 formado pelo os pontos $\alpha(t)$, $t \in I$, é o *traço da curva* α .

Uma curva parametrizada diferencial $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é *plana* se existe um plano π de \mathbb{R}^3 tal que $\alpha(I) \subseteq \pi$.

Definição 2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva parametrizada diferenciável.

- O *vetor tangente* (ou *vetor velocidade*) a α em t é o vetor $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.
- A curva α é *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.
- A *reta tangente* r à curva α em $t_0 \in I$ é a reta que passa por $\alpha(t_0)$ e é paralela ao vetor $\alpha'(t_0)$, isto é,

$$r = \{\alpha(t_0) + \lambda\alpha'(t_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

A reta tangente é essencial para o desenvolvimento da geometria diferencial das curvas.

Quando α é regular em todos os pontos $t \in I$, dizemos que α é uma *curva parametrizada diferenciável regular*.

Definição 3. A *orientação de uma curva regular* α é o sentido de percurso do traço de α .



Definição 4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada diferencial regular, a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du.$$

é chamada *função comprimento de arco da curva a partir de t_0* onde $t_0 \in I$.

Temos que $\|\alpha'(u)\| = \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2 + (z'(u))^2}$ é o comprimento do vetor $\alpha'(s)$.

Definição 5. Dizemos que uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está *parametrizada pelo o comprimento de arco* se

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(u)\| du = t_1 - t_0$$

para todos $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$. Isto é, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$.

Proposição 1. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$.

2. Metodologia

2.1 As Fórmulas de Frenet

De agora em diante vamos considerar curvas parametrizada pelo o comprimento de arco.

Seja $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, uma curva parametrizada pelo o comprimento de arco.

Para cada $s \in I$, o vetor $\alpha'(s)$ é um vetor unitário e será designado por $T(s)$, isto é,

$$T(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)).$$

Como $\|T(s)\| = 1$, o módulo da derivada $\|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$ mede a maneira do quão rápido uma curva se afasta em uma vizinhança de $s \in I$, da tangente em s .

Definição 6. Se $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então a *curvatura de α em $s \in I$* é o número real

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Como $\langle T(s), T(s) \rangle = 1$, temos que $\langle T'(s), T(s) \rangle = 0$, ou seja, $T'(s)$ é ortogonal a $T(s)$. Portanto, nos pontos $s \in I$ onde $\kappa(s) \neq 0$, isto é, $\alpha''(s) \neq 0$, podemos definir um vetor unitário na direção o de $\alpha''(s)$ da seguinte maneira

Definição 7. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e tal que $\kappa(s) > 0$. O vetor

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$$

é denominado *vetor normal* a α em s .

Temos que $N(s)$ é normal a $T(s)$. O plano determinado por $T(s)$ e $N(s)$ é chamado de *plano osculador* em s .

Se $\kappa(s) = 0$, o vetor normal, e portanto o plano osculador, não está definido. Para prosseguir a análise local das curvas, necessitamos, de uma maneira essencial, do plano osculador.

No que segue, nos restringiremos às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$.

Sendo $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$, segue que $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$.

Curvas espaciais não podem ser caracterizadas apenas pela curvatura. Além da mudança de direção do vetor tangente, o plano formado pelos vetores tangente e normal também muda de direção. Para medir a mudança na direção deste plano consideramos o vetor normal a este plano.

Vamos definir um terceiro vetor que junto com \mathbf{T} e \mathbf{N} formam uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 .

Definição 8. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos o **vetor binormal** a α em s por*

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s).$$

Os vetores $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ formam um referencial ortonormal em \mathbb{R}^3 , chamado o **triedro de Frenet** de α em s .

Segue imediatamente que $\mathbf{T}(s) = \mathbf{N}(s) \times \mathbf{B}(s)$ e $\mathbf{N}(s) = \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s)$.

Proposição 2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O vetor $\mathbf{B}'(s)$ é ortogonal ao vetor tangente $\mathbf{T}(s)$ e ao vetor binormal $\mathbf{B}(s)$. Em particular, $\mathbf{B}'(s)$ é paralelo ao vetor normal $\mathbf{N}(s)$.*

Demonstração. O vetor $\mathbf{B}'(s)$ é paralelo ao vetor normal $\mathbf{N}(s)$.

De fato, derivando $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$, obtemos:

$$\mathbf{B}'(s) = \mathbf{T}'(s) \times \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}'(s),$$

pois $\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$. Portanto, $\mathbf{B}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{T}(s)$.

Como $\langle \mathbf{B}(s), \mathbf{B}(s) \rangle = \|\mathbf{B}(s)\|^2 = 1$, temos que $\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{B}(s) \rangle = 0$, ou seja, $\mathbf{B}'(s)$ é ortogonal a $\mathbf{B}(s)$.

Logo, $\mathbf{B}'(s)$ é paralelo a $\mathbf{N}(s)$, isto é, $\mathbf{B}'(s)$ é igual ao produto de $\mathbf{N}(s)$ por um número real.

□

Definição 9. *O número real $\tau(s)$ definido por*

$$\mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s)$$

*é denominado **torção da curva** α em s .*

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$.

Como o referencial de Frenet da curva α em s , $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$, é uma base ortogonal de \mathbb{R}^3 , podemos escrever os vetores $\mathbf{T}'(s)$, $\mathbf{N}'(s)$ e $\mathbf{B}'(s)$ como combinação linear de $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$.

Já vimos que

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s) \quad e \quad \mathbf{B}'(s) = \tau(s)\mathbf{N}(s).$$

Vamos obter agora a expressão de $\mathbf{N}'(s)$ como combinação linear de $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$.

Como $\mathbf{N}(s) = \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}(s)$, derivando temos

$$\begin{aligned}\mathbf{N}'(s) &= \mathbf{B}'(s) \times \mathbf{T}(s) + \mathbf{B}(s) \times \mathbf{T}'(s) \\ &= \tau(s)\mathbf{N}(s) \times \mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s) \times \mathbf{N}(s) \\ &= -\tau(s)\mathbf{B}(s) - \kappa(s)\mathbf{T}(s),\end{aligned}$$

pois $\mathbf{B}(s) = -\mathbf{N}(s) \times \mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{T}(s) = -\mathbf{B}(s) \times \mathbf{N}(s)$.

Temos então provado o seguinte resultado.

Proposição 3 (Fórmulas de Frenet para Curvas Espaciais). *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco tal que κ nunca se anula. Então*

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{T}(s) - \tau(s)\mathbf{B}(s) \\ \mathbf{B}'(s) &= \tau(s)\mathbf{N}(s)\end{aligned}$$

As fórmulas de Frenet mostram de que forma os vetores $\mathbf{T}'(s)$, $\mathbf{N}'(s)$ e $\mathbf{B}'(s)$ se escrevem como combinações lineares dos vetores $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$ do triedro de Frenet.

3. Resultado e discussão

O próximo resultado mostra como a torção mede o quanto uma curva deixa de ser plana.

Proposição 4. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\kappa(s) > 0$ para todo $s \in I$. Então, α é uma curva plana se e somente se $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$.*

Demonstração.

(\Rightarrow) Seja v um vetor normal unitário ao plano que contém o traço de α , isto é,

$$\pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), v \rangle = 0\}$$

Como $\alpha(I) \subset \pi$, temos que $\langle \alpha'(s) - \alpha'(s_0), v \rangle = 0$ para todo $s \in I$.

Derivando, obtemos que $\langle \alpha''(s), v \rangle = 0$, ou seja, $\mathbf{T}(s)$ é ortogonal a v .

Derivando novamente, obtemos que $\langle \alpha'''(s), v \rangle = 0$, ou seja, $\kappa(s)\langle \mathbf{N}(s), v \rangle = 0$. Logo, $\mathbf{N}(s)$ é ortogonal a v , pois $\kappa(s) > 0$.

Assim, $\mathbf{B}(s) = v$ ou $\mathbf{B}(s) = -v$, para todo $s \in I$. Assim, $\mathbf{B}(s)$ é constante, então $\mathbf{B}'(s) = 0$ e portanto,

$$\tau(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = 0, \quad \text{para todo } s \in I$$

(\Leftarrow) Se $\tau(s) = 0$ para todo $s \in I$, temos que $\mathbf{B}'(s) = 0$ para todo $s \in I$.

Sejam $s_0 \in I$ e a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ dada por $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), \mathbf{B}_0 \rangle$, onde $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}(s_0)$ para todo $s \in I$.

Derivando, obtemos $f'(s) = \langle \alpha'(s), \mathbf{B}_0 \rangle = \langle \alpha'(s), \mathbf{B}(s) \rangle = 0$, para todo $s \in I$. Logo, f é constante e igual a zero, pois $f(s_0) = 0$.

Então, $\alpha(I) \subset \pi = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p - \alpha(s_0), \mathbf{B}_0 \rangle = 0\}$. □

Para exemplificar do referencial de Frenet de uma curva, consideremos a **hélice circular**

$$\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b \cdot s}{c} \right)$$

onde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $c > 0$.

Calculemos o referencial de Frenet-Serret da curva $\alpha(s)$, os vetores $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{B}(s)$ e as funções curvatura $\kappa(s)$ e torção $\tau(s)$.

Então, $\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \right)$. Como $|\alpha'(s)| = 1$, temos que $\mathbf{T}(s) = \alpha'(s)$.

Assim,

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{a}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{a}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)} = \left(-\cos\left(\frac{s}{c}\right), -\sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = \left(\frac{b}{c} \sin\left(\frac{s}{c}\right), -\frac{b}{c} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{a}{c} \right)$$

$$\mathbf{B}'(s) = \left(\frac{b}{c^2} \cos\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c^2} \sin\left(\frac{s}{c}\right), 0 \right)$$

$$\tau(s) = \langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle = -\frac{b}{c^2}$$

4. Conclusões

Neste trabalho observamos que, fisicamente podemos pensar em uma curva em \mathbb{R}^3 como sendo obtida a partir de uma reta quando esta é entortada (curvatura) e torcida (torção). Obtemos uma condição necessária e suficiente, para obter a curvatura e torção de uma curva espacial. Com as fórmulas de Frenet, podemos resolver os problemas geométricos envolvendo tais curvas.

Agradecimentos

Agradecemos as Professoras Gisélia e Márcia, pela disponibilidade de trabalhar um Seminário de Estudo, que visa a melhoria dos nossos conhecimentos na área de matemática.

Referências

CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Textos Universitários, SBM, 2005. Citado na página 1.

TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. São Paulo: 2a. Ed. Editora Blucher, 2008. Citado na página 1.

Juros Compostos Como Aplicação De Equações Diferenciais

Juros Compostos como aplicação de Equações Diferenciais

Álison Santos Medeiros¹ - alisson.santos@estudante.ufcg.edu.br
Érick Emanuel Teixeira da Silva¹ - erick.emmanuel@estudante.ufcg.edu.br
Luciana Karla Silva Cavalcanti¹ - luciana.karla@estudante.ufcg.edu.br
Maria Nazaré Dantas de Sousa¹ - maria.nazare@estudante.ufcg.edu.br
Márcia Cristina Silva Brito¹ - marciacs@ufcg.edu.br
Maria Gisélia Vasconcelos¹ - giselia@ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Durante os três últimos séculos o estudo de equações diferenciais tem atraído a atenção dos maiores matemáticos do mundo, sendo uma área de pesquisa dinâmica com muitas questões interessantes em aberto. As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem desempenham um papel essencial na modelagem e análise de fenômenos dinâmicos em diversas áreas do conhecimento. Seu uso é fundamental na compreensão e previsão de sistemas complexos e em constante evolução, permitindo o estudo de variáveis em relação à sua taxa de variação. Uma variedade de problemas nas ciências físicas, na engenharia, na biologia, nos negócios, na história, nos esportes e as artes por exemplo, podem ser resolvidos com equações diferenciais. Utilizaremos as equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem, um tipo simples de equações, que são modelos para diversos tipos de problemas. Abordaremos a modelagem de juros compostos.

Palavras-chave: Aplicação de EDO; Juros Compostos; Modelagem Matemática.

1. Introdução

Para estudo do tema e desenvolvimento deste trabalho utilizamos a pesquisa exploratória, pois trata-se de um estudo baseado nas referências (BASSANEZI, JR., 1988), (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020), (BRAUN, 1992), (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012) e (ZILL, 2016). Nas referências citadas, o leitor pode encontrar as demonstrações dos resultados omitidos neste trabalho.

Muitos problemas importantes que surgem em diversas áreas, são formulados por equações que envolvem a derivada de uma função desconhecida.

Uma equação que envolve derivadas de uma função desconhecida é chamada **Equação Diferencial**.

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem são da forma $F(x, y, y') = 0$, mas geralmente pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Existem em geral muitas soluções de uma equação diferencial de primeira ordem.

Todas as soluções possíveis de uma equação diferencial é chamada de **solução geral**. A representação geométrica da solução geral é uma família infinita de curvas, chamadas de **curvas integrais**. Cada curva integral está associada a um valor particular de c e é o gráfico da solução correspondente a esse valor particular de c . Satisfazer uma condição inicial significa identificar a curva integral que contém o ponto inicial dado.

Definição 1. Um problema de valor inicial de uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal é dado por

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Uma **solução** φ deste problema de valor inicial é uma solução da equação $y' = f(x, y)$ (i.e., $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$) que também satisfaz a condição inicial (i.e., $\varphi(x_0) = y_0$).

As condições suficientes para a existência de uma solução única de uma equação diferencial de primeira ordem são definidas pelo teorema a seguir, também chamado de Teorema de Picard.

Teorema 1 (O Teorema de Existência e Unicidade de Cauchy).¹

Se o campo vetorial $f(x, y)$ é contínuo com relação a x e y em algum retângulo $\{(x, y) \mid x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$, se a derivada parcial de f com relação a y existe e é contínua e se (x_0, y_0) é um ponto dentro deste retângulo, então existe um $\epsilon > 0$ e uma única função φ definida em $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ que é uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

2. Metodologia

Como os problemas que podem ser modelado por equações diferenciais em geral dependem do tempo, no que se segue, utilizaremos t como variável independente.

Um tipo de equação diferencial de primeira ordem que ocorre com frequência nas aplicações é a equação linear.

Uma **equação diferencial ordinária linear de primeira ordem** é uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = b(t)$$

onde $a_1(t)$, $a_0(t)$ e $b(t)$ dependem apenas da variável independente t e não de y .

Colocando a equação na forma padrão, temos

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

Métodos para resolver de equações lineares

1. Escreva a equação na forma padrão

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

2. Calcule o fator integrante $\mu(t)$ pela formula

$$\mu(t) = \exp \left[\int p(t) dt \right]$$

¹Este resultado é também chamado de Teorema de Picard. Embora a contribuição de Picard tenha ocorrido depois do trabalho de Cauchy, Picard foi o primeiro a estabelecer uma ligação desse teorema com o método das aproximações sucessivas.

3. Multiplique a equação na forma padrão por $\mu(t)$

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t)$$

a função $\mu(t)$ foi escolhida de modo que $\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \frac{d}{dt} [\mu(t)y]$ e temos que

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)q(t)$$

4. Integre a equação $\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)q(t)$ e solucione para y dividindo por $\mu(t)$, para obter

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t)q(t)dt + c \right]$$

onde c é uma constante arbitrária.

3. Resultado e discussão

Para a presente discussão, consideremos um problema encontrado em (BOYCE; DIPRIMA; MEADE, 2020).

3.1 Modelo Matemático de Juros Compostos

As aplicações financeiras baseadas em juros compostos podem ser modeladas por uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem.

Juros Compostos sobre capital com depósito único

Suponha que um capital S_0 seja depositado em um banco, que paga juros a uma taxa anual r , capitalizados continuamente. O valor $S(t)$ do investimento em qualquer instante t depende tanto da frequência da capitalização dos juros quanto da taxa de juros.

Considerando que a capitalização é contínua, podemos modelar o problema do seguinte modo.

Seja $S(t)$ o valor do investimento atual. Sendo a taxa de variação do investimento proporcional a taxa de juros multiplicada pelo investimento atual, temos que a equação diferencial que modela o processo tem a forma

$$\frac{dS}{dt} = rS(t)$$

onde r é a constante que representa a taxa de juro.

Temos que a equação diferencial $\frac{dS}{dt} = rS$ é linear e separável. Assim,

$$\frac{dS}{dt} = rS \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{S} = rdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dS}{S} = \int rdt + c$$

E portanto,

$$S(t) = k \cdot e^{rt}$$

onde $k = e^c$ é a constante positiva.

Se conhecemos o valor do investimento inicial, o qual denotaremos por S_0 , isto é, no instante $t = 0$, temos que constante k é dada por $k = S(0) = S_0$.

Portanto, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

Como a equação diferencial é linear e separável o problema de valor inicial é facilmente resolvido, e tem solução

$$S(t) = S_0 \cdot e^{rt}$$

Esta equação representa o montante $S(t)$ após a aplicação de um capital S_0 a uma taxa de juros constante r por um período de tempo t .

Assim, um investimento com juros capitalizados continuamente cresce de forma exponencial.

Este problemas de valor inicial e a sua solução também podem ser usados para analisar muitas outras situações financeiras.

Exemplo 1. *Seja S_0 o montante aplicado em um banco que paga uma taxa de juros anual $r = 11,55\%$, capitalizados continuamente. Em quanto tempo o montante aplicado dobra de valor, em função da taxa de juros r .*

Considerando a capitalização contínua, temos o problema

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

Cuja solução, sabemos ser $S(t) = S_0 \cdot e^{rt}$.

Com a solução obtida, podemos calcular o tempo que um capital aplicado a uma taxa r leva para dobrar de valor, isto é, $S(t) = 2S_0$. Então podemos escrever, $2S_0 = S_0 \cdot e^{rt}$, donde

$$e^{rt} = 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{r}$$

Sendo $r = 11,55\%$ ao ano, podemos determinar em quanto tempo a aplicação dobra de valor.

Temos que $r = 11,55\% = 0,1155$ e sabemos que $t = \frac{\ln 2}{r}$. Assim, $t = \frac{\ln 2}{0,1155} = \frac{0,693}{0,1155} = 6$.

Portanto, a soma originalmente aplicada a uma taxa anual de $11,55\%$ de juros, dobra de valor em 6 anos.

Podemos também, através da equação $t = \frac{\ln 2}{r}$, determinar a taxa de juros r necessária para que um investimento inicial S_0 dobre seu valor por exemplo, em dez anos.

Juros Compostos sobre capital com depósitos ou retiradas

O problema de juros compostos sobre capital com depósito único pode ser facilmente estendido a situação envolvendo depósitos ou retiradas.

Suponha que uma pessoa, sem capital inicial, investe k reais, a uma taxa de juros r . Admitindo que o investimento seja feito continuamente e que os juros sejam capitalizados também continuamente, tem-se que a taxa de crescimento do montante $S(t)$ é dada por $\frac{dS}{dt} = rS$.

Como a capitalização é contínua, imaginando que além dos rendimentos dos juros existam depósitos, ou retiradas, e que esses depósitos ou retiradas ocorram a uma taxa constante k , (onde k é positiva no caso de depósito e negativa no caso de retiradas), temos que a equação agora tem a forma

$$\frac{dS}{dt} = rS + k$$

Esta equação é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem, que na forma padrão é

$$\frac{dS}{dt} - rS = k$$

Assim, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} - rS = k \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

tem solução dada por

$$S(t) = -\frac{k}{r} + \left(S_0 + \frac{k}{r}\right)e^{rt}$$

Assim, o saldo ou montante $S(t)$ em qualquer instante t é

$$S(t) = \frac{k}{r}(e^{rt} - 1) + S_0e^{rt}$$

4. Conclusões

As instituições financeiras têm políticas variadas em relação a capitalização. Em algumas, a capitalização é mensal, em outras é semanal, e algumas a capitalização é diária. Observamos que o conhecimento de um investidor sobre equações diferenciais possibilita a comparação entre os investimentos, fazendo com que ele possa optar pelo investimento que melhor satisfaz as suas necessidades.

Agradecimentos

Agradecemos as Professoras Gisélia e Márcia, pela disponibilidade de montar um Seminário de Estudo, que visa a melhoria dos nossos conhecimentos na área de matemática.

Referências

BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo.: Editora Harbra Ltda, 1988. Citado na página 1.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro.: 11. ed. LTC, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 3.

BRAUN, M. *Differential Equations and Their Applications*. New York: 4th ed. Springer, 1992. Citado na página 1.

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*. São Paulo: 8th ed Pearson, 2012. Citado na página 1.

ZILL, D. G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo: 3. ed Cengage Learning, 2016. Citado na página 1.

Aplicando Diagonalização De Matrizes A Classificação De Cônicas

Aplicando Diagonalização de matrizes a Classificação de Cônicas

Maria Nazaré Dantas de Sousa¹ - maria.nazare@estudante.ufcg.edu.br
Luciana Karla Silva Cavalcanti¹ - luciana.karla@estudante.ufcg.edu.br
Érick Emanuel Teixeira da Silva¹ - erick.emmanuel@estudante.ufcg.edu.br
Álison Santos Medeiros¹ - alisson.santos@estudante.ufcg.edu.br
Márcia Cristina Silva Brito¹ - marciacs@ufcg.edu.br
Maria Gisélia Vasconcelos¹ - giselia@ufcg.edu.br

¹ Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde - Cuité, PB, Brasil

Resumo: Este poster trata do reconhecimento de cônicas utilizando o método de diagonalização de matrizes 2×2 . A equação de uma cônica na posição padrão não possui o termo em xy (chamado de termo cruzado). A presença do termo cruzado na equação indica que a cônica saiu da posição padrão devido a uma rotação. O problema de identificar tais cônicas se reduz a encontrar um sistema de coordenadas mais apropriado, em que a equação do segundo grau tem a forma mais simples possível e permite a identificação imediata da curva através da comparação com equações modelos. Para identificar a cônica não degenerada cujo gráfico não está na posição padrão e cuja equação apresenta o termo cruzado, realiza-se uma rotação ou mudança de sistema de coordenadas, através de mudança de base, da canônica para uma base de autovetores ortonormais.

Palavras-chave: Diagonalização; Operador simétrico; Teorema Espectral para matrizes; Cônicas.

1. Introdução

A Álgebra Linear é, conforme sabemos, uma ferramenta matemática de extrema importância. Seus resultados apresentam muitas aplicações em diferentes áreas da matemática, física, engenharia, administração, computação, entre outras. Vamos utilizar a diagonalização, por meio dos autovalores para simplificar o trabalho com as cônicas. Para que a leitura posterior deste trabalho seja feita de maneira mais rápida, decidimos expor aqui os conceitos básicos que serão usados neste trabalho. Tais definições, proposições, lemas e teoremas podem ser encontrados em (LIMA, 2012), (COELHO; LOURENÇO, 2013) e (PERES, 2014).

2. Metodologia

Este trabalho é fruto de uma pesquisa bibliográfica motivada pela curiosidade sobre o tema, que através de discussões com o orientador e a apresentação de seminários possibilitou a sua construção.

Definição 1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear num espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} , de dimensão finita n . Um número $\lambda \in \mathbb{K}$ será dito um **autovalor** de T se existir um vetor não nulo v em V tal que $T(v) = \lambda v$. O vetor v é chamado de **autovetor** de T associado a λ .

Definição 2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo \mathbb{K} e B uma base de V . O **polinômio característico** de um operador $T : V \rightarrow V$ é por definição o polinômio de grau n em λ sobre o corpo \mathbb{K} dado por $P_T(\lambda) = \det([T - \lambda I_n]_B)$.

Os autovetores de T são as raízes de seu polinômio característico.

Teorema 1. Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Corolário 1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se $\dim V = n$ e T possui n autovalores distintos, então V possui uma base formada de autovetores de T .

Uma matriz B é dita **semelhante a uma matriz A** se existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Diremos que uma matriz A é diagonalizável se ela for semelhante a uma matriz diagonal.

Proposição 1. Matrizes semelhantes têm os mesmos autovalores.

Definição 3. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo \mathbb{K} e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que T é um **operador diagonalizável** se existir uma base de V cujos elementos são autovetores de T .

Teorema 2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo \mathbb{K} e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dada uma base B de V , temos que T é diagonalizável se, e somente se, $[T]_B$ é semelhante a uma matriz diagonal D . Isto é, T é diagonalizável \Leftrightarrow existe um matriz P tal que $P^{-1}[T]_B P = D$.

2.1 Diagonalização de matrizes reais simétricas

Definição 4. Dizemos que uma matriz A é **simétrica** se $A^t = A$. Equivalentemente, $A = [a_{ij}]$ é simétrica se seus elementos simétricos em relação a diagonal principal forem iguais, isto é, se $a_{ij} = a_{ji}$, para cada ij .

Teorema 3. Se A é uma matriz real simétrica, então cada raiz λ do polinômio característico de A é real.

Teorema 4. Sejam A uma matriz real simétrica de ordem 2 e u e v autovetores de A associados a autovalores distintos λ_1 e λ_2 . Então u e v são ortogonais, isto é, $\langle u, v \rangle = 0$.

Definição 5. Uma matriz real P é **ortogonal** se $P^t = P^{-1}$, ou seja, se $PP^t = P^t P = I$.

Definição 6. Dizemos que uma matriz real A é **ortogonalmente diagonalizável**, se existe uma matriz ortogonal P tal que $P^t A P$ é diagonal.

Teorema 5. Uma matriz quadrada de ordem 2 é ortogonal se, e somente se, seus vetores coluna formam uma base ortonormal.

O resultado a seguir é uma consequência direta dos teoremas 2, 5 e 4.

Corolário 2 (Teorema Espectral para matrizes simétricas). Se A é uma matriz real simétrica de ordem 2, então existe um matriz ortogonal P , tal que $P^t A P$ é diagonal. Ou seja, toda matriz real simétrica de ordem 2 é ortogonalmente diagonalizável.

3. Resultado e discussão

3.1 Identificação das Cônicas

Vamos definir forma quadrática e estudar o processo para sua ortogonalização, visto que precisaremos desse procedimento para identificação das cônicas.

Definição 7 (Forma quadrática). Uma função $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^t A X$ onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e A é uma matriz simétrica com entradas de números reais é chamada de **forma quadrática real nas variáveis** x_1, x_2, \dots, x_n .

Teorema 6 (Teorema dos Eixos Principais). Qualquer forma quadrática em n variáveis $Q(X) = X^t A X$ é equivalente por meio de uma matriz ortogonal P a uma forma quadrática do tipo:

$$H(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

onde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz A que define a forma quadrática Q .

Para tratar das cônicas no plano de forma adequada procederemos estudando figuras padrão e, através da diagonalização de formas quadráticas associadas, mostraremos que as equações representam uma dessas figuras padrão centrada, possivelmente, em outro referencial.

Definição 8 (Cônica). Uma *cônica* em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos no plano cujas coordenadas em relação à base canônica, satisfazem à equação quadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

onde a, b e c não são nulos.

Observe que a equação da cônica envolve uma forma quádrlica no plano $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, uma forma linear, $L(x, y) = dx + ey$, e um termo constante f .

Isto é, a equação que define a cônica é dada por:

$$Q(x, y) + L(x, y) + f = 0$$

O gráfico da equação (1) é uma seção cônica, uma curva assim nomeada, porque é produzida pela interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas.

Abaixo, apresentamos os exemplos típicos de cônicas em \mathbb{R}^2 .

Equação		Cônica
$x^2 + y^2 = r^2$	$a = c = 1, b = d = e = 0, f = -r^2$	Circunferência de raio r
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$	$a = \frac{1}{\alpha^2}, c = \frac{1}{\beta^2}, \alpha > 0, \beta > 0, b = d = e = 0, f = -1$	Elipse
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$	$a = \frac{1}{\alpha^2}, c = -\frac{1}{\beta^2}, \alpha > 0, \beta > 0, b = d = e = 0, f = -1$	Hipérbole
$y^2 - dx = 0$	$c = 1, a = b = e = f = 0, d \neq 0$	Parábola
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$	$a, b > 0$ cuja a solução $y = \pm \frac{b}{a}x$	Retas concorrentes
$ax^2 - b = 0,$	$a, b > 0$ cuja a solução $x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$	Retas paralelas
$ax^2 = 0,$	$a > 0$ cuja a solução $x = 0$	Reta
$ax^2 + by^2 + F^2 = 0,$		Vazio

As equações das cônicas apresentadas acima estão na “forma reduzida”. Além das cônicas comuns: circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas, podemos ter formas degeneradas desses tipos de cônicas.

Definição 9 (Forma Quadrática Matricial de uma Cônica). Uma forma de classificar o tipo de cônica representada por uma equação $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ é escrevendo essa equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

Podemos escrever a equação geral de uma cônica como

$$X^t AX + BX + fI_1 = 0_{1 \times 1}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

O produto $X^t AX$ é chamado forma quadrática.

3.1.1 Reconhecimento de Cônicas em \mathbb{R}^2

Nossa finalidade é o reconhecimento e análise da equação de uma cônica. Para isso, é necessário eliminar os termos mistos, do tipo xy , através da diagonalização da forma quadrática.

Considere a seguinte equação cônica em coordenadas canônicas de \mathbb{R}^2 ,

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2)$$

1° Escrevemos a equação na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0 \quad (3)$$

2° Diagonalizamos a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, calculamos os autovalores λ_1 e λ_2 , e os autovetores ortonormais u_1 e u_2 da matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

3° Obtemos as novas coordenadas. Para isto, precisamos fazer a seguinte substituição na equação (3):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

onde M é a matriz mudança de base formada pelos autovetores para a base canônica.

4° Substituímos as novas coordenadas na equação (3), obtendo a nova equação na base $\{u_1, u_2\}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \cdot M \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + f = 0$$

a qual é da seguinte forma

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + px_1 + qy_1 + f = 0 \quad (4)$$

com p e q dependentes das coordenadas dos autovetores u_1 e u_2 . Esta equação corresponde à equação cônica dada em (2), porém, nos eixos x_1 e y_1 determinados pela base $\{u_1, u_2\}$.

Note que enquanto a equação (2) apresenta o termo misto em xy , a equação (4) não possui. Assim, na transformação da equação (2) para a (4) ocorreu uma simplificação.

5° Eliminamos os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos.

Completando quadrados e fazendo as mudanças de variável adequadas, temos então dois casos:

Caso 1: ($\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$), temos uma equação de cônica de fácil reconhecimento,

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F \quad (5)$$

A equação (5) é chamada equação reduzida de uma cônica de centro e, o primeiro membro é exatamente a forma quadrática no plano.

Caso 2: Se um dos autovalores for igual a zero, por exemplo, $\lambda_2 = 0$, a equação (4) fica:

$$\lambda_1 X^2 + qY = 0 \quad (6)$$

A equação reduzida (6) é chamada cônica sem centro. Se em lugar de λ_2 tivéssemos feito $\lambda_1 = 0$, a equação reduzida da cônica sem centro seria:

$$\lambda_2 Y^2 + pX = 0.$$

Observe que, em ambos os casos, para obter a equação reduzida de (4) efetuou-se uma nova mudança de coordenadas, que consiste na translação do referencial $x_1 O y_1$ para o referencial $XO'Y$.

3.2 Classificação das cônicas

Estamos interessados somente em classificar a cônica dada pela equação geral.

Dada a matriz A de uma forma quadrática X^tAX cuja forma diagonalizada é dada por

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de A , então podemos classificá-la usando as seguintes regras:

- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ então a equação é de uma parábola ou de uma de suas formas degeneradas (uma reta ou duas retas paralelas);
- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ então a equação é de uma elipse ou de uma de suas formas degeneradas (um ponto ou o vazio);
- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ então a equação é de uma hipérbole ou de sua forma degenerada (duas retas concorrentes).

Exemplo 1. Determine a equação reduzida e a classificação da equação cônica expressa por

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 10x + 20y + 5 = 0$$

Aplicando os procedimentos anteriores, encontramos

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 5 = 0$$

ou seja,

$$20x_1^2 + 5y_1^2 + 10\sqrt{5}y_1 + 5 = 0$$

Efetuada a translação de eixos, obtemos

$$\frac{X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1,$$

implicando em uma Elipse.

4. Conclusões

Dada uma equação cônica, através da diagonalização da forma quadrática associada, obtemos uma base ortonormal de autovetores, é possível simplificar seus termos mistos restantes e, assim possibilitar o seu reconhecimento de maneira mais simples. O procedimento de reconhecimento de cônicas exibidos nesse trabalho, tratou especificamente às equações cônicas com termos mistos, pois equações sem esses termos nos diz que não há necessidade de diagonalização.

Agradecimentos

Agradecemos as Professoras Gisélia e Márcia, pela disponibilidade de montar um Seminário de Estudo, que visa o desenvolvimento de trabalhos de caráter científico na área de matemática.

Referências

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear*. São Paulo: 2. ed. Editora da Universidade de São Paulo, 2013. Citado na página 1.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: 8. ed IMPA, 2012. Citado na página 1.

PERES, E. dos S. *Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica*. Rio de Janeiro: Dissertação(Mestrado profissional em Matemática PROFMAT): Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, p.95, 2014. Citado na página 1.



Um Estudo Sobre A Integral Gaussiana

UM ESTUDO SOBRE A INTEGRAL GAUSSIANA

Giselly Guimarães Gonçalves¹ - gisellyguimagoncalves@gmail.com
Emanuela Régia de Sousa Coelho¹ - emanuelacoelho@servidor.uepb.edu.br

¹Universidade Estadual da Paraíba, Campus I - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: A Integral Gaussiana, como o nome diz, vem da função Gaussiana e é conhecida pela grande aplicabilidade, especialmente, na estatística e pela impossibilidade de ser calculada diretamente pelos métodos convencionais. Nesse trabalho, apresentamos a integral Gaussiana e calculamos seu valor diretamente, de cinco formas distintas. A primeira forma, a mais simples, é dada por coordenadas polares e mais elaborada é uma reprodução do método original, devido a Laplace. As formas seguintes dependem de mais manobras para resolvê-la. Os estudos são baseados no artigo intitulado "The Gaussian Integral" de Keith Conrad.

Palavras-chave: Integral Gaussiana; Fórmula de Euler; Demonstração; Laplace; Coordenadas Polares;

1. Introdução

O presente trabalho é fruto dos estudos para a construção do Trabalho de Conclusão do Curso em Licenciatura em Matemática da primeira autora e tem como proposta apresentar algumas formas de resolução da Integral Gaussiana, definida por $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. Apresentamos cinco formas diferentes de resolvê-la, incluindo a prova original feita por Laplace¹. Para cada prova, vamos indicar referências que apresentem os objetos e resultados utilizados, mas não vamos nos deter neles, uma vez que não é o objetivo do trabalho.

A ideia surgiu após a resolução de uma Equação Diferencial Ordinária, num curso de mesmo nome, que resultava numa integral com essa forma. Ao questionar professores sobre não conseguir resolvê-la, a resposta recebida foi a de que não seria possível resolvê-la com métodos convencionais (por partes, por substituição, entre outros).

A integral gaussiana, como o nome diz, deriva da função gaussiana. De acordo com Lee (s.d.), o primeiro a utilizar um método que calculasse explicitamente o valor da integral foi Laplace, em 1774, no Artigo *Mémoire sur la probabilité des causes par les événements*, mas ela já havia aparecido anteriormente nos trabalhos de De Moivre, a partir de um estudo sobre séries. A integral Gaussiana é usada em diversas áreas como na química, física e até na biologia, mas sua importância maior se dá nas aplicações em estatística, especialmente na área de probabilidade.

Este trabalho está dividido em quatro seções, sendo elas: a introdução, com uma breve contextualização e objetivo do estudo; a metodologia, como o trabalho foi feito; resultados e discussão, onde apresentamos as provas escolhidas; e por fim, a conclusão.

2. Metodologia

O trabalho é uma revisão bibliográfica, em que examinamos e sintetizamos a pesquisa existente sobre a Integral Gaussiana. Tem como objetivo apresentar, e resolvê-la por cinco métodos diferentes. Foi utilizado como base o artigo Conrad (2016). Outras formas de resolução podem ser encontradas em Conrad (2016), Iwasawa (2009) e Lee (s.d.). Para generalizações, indicamos Straub (2009).

3. Resultados e discussão

Em todas as seções, denotaremos a Integral Gaussiana a ser calculada por I , ou seja,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \implies I^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right). \quad (1)$$

¹Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827) foi um matemático, astrônomo e físico francês.

3.1 Primeira Prova: Coordenadas Polares

Para uma introdução detalhada sobre coordenadas polares, indicamos Stewart e Romo (2017). Consideremos I^2 como em (1). Reescrevendo uma das integrais, agora na variável y , obtemos

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) = \int_0^\infty e^{-x^2} \left(\int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) dx = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dy dx. \quad (2)$$

Chegamos então em uma integral iterada. Para calcular usando coordenadas polares, escrevemos $x^2 + y^2 = r^2$ e $dx dy = r dr d\theta$. Ainda, o primeiro quadrante é definido como o conjunto de pontos (r, θ) onde $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Reescrevendo a integral

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r dr. \quad (3)$$

Para resolver $\int_0^\infty e^{-r^2} r dr$, faremos por partes, chamando $u = -r^2$, ficamos com

$$\int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-\infty} e^u du = -\frac{1}{2} \cdot e^u \Big|_0^{-\infty} = -\frac{1}{2} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}.$$

Voltando para (3)

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Encontramos o valor de I^2 . Como $I > 0$, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3.2 Segunda Prova: Outra Mudança de Variáveis

Escrevendo $x = yt$ com $dx = y dt$, em (2), obtemos

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-((yt)^2+y^2)} y dt dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2 \cdot (t^2+1)} y dt \right) dy = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2 \cdot (t^2+1)} y dy \right) dt. \quad (4)$$

A última igualdade só é possível pelo Teorema de Fubini (Ver Oliveira (2019)).

Note que, por substituição simples, temos $\int_0^\infty e^{-ay^2} y dy = \frac{1}{2a}$. Assim, considerando $a = t^2 + 1$ em (4), concluímos que

$$\int_0^\infty e^{-ay^2} y dy = \int_0^\infty e^u \cdot \left(-\frac{du}{2a} \right) = -\frac{1}{2a} \cdot \int_0^\infty e^u du = -\frac{1}{2a} \cdot e^u \Big|_0^\infty = -\frac{1}{2a} \cdot e^{-ay^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2a}. \quad (5)$$

Retornando para (4), obtemos

$$I^2 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-y^2 \cdot (t^2+1)} y dt \right) dy = \int_0^\infty \frac{1}{2(t^2+1)} dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \cdot \arctan t \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

e concluímos o desejado.

3.3 Terceira Prova: Derivação sob o Sinal de Integral

Defina, para $t > 0$, a função

$$A(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Nesse caso, como a função e é contínua e x^2 também o é, temos uma função contínua e portanto, A é bem definida. Nosso objetivo é calcular o valor de $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = I^2$.

Derivando A e usando Teorema Fundamental do Cálculo (Ver Lima (2004), pag 132), obtemos

$$A'(t) = \left(\left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 \right)' = 2 \cdot \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right) \cdot e^{-t^2} = 2e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{-x^2} dx.$$

Como $y = \frac{x}{t}$ então $x = yt$ e derivando $dx = t \cdot dy$. Perceba que se $x = 0$, então $yt = 0$. Como t é uma constante positiva, temos $y = 0$. E, da mesma forma, se $x = t$, então $ty = t$ e portanto $y = 1$. Com isso, temos

$$A'(t) = 2e^{-t^2} \int_0^1 e^{-(ty)^2} t dy = 2e^{-t^2} \int_0^1 t e^{-t^2 y^2} dy = \int_0^1 2t e^{-t^2(1+y^2)} dy. \quad (6)$$

Note que é conhecida a antiderivada em relação a t . De fato, fazendo $u(t, y) = e^{-t^2(1+y^2)}$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-t^2(1+y^2)} \cdot (-2t \cdot (1+y^2)) \Rightarrow -\frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 2t \cdot e^{-t^2(1+y^2)}$$

e substituindo na integral (6), obtemos

$$A'(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \left(-\frac{1}{(1+y^2)} \right) \right) dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-t^2(1+y^2)} \right) \cdot \left(-\frac{1}{1+y^2} \right) dy = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{1+y^2} dy \right).$$

Podemos retirar a derivada parcial para fora da integral pelo Teorema de Leibniz (Ver Oliveira (2015)). Seja

$$B(t) = \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx, t > 0$$

e então, temos $A'(t) = -B'(t)$ para todo $t > 0$, o que implica que $A(t) = -B(t) + C$.

Para encontrar o valor de C , calculando o limite de $A(t)$ quando $t \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} A(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t e^{-x^2} dx = 0,$$

o que segue da continuidade de A e das propriedades de integral sobre um ponto. E, para B , observando que a convergência é uniforme em $[0, 1]$, então podemos calcular em $t = 0$, e assim $\lim_{t \rightarrow 0} B(t) = B(0)$, logo

$$\begin{aligned} -\int_0^1 \frac{e^{-0^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx + C &= -\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + C = -\frac{1}{1} \cdot \arctan(x) \Big|_0^1 + C = -\arctan(x) \Big|_0^1 + C \\ &= -(\arctan(1) - \arctan(0)) + C = -\frac{\pi}{4} + C. \end{aligned}$$

Portanto, $C = \frac{\pi}{4}$ e $A(t) = B(t) + \frac{\pi}{4}$, para todo $t \geq 0$. Assim, fazendo $t \rightarrow \infty$, temos

$$I^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx + \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} \right) dx + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

3.4 Quarta Prova: Estimativas Assintóticas

Para essa prova, observe que, da expansão em série de potências de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, temos $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ quando $x \geq 0$, $x \neq 1$ logo,



$$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1 + x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Daí, para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-(\sqrt{n}x)^2} dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^n dx.$$

Considerando as mudanças de variáveis a seguir

$$(i) \quad x = \sin(\theta) \Rightarrow \int_0^1 (1 - x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta;$$

$$(ii) \quad x = \frac{y}{\sqrt{n}} \Rightarrow \int_0^1 e^{-(\sqrt{n}x)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy;$$

$$(iii) \quad x = \tan \theta \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^n dx = \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(\theta) d\theta$$

concluimos que

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \leq \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2}(\theta) d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(\theta) d\theta. \quad (8)$$

Seja, para cada $n \geq 0$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta) d\theta$, logo $I_0 = \pi/2$ e, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n} I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \leq \sqrt{n} I_{2n-2}. \quad (9)$$

Agora, integrando por partes, obtemos $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, para todo $n > 1$ e, por indução, mostramos que

$$I_{2n} I_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \frac{\pi}{2}.$$

Ainda, como $0 \leq \cos(\theta) \leq 1$, temos $I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2} = \frac{n}{n-1} I_n$, com $n > 1$, portanto, para n suficientemente grande, temos $I_n \sim I_{n-1}$, donde

$$I_{2n}^2 \sim I_{2n-1} I_{2n} = \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} \implies (2n) I_{2n}^2 \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

quando $n \rightarrow \infty$. Analogamente, $(2n+1) I_{2n+1}^2 \rightarrow \pi/2$, portanto $n I_n^2 \rightarrow \pi/2$ quando $n \rightarrow \infty$. Retornando a (9),

$$\sqrt{n} I_{2n+1} = \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \cdot I_{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{2n+1} I_{2n+1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (10)$$

quando $n \rightarrow \infty$. Analogamente, $\sqrt{n} I_{2n-2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e, portanto $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Como $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \rightarrow I$, da unicidade do limite, temos o desejado.

3.5 Quinta Prova: A Prova Original

Seja

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} dx,$$

logo, se $y = \sqrt{-\ln x}$, então $y^2 = -\ln x$ e $x = e^{-y^2}$. A ideia é utilizar o método de substituição, assim

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{-\ln x}} \cdot -\frac{1}{x} dx = \frac{1}{2y} \cdot (-e^{y^2}) dx, dx = -2ye^{-y^2} dy \text{ e } x \in (0, 1) \Rightarrow y \in (0, \infty).$$

Reescrevendo J , encontramos

$$J = \int_0^\infty 2e^{-y^2} dy = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy = 2I.$$

O ponto de partida de Laplace para avaliar J foi a fórmula de Euler, que nos diz que

$$\int_0^1 \frac{x^r}{\sqrt{1-x^{2s}}} dx \int_0^1 \frac{x^{s+r}}{\sqrt{1-x^{2s}}} dx = \frac{1}{s(r+1)} \frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

Fazendo $r \rightarrow 0$, temos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^{2s}}} dx \int_0^1 \frac{x^s}{\sqrt{1-x^{2s}}} dx = \frac{1}{s} \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Avaliando a integral encontrada quando $s \rightarrow 0$, temos $x^s \rightarrow 1$ e note que $1 - x^{2s} \sim -2s \ln x$ pela regra de L'Hopital, logo, podemos reescrever (12), para s próximo de 0(zero),

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2s \ln x}} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2s \ln x}} dx \right) = \frac{1}{s} \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

Mas, $\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-2s \ln x}} dx \right)^2 = \frac{1}{2s} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} dx \right)^2$, portanto

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} dx \right)^2 = \pi, \text{ ou seja, } J^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}.$$

4. Conclusões

A Integral Gaussiana é uma integral que aparece em diversas aplicações da matemática, entretanto seu cálculo não é possível pelas técnicas simples de integração e, portanto, resolvê-la além de trazer um conhecimento maior dessa importante integral, ainda nos permite aumentar o repertório de conhecimentos matemáticos aplicáveis. Estudá-la, portanto, contribui para a uma melhor formação, especialmente, de estudantes de Matemática.

Referências

CONRAD, K. The gaussian integral. *University of Connecticut: Storrs, CT, USA*, p. 1, 2016. Citado na página 1.

IWASAWA, H. Gaussian integral puzzle. *Math. Intelligencer*, v. 31, p. 38–41, 2009. Citado na página 1.

LEE, P. M. *THE PROBABILITY INTEGRAL*. [S.l.], s.d. Disponível em: https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/normal_history.pdf. Citado na página 1.

LIMA, E. L. Análise real, vol. 1. *Publicações IMPA*, 2004. Citado na página 3.

OLIVEIRA, O. R. B. de. Derivacao sob o sinal de integracao - integrais oscilatorias e transformadas. 2015. Citado na página 3.

OLIVEIRA, O. R. B. de. Integral dupla: Teorema de fubini e teorema de mudanca de variáveis. 2019. Citado na página 2.

STEWART, J.; ROMO, J. H. *cálculo 2*. [S.l.]: Cengage Learning, 2017. Citado na página 2.

STRAUB, W. O. A brief look at gaussian integrals. *Article: Pasadena California*, 2009. Citado na página 1.



O Teorema De Pitágoras No Disco De Poincaré

O TEOREMA DE PITÁGORAS NO DISCO DE POINCARÉ

Cleyson de Medeiros Alves¹ - cleyson.alves@aluno.uepb.edu.br
Arlandson Matheus Silva Oliveira² - arlandsonm@servidor.uepb.edu.br

^{1,2}Universidade Estadual da Paraíba, Curso de Matemática - CCEA - Patos, PB, Brasil

Resumo: No presente trabalho, provamos uma versão do Teorema de Pitágoras no Disco de Poincaré, um dos modelos da Geometria Hiperbólica. Argumentamos também que, no caso de triângulos hiperbólicos “bem pequenos”, nosso teorema essencialmente coincide com aquele da Geometria Euclidiana.

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica; Disco de Poincaré; Teorema de Pitágoras.

1. Introdução

A Geometria Hiperbólica é uma fascinante área da Matemática que se destaca por sua natureza não intuitiva e intrigante. Para entendê-la, é fundamental primeiro considerar a Geometria Euclidiana, a qual foi formulada por Euclides na Grécia Antiga e serviu como um paradigma para a Matemática por séculos.

A Geometria Euclidiana é construída a partir de uma série de axiomas ou postulados, dos quais o quinto postulado de Euclides é certamente o mais intrigante. Na versão de Playfair, equivalente à de Euclides, este postulado estabelece que, por um ponto fora de uma reta, é possível traçar uma única reta paralela à reta dada. Ao longo do tempo, o fato de a natureza do quinto postulado ser diferente da dos outros axiomas, parecendo ser menos intuitivo e mais suscetível a questionamentos, levou à busca por uma forma de demonstrar que esse postulado poderia ser derivado a partir dos outros axiomas euclidianos, um empreendimento que se estendeu por muitos séculos.

Foi somente no século XIX que matemáticos como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai e Carl Friedrich Gauss começaram a explorar alternativas à geometria euclidiana. Eles ousadamente propuseram que se poderia construir sistemas geométricos consistentes modificando-se o quinto postulado de Euclides. Nessa tentativa de demonstrar o famigerado postulado, foi construída a Geometria Hiperbólica, na qual adota-se o seguinte axioma das paralelas: Dado um ponto fora de uma reta, existem ao menos duas retas que passam por aquele ponto e são paralelas à reta dada.

Neste trabalho, utilizamos o modelo do Disco de Poincaré, desenvolvido pelo renomado matemático Henri Poincaré, uma ferramenta fundamental para o estudo da Geometria Hiperbólica. Podemos considerar o Disco de Poincaré como $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. O bordo (ou absoluta) do disco representa uma circunferência que está a uma “distância infinita” do centro. Nesse modelo, as retas hiperbólicas são representadas por segmentos de círculos que intersectam o bordo do disco em ângulos retos. O modelo do Disco de Poincaré desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Hiperbólica e na compreensão de suas propriedades distintas em relação àquelas da Geometria Euclidiana. Ele continua sendo uma ferramenta essencial para matemáticos e estudantes que desejam explorar e compreender a fascinante área da Geometria Hiperbólica, que é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana.

2. Metodologia

O presente trabalho é fruto do projeto de iniciação científica intitulado “Geometria Hiperbólica Plana” (UEPB-CNPq/PIBIC/Cota 2022-2023), desenvolvido pelo primeiro autor sob orientação do segundo, durante cuja execução foram realizados seminários para estudo dos elementos introdutórios e primeiros e principais resultados da Geometria Hiperbólica.

Durante nossos estudos e pesquisa bibliográfica, devotados a compreender se e como o Teorema de Pitágoras funciona nessa nova geometria, utilizamos sobretudo o livro de (BRANNAN; ESPLIN; GRAY, 2011) para guiar nosso trabalho.

3. Resultado e discussão

No estudo aprofundado da Geometria Hiperbólica, uma descoberta notável veio à tona: nesta geometria, o Teorema de Pitágoras assume uma forma distinta daquela encontrada na Geometria Euclidiana. Nesse contexto, a versão do Teorema de Pitágoras que encontramos é a seguinte:

Teorema (*Teorema de Pitágoras no Disco de Poincaré*). Seja $\triangle ABC$ um triângulo hiperbólico com ângulo reto em C . Se a , b e c são os comprimentos hiperbólicos de BC , CA e AB respectivamente, então

$$\cosh(2c) = \cosh(2a) \cosh(2b).$$

Ao examinarmos o artigo de (UNGAR, 1999), encontramos uma versão para o teorema de Pitágoras hiperbólico. Entretanto, percebemos que o autor utiliza uma fórmula de distância hiperbólica que não se mostra adequada. Com efeito, ao investigarmos a fórmula da distância hiperbólica em (BRANNAN; ESPLIN; GRAY, 2011), identificamos que esta é dada por

$$d(z_1, z_2) = \tanh^{-1} \left(\left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| \right), \quad (1)$$

para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Para a demonstração do Teorema de Pitágoras hiperbólico apresentado anteriormente, precisamos da seguinte

Definição (*Transformação de Möbius*). Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é dita uma **transformação de Möbius** se for da forma:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

As transformações de Möbius incluem translações, homotetias, rotações, inversões e reflexões, bem como quaisquer combinações das anteriores. Além disso, as transformações de Möbius formam um grupo com a operação de composição de funções, mapeam circunferências (generalizadas) em circunferências (generalizadas) e preservam os ângulos e as suas orientações. Não almejamos neste trabalho investigar propriedades dessas transformações; remetemos o leitor interessado a (FISHER, 1999).

3.1 Demonstração do teorema

Aplicando uma transformação de Möbius, se necessário, podemos supor, sem perda de generalidade, que o vértice C coincide com o centro O do disco, que $A = (a', 0)$ está sobre o eixo horizontal e que $B = (0, ib')$ sobre o eixo vertical, em que a' e b' são números reais positivos.

Segue de 1 que

$$a = d(O, (0, ib')) = \tanh^{-1}(|b'|), \quad b = d(O, (a', 0)) = \tanh^{-1}(|a'|) \quad (2)$$

Mapeamos \mathbb{D} sobre si mesmo por meio da seguinte transformação de Möbius:

$$M(z) = \frac{z - a'}{1 - a'z}$$

O ponto A é vai para o centro, B vai para um ponto B' com coordenadas

$$M(ib') = b'' = \frac{ib' - a'}{1 - ia'b'} \quad (3)$$

e C vai para o ponto $C' = (0, -a')$.

Segue da definição de \cosh e de \tanh que

$$\cosh 2t = \frac{1 + \tanh^2 t}{1 - \tanh^2 t}.$$

Via a substituição $x = \tanh t$ na identidade acima, obtemos

$$\cosh(2 \tanh^{-1} x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}. \quad (4)$$

Por (2) e (4), encontramos

$$\begin{aligned} \cosh 2a &= \cosh(2 \tanh^{-1} b') = \frac{1 + b'^2}{1 - b'^2} \\ \cosh 2b &= \cosh(2 \tanh^{-1} a') = \frac{1 + a'^2}{1 - a'^2}. \end{aligned}$$

Como $c = \tanh^{-1} |b''|$, novamente usando (4) obtemos

$$\cosh 2c = \cosh(2 \tanh^{-1} |b''|) = \frac{1 + |b''|^2}{1 - |b''|^2}.$$

De (3), vem

$$\begin{aligned} \cosh 2c &= \frac{1 + |b''|^2}{1 - |b''|^2} \\ &= \frac{1 + \frac{a'^2 + b'^2}{1 + a'^2 b'^2}}{1 - \frac{a'^2 + b'^2}{1 + a'^2 b'^2}} \\ &= \frac{1 + (a')^2 + (b')^2 + (a'b')^2}{1 - (a')^2 - (b')^2 + (a'b')^2} \\ &= \left(\frac{1 + (b')^2}{1 - (b')^2} \right) \left(\frac{1 + (a')^2}{1 - (a')^2} \right) \\ &= \cosh(2a) \cosh(2b). \end{aligned}$$

4. Conclusões

Se os lados do triângulo são muito pequenos, algo muito interessante acontece. Expandindo \cosh em séries de potências,

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

vemos que

$$\cosh(2c) = 1 + \frac{(2c)^2}{2!} + \frac{(2c)^4}{4!} + \frac{(2c)^6}{6!} + \dots.$$

Vamos desconsiderar no somatório todos os termos a partir da quarta potência:

$$\cosh(2c) \approx 1 + \frac{(2c)^2}{2!}.$$

Procedendo analogamente para $\cosh(2a)$ e $\cosh(2b)$, obtemos

$$\cosh(2a) \cosh(2b) \approx \left(1 + \frac{(2a)^2}{2!} \right) \left(1 + \frac{(2b)^2}{2!} \right) = 1 + 2a^2 + 2b^2 + 4a^2b^2$$

Se ignorarmos $4a^2b^2$, que é tão pequeno quanto os termos que já eliminamos, concluímos que

$$1 + 2a^2 + 2b^2 \approx 1 + \frac{(2c)^2}{2!},$$

isto é,

$$a^2 + b^2 \approx c^2,$$

de modo que, para triângulos hiperbólicos “muito pequenos”, nossa versão do Teorema de Pitágoras é essencialmente igual ao da Geometria Euclidiana.

A Geometria Hiperbólica, um sistema geométrico intrigante e não intuitivo, é tão consistente quanto a Geometria Euclidiana, que por muito tempo serviu como padrão de referência na Matemática. Essa consistência é notável, uma vez que a Geometria Hiperbólica satisfaz os axiomas fundamentais de Euclides, que formam a base da Geometria Neutra, mas modifica o coração da Geometria Euclidiana, que é a noção de paralelismo, trocando o Quinto Postulado de Euclides pelo Postulado de Lobachevsky.

Muitos resultados obtidos na Geometria Euclidiana têm contrapartes hiperbólicas. Isso ressalta a complexidade e a riqueza da Matemática, mostrando como diferentes sistemas podem coexistir e oferecer perspectivas únicas. Nosso estudo da Geometria Hiperbólica constitui trabalho em andamento, que deve culminar no trabalho de conclusão de curso do primeiro autor sob orientação do segundo.

Referências

BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J. *Geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

FISHER, S. D. *Complex variables*. [S.l.]: Courier Corporation, 1999. Citado na página 2.

UNGAR, A. The hyperbolic pythagorean theorem in the poincaré disc model of hyperbolic geometry. *The American Mathematical Monthly*, v. 106, p. 759–763, 10 1999. Citado na página 2.

Os Paradoxos E Suas Contribuições No Avanço Da Matemática

Os Paradoxos e suas Contribuições no Avanço da Matemática

Matheus Felipe Silva de Souza¹ - matheus.felipe.souza@aluno.uepb.edu.br

Jéssica Agostinho da Paz¹ - jessica.paz@aluno.uepb.edu.br

Emanuela Régia de Sousa Coelho¹ - emanuelacoelho@servidor.uepb.edu.br

¹Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Os paradoxos são um dos temas mais intrigantes da Matemática. Assim, objetiva-se, por meio deste trabalho, abordá-los sob uma perspectiva histórica e matemática. Para este fim, foram realizadas pesquisas de natureza bibliográfica, com o intuito de compreender o surgimento, o significado e a importância dos paradoxos para o desenvolvimento da Matemática. Neste sentido, são apresentados e discutidos três paradoxos historicamente relevantes para a Matemática: o paradoxo do Hotel de Hilbert, o paradoxo de Russel e o teorema da Incompletude de Gödel. A partir disto, é perceptível a influência desses paradoxos no desenvolvimento da ciência, uma vez que possibilitaram a melhoria e o avanço de teorias matemáticas.

Palavras-chave: Paradoxos; Lógica Matemática; História da Matemática.

1. Introdução

Socialmente, a Matemática é entendida como a mais exatas das ciências, pois só permite duas opções de soluções para um determinado problema: certo ou errado. Tal dicotomia vem da estrutura lógica em que a Matemática se baseia. Na chamada Lógica Matemática, chamamos de proposição uma afirmação que assume, necessariamente, um único valor lógico: Verdadeiro ou Falso. Todavia, algumas afirmações podem levar a contradições no raciocínio, as quais são denominadas de paradoxos. Desta forma, um paradoxo é uma proposição que contém ou parece conter uma contradição lógica, ou um raciocínio que, embora sem aparente lacuna, leva a um absurdo, ou ainda, uma situação que contraria a intuição comum. Filho e Oliveira (2022). Sob uma perspectiva histórica, os primeiros registros de paradoxos apareceram com o início da Filosofia na Grécia. Assim, um dos mais antigos e importantes paradoxos é o do mentiroso, atribuído ao filósofo grego Eubúlides de Mileto (400 a.C.). Em sua versão original, o mentiroso deve responder a seguinte pergunta: *Mente quando diz que mente?* Se responde: *Sim, minto!* Então, ele não mente, pois o mentiroso, que afirma estar mentindo, diz a verdade. Por outro lado, se responde: *Não minto!* Então, mente, pois um mentiroso que diz não mentir, diz uma mentira.

Ademais, é importante destacar que os paradoxos podem ser divididos em quatro tipos distintos, que são: 1) afirmações aparentemente falsas, mas que se mostram verdadeiras, como o fato de que os conjuntos dos números naturais e dos inteiros possuem a mesma cardinalidade (mesmo número de elementos); 2) asserções aparentemente verdadeiras, mas que são falsas, como o postulado das paralelas de Euclides de Alexandria (325-265 a.C.); 3) enunciados impossíveis de classificar como verdadeiros ou falsos, tal qual a Conjectura de Christian Goldbach (1690-1764); 4) encadeamentos de raciocínio aparentemente inatacáveis, porém que se encaminham à contradições lógicas, também conhecidos como sofismas. O paradoxo “Aquiles e a Tartaruga”, de Zenão de Eléia (490-425 a.C.), é um exemplo desta última classificação.

Além de serem desafios mentais, os paradoxos exerceram um papel fundamental para o avanço da Matemática, já que foram responsáveis por mudanças que contribuíram para ampliação de ideias, raciocínios, conceitos, etc. Por exemplo, a moderna Teoria dos Conjuntos, elaborada por Georg Cantor (1845-1918), trazia como consequência a existência de um conjunto formado por todos os conjuntos que não fossem elementos de si próprios. Todavia, Bertrand Russell (1872-1970) chegou ao conhecido paradoxo de Russell, que mostrou que a Teoria dos Conjuntos de Cantor levava a uma contradição. Outro avanço importante para a matemática foi a formulação do Teorema da Incompletude, de Kurt Gödel (1906-1978), que afirma que qualquer sistema formal com aritmética que seja consistente não pode ser completo, isto é, possui proposições verdadeiras que não podem ser provadas dentro do sistema. Neste sentido, o objetivo deste trabalho é abordar os paradoxos sob sua perspectiva histórica e matemática. Assim, serão apresentados os paradoxos do Hotel de Hilbert, de Russell e da Incompletude de Gödel, com o intuito de discutir suas implicações no desenvolvimento da matemática.

2. Metodologia

Uma das preocupações do presente trabalho foi a de buscar na bibliografia existente trabalhos que abordem o surgimento dos paradoxos e seu contexto histórico, a fim de compreender seu significado e sua importância para o desenvolvimento da matemática. Nesse sentido, o artigo “Os paradoxos no ensino de Matemática: uma perspectiva histórica” Filho e Oliveira (2022), nos conduz a respostas satisfatórias no que tange à questão supracitada. A partir da revisão histórica, é notória a importância dos paradoxos para o desenvolvimento de algumas ideias, sobretudo no campo da matemática, o que motiva o estudo de alguns paradoxos considerados modernos, mas com implicações muito fortes nos campos da Teoria dos Conjuntos e da Análise Matemática. Dessa forma, um excelente trabalho, que aborda a temática do infinito, é o livro “The Joy of X: A Guided Tour of Math, from One to Infinity” Strogatz (2012), que aborda o curioso paradoxo do Grande Hotel de Hilbert, o qual de certo modo traduz de forma didática a teoria de Georg Cantor de que alguns infinitos são maiores que outros. Finalmente, são debatidos os paradoxos de Russell e de Gödel, muito bem apresentados por Quine (1962) e Goldstein (2005). Em síntese, a metodologia utilizada foi a bibliográfica, uma vez que foram realizadas pesquisas em artigos, revistas e livros que versam sobre paradoxos.

3. Resultados e discussões

Na Grécia Antiga, as questões matemáticas eram inteiramente relacionadas às questões filóficas e, por isso, surgiram problemas que envolviam a ideia de verdadeiro ou falso, o que, em alguns casos, concebia questões paradoxais. Um exemplo clássico é o argumento de o Movimento não existe através do paradoxo de Zenão de Elea, que diz o seguinte: “Para ir a qualquer lugar, você deve percorrer primeiro a metade da distância, logo, a metade da distância que falta percorrer, depois, a metade da distância que falta, e assim até o infinito, então você nunca chegará lá.” Esse paradoxo só foi resolvido matematicamente no Século XIX com a ideia de limite.¹ Um paradoxo mais recente e que também se popularizou, foi o paradoxo do barbeiro de Russel que contava a história de uma vila que possuía um único barbeiro, que barbeava todos e apenas os homens que não barbeavam a si mesmos. Assim, surge uma questão: o barbeiro se barbeia? Em caso afirmativo, como ele não barbeia homens que se barbeiam, então ele não se barbeia. Por outro lado, em caso negativo, ele barbeia todo homem que não se barbeia, logo ele se barbeia. Nota-se, portanto, um problema, pois um homem se barbeia e não se barbeia ao mesmo tempo. Tal problema pode ser facilmente resolvido por meio de um conceito conhecido como “*reductio ad absurdum*”, que consiste em um tipo de argumento lógico no qual alguém assume uma ou mais hipóteses e, a partir destas, chega a uma consequência absurda ou ridícula, e então conclui que a suposição original deve estar errada. Assim, conclui-se que não existe um barbeiro nestas condições. Desse modo, é notório que alguns problemas paradoxais podem ser importantes para desenvolver ideias que ajudem na sua resolução.

Dito isso, uma das principais questões que permeiam a humanidade desde a antiguidade é a ideia de infinito que, na matemática, foi bastante estudado por Georg Cantor, que chegou à conclusão de que alguns infinitos possuem o mesmo tamanho (definido como cardinalidade), como é o caso do conjunto dos naturais e dos naturais pares. Para mostrar tal afirmação, pode-se abordar o paradoxo do Hotel de Hilbert, que apresentamos a seguir.

3.1 O paradoxo do Hotel de Hilbert

Imagine um grande hotel no centro da cidade, que promete acomodar tantos hóspedes quanto forem necessários, haja vista que possui infinitos quartos. Suponha que em uma determinada noite o hotel esteja lotado e que chegue uma pessoa querendo se hospedar ali. O gerente, habilidoso, pede que a pessoa do 1º quarto vá para o 2º, a do 2º quarto vá para o 3º, e assim sucessivamente. Logo, todos os infinitos hóspedes terão se deslocado para o quarto seguinte, o que é plausível, haja vista a existência de infinitos quartos. Assim, o 1º quarto ficará disponível para o novo hóspede. No dia seguinte, satisfeito com o atendimento, o hóspede convida para o hotel seus infinitos amigos. O gerente, agora, deve encontrar uma maneira de alocar todos os infinitos novos hóspedes no hotel. Para isto, o gerente pede que a pessoa do 1º quarto vá para o 2º, a do 2º vá para o 4º, a do 3º vá para o 6º, ou seja, a pessoa do quarto de n^o n irá para o quarto de n^o $2n$, de modo que todos os quartos de n^o ímpar fiquem disponíveis. Assim, as infinitas pessoas recém-chegadas podem se aconchegar no 1º quarto, no 3º, no 5º, e assim sucessivamente. A partir disto, é possível notar que o número de elementos no conjunto

¹Mais detalhes e outros Exemplos de Paradoxos da Grécia Antiga podem ser encontrados em (BOYER, 1974)

curso de valores εF do conceito será formado pelos valores x que satisfazem tal ideia, nesse caso, $F(x)^2$ que é a chamada Lei das Extensões, dada por

$$\forall F \forall x (x \in \varepsilon F \Leftrightarrow F(x)).$$

Daí, se Y é denota uma extensão do conceito F ,

$$\forall x (x \in \varepsilon F \Leftrightarrow F(x)) \Rightarrow \exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow F(x)) \Rightarrow \forall F \exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow F(x)) \Rightarrow \exists Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \notin Y).$$

Mas $(x \in Y \Leftrightarrow x \notin Y)$ é uma contradição, o que foi demonstrado por Russell em carta enviada a Frege. É importante destacar que tal contradição também foi encontrada na Teoria de Conjuntos de Cantor. Assim, Russell exemplificou o erro encontrado no sistema de Frege justamente utilizando noções de conjuntos. Segundo essa teoria, qualquer conjunto poderia ser formado simplesmente citando suas propriedades. Assim, poderia-se formar o conjunto X como sendo o conjunto de todos os elementos x que possuem a propriedade p , isto é, $X = \{x; x \text{ possui a propriedade } p\}$. Imaginemos, portanto, um conjunto S que possui os elementos A como sendo todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos, ou seja, $S = \{A; A \notin A\}$.

Daí, surge a seguinte questão: o conjunto S pertence a si mesmo? Se $S \in S$, então $S \notin S$, pois S é o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos. Por outro lado, se $S \notin S$, então $S \in S$, pois S é o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmo. Logo, conclui-se que $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$, o que é uma contradição. Todavia, assim como podem ser criados, axiomas também podem ser corrigidos ou destruídos. Neste caso, o problema descrito foi resolvido posteriormente por Ernst Zermelo (1871-1953).

3.3 Teoremas da incompletude de Gödel

Além de Cantor e Frege, outro matemático sonhava em formalizar toda a matemática em único sistema: David Hilbert (1862-1943). Para isto, ele fundou o Programa de Hilbert, que tinha como objetivo reformular as bases da matemática de forma rigorosa, partindo da aritmética. Assim, ele queria criar um sistema de axiomas e mostrar que toda a matemática existente poderia ser derivada desses axiomas de forma consistente. Na matemática, um sistema é dito consistente se não há nele contradições. Isto significa dizer que toda verdade matemática existente deveria ser uma consequência lógica desses axiomas, sem a existência de paradoxos. Ademais, tal sistema deveria ser completo, o que ocorre quando toda sentença do sistema pode ser provada. Em síntese, o Programa de Hilbert visava transformar a matemática num sistema formal de prova, isto é, uma linguagem lógica simbólica que deveria obedecer a um conjunto rígido de regras para operar com esses símbolos. Sob o mesmo pressuposto de um sistema formal, Kurt Gödel criou uma forma de o sistema falar coisas sobre o próprio sistema, isto é, usar a matemática para falar coisas sobre o próprio sistema matemático. Assim, Gödel chegou à conclusão de que a matemática não é completa, ou seja, há verdades matemáticas que não podem ser provadas matematicamente. Tal conclusão advém do seu primeiro teorema da Incompletude, que diz:

Teorema 1 (1º Teorema da Incompletude de Gödel). *Qualquer teoria axiomática recursivamente enumerável e capaz de expressar algumas verdades básicas de aritmética não pode ser, ao mesmo tempo, completa e consistente.*

Sabemos que em um sistema formal existem símbolos e regras para trabalhar com tais símbolos. Neste sentido, Gödel notou que para se trabalhar com aritmética eram necessários 9 símbolos básicos. A cada um desses símbolos, Gödel atribuiu um número natural, chamado de número de Gödel, conforme a Tabela 1 abaixo:

Tabela 1: Símbolos básicos da aritmética

número de Gödel	símbolo	significado	número de Gödel	símbolo	significado
1	\sim	negação	6	s	sucessor
2	\Leftrightarrow	implica	7	$($	pontuação
3	x	variável	8	$)$	pontuação
4	$=$	igual	9	$'$	novas variáveis
5	0	zero			

²Uma explicação mais detalhada pode ser encontrada em (FERREIRA,).

Assim, com estes símbolos é possível escrever toda a aritmética, incluindo axiomas, teoremas, provas etc. Por exemplo, o número 1 pode ser escrito como $1 : s0$, ao passo que o número 2 pode ser escrito como $2 : ss0$. Ademais, sempre que uma fórmula é obtida a partir de tais símbolos, ela também possui um número de Gödel, que é obtido da seguinte forma: associa-se uma sequência de números primos a cada símbolo utilizado na fórmula e, em seguida, eleva o número primo ao número de Gödel do símbolo associado a este primo. Por fim, se realiza o produto entre os números obtidos. Tomemos, por exemplo, o oitavo axioma de Peano, isto é, $\sim (sx = 0)$ (o número 0 não é sucessor de nenhum número natural x). Note que são utilizados os seguintes símbolos com seus respectivos números de Gödel: $\sim : (1)$, $(: (7)$, $s : (6)$, $x : (3)$, $= : (4)$, $0 : (5)$, $) : (8)$. Assim, o número de Gödel correspondente seria dado por

$$\begin{array}{ccccccc} \sim & (& s & x & = & 0 &) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^1 & 3^7 & 5^6 & 7^3 & 11^4 & 13^5 & 17^8 \end{array}$$

Logo, o nº de Gödel de $\sim (sx = 0)$ é $2^1 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7^3 \cdot 11^4 \cdot 13^5 \cdot 17^8 = 888.938.667.876.604.827.705.754.781.250$. Assim, é possível associar uma sentença matemática a um único número de Gödel e, inversamente, é possível associar um número de Gödel a uma única sentença matemática, por meio da fatoração desse número em fatores primo. Logo, Gödel encontrou uma forma de codificar a matemática dentro da própria matemática. Nesse contexto, Gödel encontrou uma propriedade extremamente útil para verificar quando uma proposição pode ou não ser provada a partir dos axiomas. Ele descobriu que havia uma certa relação aritmética entre os números de Gödel da proposição e dos axiomas. Em síntese, ele encontrou uma propriedade dos números de Gödel que garantia que todas as sentenças que poderiam ser provadas dentro desse sistema deveriam ter números de Gödel satisfazendo tal propriedade. Assim, para verificar se uma determinada afirmação poderia ser provada, bastaria olhar para o seu número de Gödel. Um exemplo desse raciocínio seria imaginar que um teorema seria provado a partir de um conjunto de axiomas se os números de Gödel desses axiomas dividissem o número de Gödel desse teorema. Isto porque ao fatorar o número de Gödel desse teorema chegaríamos aos números de Gödel dos axiomas. Por fim, Gödel conseguiu mostrar que era sempre possível encontrar a seguinte proposição lógica dentro do sistema

Proposição 1. *É impossível provar a proposição com o número de Gödel G .*

O número de Gödel da proposição 1 é igual a G . Neste sentido, há duas possibilidades. Se a proposição for falsa, então ela poderá ser provada. Mas estaríamos provando algo falso, o que não pode ocorrer em um sistema consistente. Logo, em um sistema consistente, só pode ocorrer de a proposição ser verdadeira, ou seja, ela realmente não pode ser provada. Mas este é justamente o primeiro teorema da incompletude de Gödel.

4. Conclusões

Os paradoxos de Hilbert, Russel e Gödel, embora distintos, possuem um fator em comum: todos se depararam com contradições durante sua formulação. Tais contradições levaram vários matemáticos a aperfeiçoar suas conjecturas e definições, levando-os a compreender melhor alguns conceitos. Portanto, pode-se concluir que os paradoxos fazem parte da construção do conhecimento matemático. Nesse sentido, é notável o quanto eles impactaram significativamente no desenvolvimento da Matemática.

Referências

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher & EDUSP, 1974. Tradução: Elza F. Gomide. Citado na página 2.
- FERREIRA, N. *O Logicismo ilógico de Gottlob Frege (1/?)*. [S.l.]. Acessado: 05 nov. 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=N0ouC4xV7E4>. Citado na página 4.
- FILHO, I. F. B.; OLIVEIRA, E. R. Os paradoxos no ensino de matemática: uma perspectiva histórica. *Revista de Educação Matemática*, v. 19, p. e022013–24, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.
- GOLDSTEIN, R. *Incompleteness: The Proof and Paradox of Kurt Gödel*. New York: W. W. Norton & Company, 2005. Citado na página 2.
- QUINE, W. V. Paradox. *Scientific American*, v. 206(4), p. 84–96, 1962. Citado na página 2.
- STROGATZ, S. *The joy of x: a guided tour of math, from one to infinity*. New York: Houghton Mifflin Harcourt, 2012. Citado na página 2.



Um Estudo Das Ações Parciais De
Grupos E A Relação Com Semigrupos
Inversos

UM ESTUDO DAS AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E A RELAÇÃO COM SEMIGRUPOS INVERSOS

Pedro Vítor dos Santos Barbosa¹ - pedrovt91@gmail.com
Prof. Dra. Josefa Itailma da Rocha¹ - itailma@mat.ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: A cada grupo G que tomamos, podemos associar um semigrupo inverso denotado por $S(G)$ definido através de geradores e relações. Nesse trabalho, que foi desenvolvido a partir dos estudos de uma iniciação científica, vamos apresentar as ações parciais e semigrupos inversos e mostrar que as representações parciais de G sobre um conjunto X está em correspondência biunívoca com as ações de $S(G)$ no mesmo conjunto X .

Palavras-chave: Álgebra; Ações parciais; Semigrupo inverso.

1. Introdução

O conceito de ação de grupos pode ser generalizado através dos homomorfismos parciais definidos em um conjunto. O conceito de ações parciais surge na Teoria de Álgebras de Operadores e começou a ser estudado em um contexto puramente algébrico por M. Dokuchaev e R. Exel em (DOKUCHAEV; EXEL, 2005). De maneira geral, uma ação parcial de um grupo G em um conjunto X é um par

$$\Theta = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\theta_t\}_{t \in G}),$$

em que, para cada t em G , D_t é um subconjunto de X e $\theta_t : D_{t^{-1}} \rightarrow D_t$ é uma aplicação bijetiva tal que, para cada $r, s \in G$ tem-se:

- (i) $D_e = X$ e $\theta_e = id_X$ em que e denota o elemento neutro de G e id_X a aplicação identidade em X ,
- (ii) $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = D_r \cap D_{rs}$,
- (iii) $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_{rs}(x)$, $x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$

Além disso, dado um semigrupo S , dizemos que S é um semigrupo inverso se, para cada $x \in S$ exista um único elemento $x^* \in S$ tal que

- (i) $xx^*x = x$,
- (ii) $x^*xx^* = x^*$.

Dessa forma, o objetivo principal desse trabalho é mostrar que, para cada grupo G , podemos associar um semigrupo inverso denotado por $S(G)$. Ademais, mostrar que ações parciais de G em X tem correspondência um para um com os homomorfismo de $S(G)$ em $\mathcal{I}(X)$, em que $\mathcal{I}(X)$ representa o semigrupo inverso das bijetivos parcialmente definidos em um conjunto X .

2. Metodologia

O presente trabalho foi desenvolvido através dos estudos realizados em uma iniciação científica orientada pela professora doutora Josefa Itailma da Rocha. Os conhecimentos prévios foram passados pela orientadora de forma expositiva, enquanto os pontos principais retratados nesse artigo foram estudados e expostos em forma de seminário pelo orientando.

3. Resultado e discussão

Seja G um grupo fixado, vamos denotar por $S(G)$ o semigrupo universal definido pelos geradores $[t]$, com $t \in G$, e pelas relações:



- (i) $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$,
- (ii) $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$,
- (iii) $[s][e] = [s]$,
- (iv) $[e][s] = [s]$.

Perceba que o item (iv) serve apenas para facilitar a visualização, uma vez que pode ser deduzido das outras 3 relações da seguinte forma:

$$[e][s] = [ss^{-1}][s] = [s][s^{-1}][s] = [s].$$

Perceba também que

$$[t][t^{-1}][t] = [tt^{-1}][t] = [e][t] = [t], \quad (1)$$

para todo $t \in G$.

Além disso, pela propriedade universal dos semigrupos definidos por geradores e relações, temos:

Proposição 1. *Sejam S um semigrupo qualquer e $f : G \rightarrow S$ uma aplicação que satisfaz as propriedades*

- (i) $f(s^{-1})f(s)f(t) = f(s^{-1})(st)$,
- (ii) $f(s)f(t)f(t^{-1}) = f(st)f(t^{-1})$,
- (iii) $f(s)f(e) = f(s)$,

então existe um único homomorfismo $\tilde{f} : S(G) \rightarrow S$ tal que $\tilde{f}[t] = f(t)$.

Com isso, através de manipulações dos resultados anteriores, é possível mostrar que existe um antimorfismo $*$: $S(G) \rightarrow S(G)$ tal que, dado $t \in G$, temos

$$[t]^* = [t^{-1}].$$

Com posse desse resultado, podemos falar sobre os idempotentes em $S(G)$. Elementos desse tipo serão denotados por ϵ e serão importantes nas próximas construções.

Proposição 2. *Para cada $t \in G$, denotaremos $\epsilon_t = [t][t^{-1}]$. Dessa forma, tem-se:*

- (i) $\epsilon_t^* = \epsilon = \epsilon^2$,
- (ii) $[t]\epsilon_s = \epsilon_{ts}[t]$
- (iii) $\epsilon_t\epsilon_s = \epsilon_s\epsilon_t$

Demonstração. (i) Temos $\epsilon_t^* = ([t][t^{-1}])^* = [t^{-1}]^*[t]^* = [t][t^{-1}] = \epsilon_t$. Veja ainda que por 1

$$\epsilon_t^2 = [t][t^{-1}][t][t^{-1}] = [t][t^{-1}] = \epsilon_t.$$

O que mostra a igualdade.

(ii) Usando novamente 1, temos que

$$[t]\epsilon_s = [t][s][s^{-1}] = [ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][t] = \epsilon_{ts}[t].$$

(iii) Por sua vez, usando a propriedade (ii) logo acima, temos

$$\epsilon_t\epsilon_s = [t][t^{-1}]\epsilon_s = [t]\epsilon_{t^{-1}s}[t^{-1}] = \epsilon_{t^{-1}s}[t][t^{-1}] = \epsilon_s\epsilon_t.$$

Com essa proposição provada, é possível caracterizar os elementos de $S(G)$ da seguinte forma:



Proposição 3. Cada elemento $\alpha \in S(G)$ admite uma decomposição

$$\alpha = \epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s],$$

em que $n \geq 0$ e r_1, \dots, r_n, s são elementos de G . Além disso,

- (i) $r_i \neq r_j$ quando $i \neq j$,
- (ii) $r_i \neq s$ e $r_i \neq e$ para todo i .

Demonstração. (EXEL, 1998, Proposição 2.5) ■

Quando α pode ser escrito da forma $\alpha = \epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s]$, tal que as condições da Proposição 3 são cumpridas, dizemos que α está na forma padrão.

Proposição 4. Para cada $\alpha \in S(G)$, temos $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$ e $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$.

Demonstração. Seja $\alpha = \epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s]$. Daí temos que

$$\alpha\alpha^*\alpha = \epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s][s^{-1}]\epsilon_{r_n} \cdots \epsilon_{r_1} \epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s],$$

como os ϵ_{r_i} são idempotentes e comutam e usando 1, temos que

$$\alpha\alpha^*\alpha = \epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s][s^{-1}][s] = \alpha.$$

A outra igualdade pode ser obtida de forma análoga. ■

Com isso, a única coisa que resta para mostrar que $S(G)$ é, de fato, um semigrupo inverso é que o elemento α^* é o único que satisfaz as propriedades mostradas na Proposição 3. Para concluir isso, será necessário enunciar alguns outros resultados.

Podemos chamar de representação, um homomorfismo de $S(G)$ em um semigrupo. A representação mais básica que pode-se definir é a aplicação $\partial : S(G) \rightarrow G$ dada por $\partial([t]) = t$. Refere-se a $\partial(\alpha)$ como o grau de α . É importante perceber que

$$\partial(\epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s]) = \partial([r_1])\partial([r_1^{-1}]) \cdots \partial([r_n])\partial([r_n^{-1}])\partial([s]) = s$$

Seja $P_e(G)$ conjunto de todos os subconjuntos finitos de G que contém o elemento neutro e . Para cada $t \in G$, podemos considerar $\phi_t : P_e(G) \rightarrow P_e(G)$ definida por

$$\phi_t(E) = tE \cup \{e\}.$$

É fácil ver que a aplicação $\phi : G \rightarrow \mathcal{F}(P_e(G))$, definida por $\phi(t) = \phi_t$, com $t \in G$, satisfaz as condições (i) - (iii) da Proposição 1 existe uma única representação $\Lambda : S(G) \rightarrow \mathcal{F}(P_e(G))$ tal que $\Lambda([t]) = \phi_t$.

Com isso, agora é possível mostrar a unicidade da decomposição dos elementos de $S(G)$.

Proposição 5. Cada α em $S(G)$ apresenta uma única decomposição padrão

$$\alpha = \epsilon_{r_1} \cdots \epsilon_{r_n} [s]$$

a menos da ordem dos ϵ_{r_i} 's.

Demonstração. Note que $\Lambda(\alpha)([e]) = \{r_1, \dots, r_n, s, e\}$ e também $\partial(\alpha)$. Daí, suponha que α admita uma outra forma padrão tal que $\alpha = \epsilon_{t_1} \cdots \epsilon_{t_m} [u]$, assim, por meio das representações, teríamos $u = s$ e $\{r_1, \dots, r_n, s, e\} = \{t_1, \dots, t_m, u, e\}$. Daí, é fácil ver que

$$\{r_1, \dots, r_n\} = \{t_1, \dots, t_m\}$$

o que nos dá o resultado. ■

Munidos desses resultados, é possível mostrar a unicidade do elemento α^* para cada α , o que conclui que para cada grupo G , $S(G)$ é um semigrupo inverso ((EXEL, 1998, Teorema 3.4)).

Por sua vez, o próximo resultado, encontrado em (EXEL, 1998, Proposição 4.1), estabelece condição para que uma aplicação $\theta : G \rightarrow \mathcal{I}(X)$ defina uma ação parcial.

Proposição 6. *Seja G um grupo e X um conjunto. Uma aplicação $\theta : G \rightarrow \mathcal{I}(X)$ será uma ação parcial se, e somente se, para todo $s, t \in G$, tivermos*

(i) $\theta_s \theta_t \theta_{t^{-1}} = \theta_{st} \theta_{t^{-1}}$

(ii) $\theta_e = id_X$

Nesse caso, θ também satisfaz

(iii) $\theta_{s^{-1}} \theta_s \theta_t = \theta_{s^{-1}} \theta_{st}$

Com isso, resultado principal pode ser enunciado.

Teorema 1. *Dado um grupo G e um conjunto X , existe uma correspondência biunívoca entre as ações parciais de G em X e as ações de $S(G)$ em X .*

Demonstração. Pela Proposição 1, homomorfismos de $S(G)$ em $\mathcal{I}(X)$ tem correspondência biunívoca com aplicações de G em $\mathcal{I}(X)$, satisfazendo as propriedades (i), (ii) e (iii) dessa mesma proposição. Por outro lado, a Proposição 6 mostra que essas aplicações correspondem a ações parciais de G em X . ■

4. Conclusões

Uma vez desenvolvidos os resultados preliminares, foi possível verificar o processo que mostra como as ações parciais de G em X correspondem de forma um para um com as ações do semigrupo inverso $S(G)$ em $\mathcal{I}(X)$.

Agradecimentos

Agradeço especialmente ao grupo PET Matemática e Estatística - UFCG e em geral ao PET/FNDE/MEC por proporcionar os recursos que possibilitaram a realização desse projeto.

Referências

DOKUCHAEV, M.; EXEL, R. Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 357, n. 5, p. 1931–1952, 2005. Citado na página 1.

EXEL, R. Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 126, n. 12, p. 3481–3494, 1998. Citado na página 3.

Uma Introdução À Dinâmica Do Tráfego

Uma Introdução à Dinâmica do Tráfego

Maria Vitória de Barros Nascimento¹ - maria.vitoria.nascimento@aluno.uepb.edu.br
Emanuela Régia de Sousa Coelho¹ - emanuelacoelho@servidor.uepb.edu.br

¹Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: O presente trabalho apresenta uma introdução à dinâmica do tráfego, de modo a utilizar resultados básicos de Equações Diferenciais Ordinárias. Para o desenvolvimento desse texto, nos utilizamos de Mccartney e Carey (2009), Pipes (1953) e McCartney e Gibson (2006) e tentamos uma abordagem didática dos mesmos. Inicialmente, apresentamos o modelo em que há apenas dois carros e o primeiro segue o segundo e discutimos o caso em que o motorista de trás tem o pensamento muito rápido. Em seguida, estudamos a situação em que temos uma fila com n carros e discutimos o problema quando os carros estão parados e começam a seguir, em sequência, um dos carros que está se movendo.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Dinâmica do Tráfego; Modelagem Física

1. Introdução

Muitos dos fenômenos físicos são baseados em relações entre o fenômeno a ser analisado e taxas segundo as quais ele acontece. Essas relações, muitas vezes, podem ser modeladas através de Equações Diferenciais e estudadas a partir do comportamento das soluções da equação relacionada. Para esse trabalho, propomos um estudo introdutório sobre o fenômeno dado pela Dinâmica do Tráfego Automobilístico. A abordagem utilizada aqui é baseada, essencialmente, em Mccartney e Carey (2009) e Pipes (1953).

Para estudar a dinâmica existente na linha de tráfego composta por dois veículos, por meio das equações diferenciais, considera-se que os movimentos dos veículos são controlados por uma “lei de separação” idealizada. Essa lei considera que cada veículo deve manter uma certa “distância de seguimento” prescrita do veículo anterior. Esta distância é a soma de uma distância proporcional à velocidade do veículo seguinte e uma distância mínima de separação quando os veículos repousam. De acordo com Pipes (1953), quando o semáforo num cruzamento fica verde, os veículos que estão em uma fila, controlados por ele, não começam a se mover como uma unidade, mas como uma onda de “partida”. Observou-se que a velocidade desta onda tem o valor constante aproximado de 50km/h ao longo da fila de veículos.

Seguindo essa ideia, uma instituição de normatização de tráfego americana sugeriu que uma boa distância para seguir outro veículo, de modo seguro, é dada pelo comprimento de um carro para cada 16km/h de velocidade. Essa norma baseia-se em milhares de testes e na observação de inúmeros acidentes, os quais levaram a conclusão de que dadas as características psicológicas humanas e as muitas distrações encontradas durante a condução, pode-se levar um segundo inteiro para que os olhos do motorista vejam que o colega à frente pisou no freio e para que seu cérebro direcione o pé direito para sair do acelerador e pisar nos freios. É provável que, durante este curto período, o veículo continue a se deslocar sem alterar sua velocidade e, portanto, deve-se manter uma distância segura entre os veículos, de modo que se possa compensar esse tempo.

Assim, o objetivo da presente discussão é apresentar um estudo introdutório do ponto de vista matemático da dinâmica de uma fila de tráfego que resulta na suposição de que os motoristas dos vários veículos da fila obedecem a uma regra estabelecida. Com isso, as equações do sistema são obtidas. O modelo matemático resulta em uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que pode ser resolvida usando técnicas padrões como fator integrante, utilizando uma função complementar específica ou a Transformada de Laplace. Para detalhes sobre cada um dos métodos mencionados recomendamos Boyce e Dippina (2015) e Santos (2022).

2. Metodologia

Este estudo trata-se de uma apresentação didática dos resultados estudados por Mccartney e Carey (2009), Pipes (1953) e McCartney e Gibson (2006).

3. Resultado e discussão

Na primeira formulação do modelo apresentada aqui, vamos considerar que o motorista do carro que está seguindo outro ajusta sua velocidade de acordo com a velocidade relativa entre seu carro e o carro da frente. Esse fenômeno pode ser descrito por

$$\frac{d^2x_1(t+T)}{dt^2} = \lambda \left[\frac{dx_0(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right] \quad (1)$$

em que $x_0(t)$ é a posição do carro líder e $x_1(t)$ é a posição do carro seguinte no instante de tempo t ; T é o tempo de reação do motorista que está atrás. Este tempo é necessário para que o motorista do carro que segue responda a uma mudança no comportamento do carro líder; λ é o coeficiente de sensibilidade. Quanto maior for o valor, maior será o tempo de reação do motorista seguinte à velocidade relativa entre os veículos. Segundo McCartney e Carey (2009), experimentos realizados pela empresa americana General Motors, na década de 50, indicam que λ está entre $0,3s^{-1}$ e $0,4s^{-1}$. Para a nossa análise, vamos considerar λ uma constante.

Destacamos que a solução de (1) pode ser encontrada através da Transformada de Laplace, conforme feito em Pipes (1953), mas não vamos apresentá-la aqui, uma vez que o objetivo é uma discussão introdutória.

3.1 O modelo simples: Motorista de Pensamento Rápido

Uma forma de simplificar a equação (1) é assumir que o motorista do carro que está atrás pensa muito rapidamente e, com isso, considerar $T = 0$. Isso dá origem ao Modelo de Motorista de Pensamento Rápido:

$$\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} = \lambda \left[\frac{dx_0(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right] \quad (2)$$

Podemos reescrever a equação (2) em termos das velocidades dos carros. Como a velocidade do carro líder é dada por $\frac{dx_1}{dt}(t)$ e a velocidade do carro de trás é dada por $\frac{dx_0}{dt}(t)$, então se u_1 e u_0 são as velocidades dos carros líder e de trás, respectivamente, segue que

$$\frac{du_1}{dt}(t) + \lambda u_1(t) = \lambda u_0(t) \quad (3)$$

Dada a velocidade $u_0(t)$ do carro líder no instante de tempo t , podemos resolver (3) para encontrar a velocidade, $u_1(t)$, do carro seguinte no instante t .

3.1.1 Hipótese Adicional: O motorista da frente tem ótimos freios

Aqui, vamos considerar dois carros dirigindo em uma estrada com velocidade constante igual U_0 (dada em ms^{-1}) e separados por uma distância de D metros. No tempo $t = 0$ o motorista do carro líder freia bruscamente e para instantaneamente (ótimos freios!!). Assim, para $t > 0$, $u_0 = 0$. Nesse caso, a solução é encontrada resolvendo (3) sujeito à condição $u_0 = 0$ e $u_1(0) = U_0$, ou seja, recaímos no Problema de Valor Inicial

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt}(t) + \lambda u_1(t) = 0 \\ u_1(0) = U_0 \end{cases}$$

A solução é dada pelo método do fator integrante, de modo que

$$u_1(t) = U_0 e^{-\lambda t}, t > 0. \quad (4)$$

Uma vez que u_1 é a velocidade, a distância percorrida, d , pelo carro de trás após a parada do carro líder pode ser encontrada integrando (4) de $t = 0$ a ∞ , ou seja,

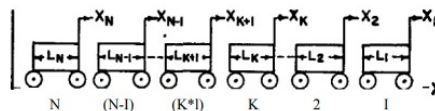
$$d = \int_0^{\infty} U_0 e^{-\lambda t} dt = \frac{U_0}{\lambda} \quad (5)$$

A partir de (4), para que o carro pare completamente, o tempo t tende a ∞ , ou seja, embora o Motorista de Raciocínio Rápido pense rápido, leva uma quantidade infinita de tempo para o carro pare completamente. Por outro lado, de (5), mesmo levando um tempo infinito para parar, ele o faz a uma distância finita. A equação (5) também nos dá um controle interpretativo do coeficiente de sensibilidade λ : o modelo prevê que λ é inversamente proporcional à distância de parada, d . Assim, para evitar colisão, os dois veículos devem estar constantemente a uma distância $D > U_0/\lambda$.

3.2 Considerando uma Fila de Carros

Em vez de apenas dois carros na estrada, agora vamos considerar o caso em que temos uma longa fila de veículos, cada um seguindo o motorista diretamente a sua frente como na Figura 1

Figura 1: Fila de Carros



Fonte: Pipes (1953)

Supondo que todos os motoristas e carros sejam idênticos (ou seja, todos podem ser descritos pelo mesmo coeficiente de sensibilidade, λ) a equação (3) pode ser generalizada de modo que a velocidade do n -ésimo carro, u_n , seja dada pela solução de

$$\frac{du_n}{dt} + \lambda u_n = \lambda u_{n-1} \quad (6)$$

De (6), uma vez que o comportamento do carro líder, $u_0(t)$, é dado, pode-se avaliar o comportamento restante dos outros carros da fila.

Uma variação do problema acima, apresentado em McCartney e Gibson (2006), acontece quando tem-se n veículos numa fila, de modo que o último veículo está seguindo o primeiro. Nesse caso, o problema é reescrito da forma

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \lambda(u_n - u_1) \\ \frac{du_m}{dt} = \lambda(u_{m-1} - u_m), \text{ para } 2 \leq m \leq n \end{cases} \quad (7)$$

Nesse caso, associamos o problema a o seguinte problema matricial

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

ou seja,

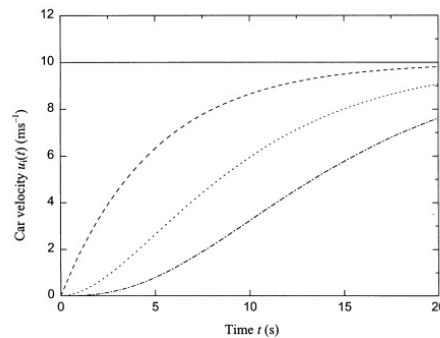
$$U' = AU,$$

com U e A dados em (8). Esse problema pode ser resolvido encontrando os autovalores do operador A e seus respectivos autovetores.

3.2.1 Seguindo um carro líder

Retornando a (6), consideremos uma fila de veículos inicialmente parados, separados por uma distância D . Um carro que se move a uma velocidade constante, U_0 , passa pelo primeiro veículo, que imediatamente começa

Figura 2: Movimento de uma fila de carros



Fonte: Mccartney e Carey (2009)

a segui-lo. O segundo carro passa a seguir o primeiro. O terceiro passa a seguir o segundo e assim por diante. A figura (Figura 1), abaixo, ilustra a movimentação.

Na imagem, o carro líder (linha sólida) se desloca com velocidade constante, $U_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$. O movimento dos três primeiros carros seguintes é descrito pelas linha tracejada, linha pontilhada e linha tracejada - pontilhada, respectivamente, com coeficiente de sensibilidade $\lambda = 0,2 \text{ s}^{-1}$.

Este problema equivale a resolver (6) com $u_0(t) = U_0$ e condição inicial $u_k(0) = 0, k = 1, 2, 3 \dots, n$. A partir de (6), o movimento do primeiro carro é dado por

$$\frac{du_1}{dt} + \lambda u_1 = \lambda U_0 \quad (9)$$

Cuja solução, sujeita a $u_1(0) = 0$, é dada por

$$u_1(t) = U_0(1 - e^{-\lambda t}). \quad (10)$$

Substituindo (10) em (6), o movimento do segundo carro é dado pela solução de

$$\frac{du_2}{dt} + \lambda u_2 = \lambda U_0(1 - e^{-\lambda t}) \quad (11)$$

E, resolvendo (11) sujeito a $u_2(0) = 0$, obtém - se

$$u_2(t) = U_0 - U_0(1 + \lambda t)e^{-\lambda t}. \quad (12)$$

Da mesma forma, encontramos u_3 dada por

$$u_3(t) = U_0 - U_0 \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} \right) e^{-\lambda t}. \quad (13)$$

De modo geral, obtemos um resultado geral da forma:

$$u_k(t) = U_0 - U_0 e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, 1 \leq k \leq n. \quad (14)$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (u_k(t)) = U_0, \forall k.$$

Logo, todos os veículos estão viajando na mesma velocidade que o motorista líder.

Por fim, podemos encontrar a distância, $x_{k,k+1}(t)$ entre o k -ésimo e o $k + 1$ -ésimo veículos, integrando a diferença entre as velocidades dos dois carros, ou seja,

$$x_{k,k+1}(t) = \int_0^t (u_k(s) - u_{k+1}(s)) ds$$

e, por (6) e do fato de $x_{k,k+1}(0) = D$, obtemos

$$x_{k,k+1}(t) = D + \frac{1}{\lambda} u_{k+1}(t).$$

E, fazendo $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$x_{k,k+1}(t) \rightarrow D + \frac{1}{\lambda} U_0,$$

ou seja, o modelo conclui que os carros se mantêm a uma mesma distância ao longo da viagem.

4. Conclusões

O estudo das Equações Diferenciais é extremamente importante para o trato com diversas áreas, especialmente quando nos referimos a modelagem de fenômenos físicos. Apresentamos aqui, considerações introdutórias sobre Dinâmica de Tráfego, através de modelos simples, que servem de base para quem deseja se aprofundar no tema, bem como serve como aplicação interessante para ser estudada num primeiro curso de Equações Diferenciais Ordinárias. Destacamos que modelos mais realistas e, portanto, mais complexos já são estudados na literatura e esperamos que este trabalho incentive a busca por estudá-los.

Referências

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Citado na página 1.
- MCCARTNEY, M.; CAREY, M. Follow that car! investigating a simple class of car following model. *Teaching Mathematics and Its Applications*, p. 83–87, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 4.
- MCCARTNEY, M.; GIBSON, S. Differential equations, traffic dynamics and the n roots of unity. *The Mathematical Gazette*, Cambridge University Press, v. 90, n. 519, p. 502–505, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 3.
- PIPES, L. A. An operational analysis of traffic dynamics. *Journal of Applied Physics*, p. 274–281, 1953. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 3.
- SANTOS, R. J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2022. Citado na página 1.

Teorema Do Ponto Fixo De Banach E Algumas Aplicações

Teorema do Ponto Fixo de Banach e Algumas Aplicações

Thiago Ferreira da Cruz¹ - thiagofc781@gmail.com
Romildo Nascimento de Lima² - romildo@mat.ufcg.br

¹UFCEG/CCT/UAMAT/ Bolsista PET-Matemática-UFCEG/FNDE

Resumo: A Topologia tem um papel extremamente relevante na ligação e interação com todas as áreas da Matemática, em especial, com a Análise. Um dos grandes resultados vistos na nesta área consiste no Teorema do Ponto Fixo de Banach. Traremos neste trabalho, algumas aplicações deste Teorema para demonstrar existência e unicidade de soluções para Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Integrais, além de demonstrar o Teorema da Função Implícita. Para realização deste estudo foram feitas pesquisas bibliográficas e leituras em livros textos. Os conhecimentos de tais pesquisas são consolidados através de seminários realizados semanalmente. Os resultados aqui demonstrados são possíveis quando trabalhamos com contrações em espaços métricos completos, uma vez que, o Teorema do Ponto Fixo de Banach nos garante a existência de um único ponto fixo para tal contração. As principais referências utilizadas foram (HONIG, 2011), (LIMA, 2009), (LIMA, 2005) e (SCARDUA, 2015).

Palavras-chave: Ponto Fixo; Aplicações; Existência e unicidade de solução.

1. Introdução

Dentro da Matemática, a Topologia tem um papel extremamente relevante na ligação e interação com todas as áreas da Matemática, tratando-se de uma ferramenta indispensável ao estudo de seus mais diversos ramos. Neste trabalho, estudamos uma aplicação na Análise Real, especificamente, o famoso Teorema do Ponto Fixo de Banach. Iremos apresentar algumas aplicações envolvendo este resultado, como o Teorema de Picard, existência e unicidade de soluções de Equações Integrais de Fredholm e o Teorema da Função implícita. Para realização deste trabalho foram necessários estudos sobre: espaços métricos, contrações, sequências, função lipschitziana, ponto fixo, espaços métricos completos etc.

2. Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido a partir do estudo realizado na Iniciação Científica, ainda em andamento, que é uma das atividades do PET-Matemática-UFCEG, sendo desenvolvida através de seminários semanais expostos pelo aluno em reuniões com o professor orientador. Nestes seminários, orientador e orientando debatem sobre um assunto previamente determinado. Para estudo dos temas propostos na atividade foram feitas leituras de livros textos e revisão bibliográficas.

3. Resultado e discussão

Teorema 1. (Teorema do Ponto Fixo de Banach) Toda contração $f : M \rightarrow M$, de um espaço métrico completo M , possui um único ponto fixo. Dado qualquer ponto $x_0 \in M$, a sequência $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$, \dots , $x_n = f^n(x_0)$, \dots converge para o ponto fixo de f .

Demonstração. Tomando arbitrariamente $x_0 \in M$ e pondo $x_n = f(f^{n-1}(x_0))$. Mostremos que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Por hipótese, f é uma contração, logo para quaisquer $x, y \in M$ temos

$$d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y),$$

com $0 < k < 1$. Então, dados $x_1, x_2 \in M$

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq k \cdot d(x_0, x_1) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq k \cdot d(x_0, x_1).$$

Continuando o processo sucessivamente e utilizando indução, chegamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n \cdot d(x_0, x_1),$$



para todo $n \in \mathbb{N}$. Da desigualdade triangular temos,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}).$$

Logo, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+p-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) &\leq k^n \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1}) \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Note que $(1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1})$ é uma série geométrica, com soma parcial $\frac{1 - k^p}{1 - k}$, assim

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq k^n \left(\frac{1 - k^p}{1 - k} \right) \cdot d(x_0, x_1) \leq \frac{k^n}{1 - k} \cdot d(x_0, x_1) \\ \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) &\leq \frac{k^n}{1 - k} \cdot d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$, tendo em vista que $0 < k < 1$, temos que k^n tende a zero, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+p}) = 0$$

Assim, (x_n) é uma sequência de Cauchy. Sendo M completo, tem-se que toda sequência de Cauchy é convergente, ou seja, existe $x \in M$ tal que $x = \lim x_n$. Ainda mais,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x \\ \Rightarrow f(x) &= x, \end{aligned}$$

isto é, x é um ponto fixo de f .

Basta provarmos a unicidade. Ora, suponha que existem $x, y \in M$, com $x \neq y$, tais que $f(x) = x$ e $f(y) = y$ então

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y) < d(x, y),$$

um absurdo. Portanto, existe um único ponto fixo. ■

Como consequência do teorema anterior, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.2. Seja $T : X \rightarrow X$ tal que, para algum m , a iterada T^m é uma contração. Então T tem um e um só ponto fixo.

Teorema 2. (Teorema de Picard) Seja f contínua e lipschitziana com relação à segunda variável em $I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em $I_a \times B_b$, existe uma única solução de

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

em I_α , onde $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$.

Demonstração. Se f é lipschitziana na segunda variável, então existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, z_1) - f(t, z_2)| \leq K|z_1 - z_2|.$$

Considere o espaço métrico completo $E = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$. Seja $u \in E$, defina $Tu : E \rightarrow E$ por

$$(Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Note que, Tu é contínua, pois é diferenciável. Ademais, $T(E) \subset E$. De fato, para todo $t \in I_\alpha$ tem-se

$$|(Tu)(t) - x_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Logo, $Tu \in E$. Agora, observe que dados $u, v \in E, t \in I_\alpha$, provemos que

$$|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \frac{K^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Para $m = 1$ é válido pois

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \leq K \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \leq K|t - t_0| \cdot \|u - v\|.$$

Suponha que o resultado é válido para um determinado m , isto é,

$$|(T^m u)(t) - (T^m v)(t)| \leq \frac{K^m |t - t_0|^m}{m!} \|u - v\|,$$

provemos que vale para $m + 1$.

Com efeito,

$$|(T^{m+1} u)(t) - (T^{m+1} v)(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, T^m u(s)) - f(s, T^m v(s))| ds \leq K \int_{t_0}^t |(T^m u)(s) - (T^m v)(s)| ds$$

por hipótese de indução, segue

$$|(T^{m+1} u)(t) - (T^{m+1} v)(t)| \leq \frac{K^{m+1}}{m!} \int_{t_0}^t |s - t_0|^m ds = \frac{K^{m+1}}{m!} \cdot \frac{|t - t_0|^{m+1}}{(m+1)} = \frac{K^{m+1} |t - t_0|^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Portanto, o resultado é válido para qualquer $m \in \mathbb{N}$. Logo, podemos concluir que

$$\|(T^m u) - (T^m v)\| \leq \frac{K^m \alpha^m}{m!} \|u - v\|,$$

como $\frac{K^m \alpha^m}{m!} \rightarrow 0$, pois o crescimento fatorial é maior que o exponencial, assim, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que T^m será uma contração, logo o resultado segue do Corolário 1.1. Temos que T terá um único ponto fixo que é solução do P.V.I. inicial. ■

Teorema 3. (Equação Integral de Fredholm) Consideremos a equação integral, conhecida como equação integral de Fredholm, da seguinte forma

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)y(s) ds$$

onde $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $\|k\| \leq M$. Então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, dada $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ existe uma e só uma $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, que é uma solução da equação integral.

Demonstração. Tomemos $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ que é um espaço métrico completo. Seja $T : E \rightarrow E$ tal que

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s)x(s) ds.$$

onde $t \in [a, b]$. Mostremos que T é uma contração.

De fato, dados $u, v \in E$ temos

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| = \left| \lambda \int_a^b k(t, s)[u(s) - v(s)] ds \right|.$$

Pela propriedade de norma segue

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &\leq |\lambda| \left| \int_a^b k(t, s)[u(s) - v(s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |k(t, s)[u(s) - v(s)]| ds \\ &\leq |\lambda| \int_a^b \|k\| \cdot |u(s) - v(s)| ds \end{aligned}$$

Como $\|k\| \leq M$ e $|u(s) - v(s)| \leq \|u - v\|$ para todo $s \in [a, b]$ temos

$$\begin{aligned} |(Tu)(t) - (Tv)(t)| &\leq |\lambda| \int_a^b M \|u - v\| ds \\ &= |\lambda| M \|u - v\| \int_a^b ds \\ &= |\lambda| M \|u - v\| (b - a). \end{aligned}$$

Por hipótese, temos $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, isto é, $0 < c = |\lambda| M (b - a) < 1$, temos

$$|(Tu)(t) - (Tv)(t)| \leq c \|u - v\|.$$

Por definição de supremo, temos

$$\|Tu - Tv\| \leq c \|u - v\|.$$

com $0 < c < 1$, ou seja, T é uma contração.

Logo, pelo Teorema do Ponto fixo de Banach, existe uma e só uma função $u \in E$ tal que

$$(Tu)(t) = u(t),$$

isto é,

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)u(s) ds.$$

Teorema 4. (Teorema da Função Implícita) Seja $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e derivável em relação à segunda variável. Suponhamos que existam constantes reais m, M tais que $0 < m \leq f'_y(x, y) \leq M$, para qualquer $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. Então existe uma e uma só função $u \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tal que $f(x, u(x)) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Seja $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ com a distância usual. Para $u \in E$, seja Tu definida por

$$(Tu)(x) = u(x) - \frac{1}{M} f(x, u(x)).$$

Note que $Tu \in E$ pois é a soma de funções contínuas. Ademais, se $u, v \in E$ e $x \in [a, b]$ temos

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| = \left| u(x) - v(x) - \frac{1}{M}[f(x, u(x)) - f(x, v(x))] \right|$$

Pelo Teorema do valor médio, sendo f contínua e derivável na segunda varável, então existe $c \in [u(x), v(x)]$ tal que

$$f(x, u(x)) - f(x, v(x)) = (u(x) - v(x)) \cdot f'_y(x, c).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |(Tu)(x) - (Tv)(x)| &= \left| u(x) - v(x) - \frac{1}{M}[u(x) - v(x)]f'_y(x, c) \right| \\ &= \left| [u(x) - v(x)] \cdot \left(1 - \frac{f'_y(x, c)}{M} \right) \right|. \end{aligned}$$

Por hipótese, temos $0 < m \leq f'_y(x, y) \leq M$, assim

$$0 \leq 1 - \frac{f'_y(x, c)}{M} \leq 1 - \frac{m}{M} < 1.$$

Daí, segue

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \leq |u(x) - v(x)| \left(1 - \frac{m}{M} \right) \leq \left(1 - \frac{m}{M} \right) \|u - v\|.$$

E, portanto,

$$\|Tu - Tv\| \leq \left(1 - \frac{m}{M} \right) \|u - v\|.$$

Concluimos que T é uma contração, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma e só uma u tal que $(Tu)(x) = u(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &= u(x) - \frac{1}{M}f(x, u(x)) \\ u(x) &= u(x) - \frac{1}{M}f(x, u(x)) \\ f(x, u(x)) &= 0. \end{aligned}$$

■

4. Conclusões

Apresentamos nesse texto, uma demonstração do Teorema do Ponto Fixo, além disso, apresentamos 3 aplicações desse teorema. Devido a importância, bem conhecida, das aplicações apresentadas fica provada a importância do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Esperamos que após o estudo desse resumo, o leitor possa avançar nos estudos da Matemática, em especial, para aqueles interessados no estudo das Equações Diferenciais.

Referências

HONIG, S. C. *Aplicações de Topologia à Análise*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. Citado na página 1.

LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 4ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. Citado na página 1.

LIMA, E. L. *Elementos de Topologia Geral*. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009. Citado na página 1.

SCARDUA, B. *Equações Ordinárias e Aplicações*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015. 282 p. Citado na página 1.



Álgebras De Azumaya

Álgebras de Azumaya

Érica Isabel dos Santos¹ - erica203santos@gmail.com
Josefa Itailma da Rocha² - itailma@mat.ufcg.edu.br

¹Mestranda, Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

²Doutora, Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Neste trabalho, discutiremos sobre as álgebras centrais separáveis ou também como são chamadas de Álgebras de Azumaya, devido as fortes contribuições do matemático japonês Goro Azumaya em 1951 no estudo deste tipo de álgebra. Nosso objetivo é descrever as principais características e propriedades dessas álgebras. A partir de uma R -álgebra A , podemos formar a álgebra envolvente $A^e = A \otimes_R A^o$, onde A tem uma estrutura de A^e -módulo à esquerda e esta estrutura induz um homomorfismo de R -álgebras $\varphi : A^e \rightarrow \text{Hom}_R(A, A)$. No caso em que A é uma Álgebra de Azumaya sobre R , temos que φ é um isomorfismo, resultado este que se destaca como um dos mais notórios.

Palavras-chave: Álgebras separáveis; Álgebras de Azumaya; Módulos.

1. Introdução

Este trabalho aborda as álgebras separáveis sobre um anel comutativo arbitrário, trazendo em especial o estudo das Álgebras de Azumaya, com base em (DEMEYER; INGRAHAM, 1971), tendo como objetivo geral descrever as principais características e propriedades desse tipo de álgebra. Podemos caracterizar as álgebras separáveis por meio dos módulos projetivos. Um R -módulo P diz-se projetivo se, dados R -módulos M e N , um epimorfismo $f : M \rightarrow N$ e um homomorfismo $g : P \rightarrow N$, sempre existe um homomorfismo $\bar{g} : P \rightarrow M$ tal que $f \circ \bar{g} = g$. Uma R -álgebra A é chamada projetiva se é projetiva como um R -módulo. Diante disso, dizemos que uma álgebra A sobre um anel comutativo R é separável se A for um módulo projetivo sobre sua álgebra envolvente $A^e = A \otimes_R A^o$.

As álgebras separáveis possuem especificidades muito interessantes. Por exemplo, a separabilidade é preservada sob o produto tensorial, assim como podemos verificar a propriedade transitiva para as álgebras separáveis.

Nosso interesse principal está voltado as álgebras que são centrais e separáveis. Dizemos que A é central se A é um R -módulo fiel e $R \cdot 1$ coincide com o centro de A . Para este estudo, os conceitos de módulo fiel, módulo finitamente gerado e módulo gerador são imprescindíveis. A partir deles, construímos a noção de módulo progerador. Um R -módulo M é um R -progerador se M é finitamente gerado, projetivo e um gerador sobre R . Assim, considerando A como uma R -Álgebra de Azumaya, podemos caracterizá-la através dos módulos progeradores e do homomorfismo de R -álgebras $\varphi : A^e \rightarrow \text{Hom}_R(A, A)$.

Além disso, temos que uma R -álgebra A é separável se, e somente se, A é separável sobre seu centro $C(A)$ e $C(A)$ é separável sobre R . Este resultado mostra que o estudo da separabilidade pode ser dividido em dois casos: álgebras comutativas e álgebras centrais, de modo que há uma relação entre eles.

2. Metodologia

Realizamos uma pesquisa bibliográfica, pois a principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente e também é indispensável nos estudos históricos (GIL, 2008). As obras de (DEMEYER; INGRAHAM, 1971) e (MILIES, 2018) foram essenciais para a elaboração do trabalho e permitiram a exposição de ideias que enriqueceram a discussão sobre as álgebras separáveis.

Com a pesquisa, buscamos apresentar as principais características das álgebras separáveis e, em particular, das Álgebras de Azumaya, trazendo caracterizações destes tipos de álgebras através dos módulos projetivos e progeradores, por exemplo.

3. Resultado e discussão

Antes de apresentarmos a noção de álgebra separável, vamos trazer alguns conceitos preliminares, que podem ser encontrados em (MILIES, 2018), e são essenciais para a compreensão do tema. A definição de módulo não exige que o anel R seja comutativo, mas para o nosso estudo em todo o texto R denotará um anel comutativo e com unidade.

Um R -módulo P diz-se *projetivo* se, dados R -módulos M e N , um epimorfismo $f : M \rightarrow N$ e um homomorfismo $g : P \rightarrow N$, sempre existe um homomorfismo $\bar{g} : P \rightarrow M$ tal que $f \circ \bar{g} = g$. Dizemos que um R -módulo M é *finitamente gerado* se existe uma família $\{x_1, \dots, x_n\}$ de elementos de M tal que todo outro $x \in M$ pode ser escrito na forma $x = \sum_i^n \lambda_i x_i$ com $\lambda_i \in R$. Dado um R -módulo M , o conjunto

$$\text{Anl}_R(M) = \{a \in A \mid a \cdot m = 0, \forall m \in M\}$$

é chamado de *anulador* do módulo M . De forma análoga, define-se anulador de um subconjunto de M . Em particular, se $\text{Anl}(M) = \{0\}$, M diz-se um A -módulo *fiel*. O conjunto

$$\mathcal{T}_R(M) = \left\{ \sum_i f_i(m_i), f_i \in \text{Hom}_R(M, R), m_i \in M \right\}$$

é um ideal de R , chamado de *ideal traço* de M . Dizemos que um R -módulo M é um *gerador* se $\mathcal{T}_R(M) = R$. Um R -módulo M é um *R -progerador* se M é finitamente gerado, projetivo e um gerador sobre R .

Sejam M, N e P três R -módulos e $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P$ R -homomorfismos. Diz-se que o diagrama:

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

é uma sequência exata de ordem 2 em N se $\text{Im}(f) \subset \text{ker}(g)$. Em particular, se $\text{Im}(f) = \text{ker}(g)$ o diagrama diz-se *sequência exata* em N .

Outra ideia fundamental é a de soma direta interna. A noção de soma direta interna está fortemente associada a ideia vista em espaços vetoriais. Um R -módulo M é *soma direta interna* de uma família $\{M_i\}_{i \in I}$ de submódulos se todo elemento de M se escreve, de uma única forma, como soma de elementos dos submódulos M_i . Com isso, podemos apresentar a ideia de somando direto de um módulo.

Seja N um submódulo de um R -módulo M . Diz-se que um submódulo $N_1 \subset M$ é um *suplementar* de N se $M = N \oplus N_1$. Um submódulo, que admite um suplementar, diz-se um *somando direto* de M .

Agora, estudaremos certas relações entre somas diretas e sequências exatas.

Diz-se que uma sequência exata de R -módulos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

cinde se $\text{Im}(f) = \text{ker}(g)$ é um somando direto de N .

Através dessas definições iniciais, estamos em condições de enunciar a definição de álgebra separável.

Seja A uma R -álgebra. A álgebra $A^e = A \otimes A^o$ é chamada de *álgebra envolvente* de A , onde A^o é o anel oposto de A (A^o tem o mesmo grupo aditivo subjacente de A com a multiplicação $*$ definida por $a * b = ba$, em que ba denota o produto de b com a no anel A). A álgebra A tem uma estrutura de A^e -módulo à esquerda induzida por $(a \otimes b) \cdot x = axb$, para $a, x \in A$ e $b \in A^o$.

Considere a aplicação $\mu : A^e \rightarrow A$ definida por

$$\mu \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

É fácil verificar que μ é um homomorfismo sobrejetor de A^e -módulos e que se A é uma álgebra comutativa, então μ é um homomorfismo de anéis. Denotando por J o núcleo de μ , por (DEMEYER; INGRAHAM, 1971), temos que J é o ideal à esquerda gerado por $\{a \otimes 1 - 1 \otimes a, a \in A\}$.

Teorema 1. *Seja A uma R -álgebra. São equivalentes:*

- A é um A^e -módulo projetivo,
- A sequência exata de A^e -módulos à esquerda $0 \rightarrow J \rightarrow A^e \xrightarrow{\mu} A \rightarrow 0$ cinde,
- Existe um elemento $e \in A^e$ tal que $\mu(e) = 1$ e $Je = 0$.

Dizemos que A é uma R -álgebra separável se A satisfaz uma e, portanto, todas as condições do Teorema 1. Observe que o elemento e descrito anteriormente é necessariamente um idempotente, pois

$$e^2 - e = (e - 1 \otimes 1)e \in Je = 0.$$

Este elemento é chamado de idempotente de separabilidade de A . Veja que um idempotente de separabilidade para uma álgebra não reside na própria álgebra, mas sim em sua álgebra envolvente.

A seguir, trazemos alguns exemplos de álgebras separáveis.

Exemplo 2. *O anel R é uma R -álgebra separável. De fato, tomando $e = 1 \otimes 1$, temos que $\mu(e) = 1$ e $Je = 0$, ou seja, e é um idempotente de separabilidade de R sobre R .*

Exemplo 3. *Seja $M_n(R)$ o anel das matrizes $n \times n$ com entradas em R . Denote por e_{ij} a matriz que tem 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais entradas. Fixado j entre 1 e n , considere $e = \sum_{i=1}^n e_{ij} \otimes e_{ji}$. Através de um processo simples, conseguimos provar que e é um idempotente de separabilidade de $M_n(R)$ sobre R .*

O Exemplo 3 ilustra que o idempotente de separabilidade de uma álgebra nem sempre é único. Porém, se A é uma álgebra comutativa, então conseguimos provar a unicidade do idempotente de separabilidade.

Seja A uma R -álgebra e M um A -módulo à esquerda. Dizemos que M é um A/R -módulo bilateral se M é um A - A -bimódulo que é central como R -módulo. Para todo A/R -módulo bilateral M , vamos denotar por M^A o R -submódulo

$$M^A = \{m \in M \mid a \cdot m = m \cdot a, \text{ para todo } a \in A\}.$$

O seguinte resultado pode ser encontrado em (DEMEYER; INGRAHAM, 1971).

Teorema 4. *Para qualquer A/R -módulo bilateral M , $\text{Hom}_{A^e}(A, M) \simeq M^A$ como R -módulos sobre a correspondência $f \mapsto f(1)$, para todo $f \in \text{Hom}_{A^e}(A, M)$.*

Como consequência do Teorema 4, temos que $\text{Hom}_{A^e}(A, A) \simeq C(A)$, onde $C(A)$ representa o centro de A .

As álgebras separáveis possuem uma série de propriedades interessantes que podem ser vistas com mais detalhes em (DEMEYER; INGRAHAM, 1971). Dentre essas propriedades, destacamos a transitividade da separabilidade: Sejam S uma R -álgebra separável e comutativa e A uma S -álgebra separável. Então, A é naturalmente uma R -álgebra e é R -separável. Se, por outro lado, A é uma R -álgebra separável e S é uma R -subálgebra do centro de A , então é separável sobre seu centro. Como consequência desse resultado, temos que se A é uma R -álgebra separável, então A é separável quando considerada como uma álgebra sobre seu centro. Agora, vamos nos dedicar ao estudo desse tipo de álgebra.

Dizemos que A é central se A é um R -módulo fiel e $R \cdot 1$ coincide com o centro de A . Ao lidar com álgebras fiéis, identificamos R com $R \cdot 1$ e, portanto, consideramos R como um subanel do centro de A . Uma R -álgebra A é uma álgebra central separável se A é central e separável sobre R . Também nos referimos a este tipo de álgebra como sendo as Álgebras de Azumaya.

Se A é uma R -Álgebra de Azumaya, então R pode ser visto como uma somando direto de A . Além disso, as Álgebras de Azumaya são fechadas para o produto tensorial, ou seja, se A e B são R -Álgebras de Azumaya, então $A \otimes_R B$ também é uma Álgebra de Azumaya.

Para qualquer R -álgebra A , tem-se que A pode ser considerada como um A^e -módulo à esquerda através do produto

$$(a \otimes b) \cdot x = axb, \text{ para } a, x \in A \text{ e } b \in A^o.$$

Esta estrutura induz um homomorfismo de R -álgebras $\varphi : A^e \rightarrow \text{Hom}_R(A, A)$ definido por

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i\right)(x) = \sum_{i=1}^m a_i x b_i.$$

Com isso, podemos caracterizar as Álgebras de Azumaya a partir dos módulos progeradores e do homomorfismo φ , como mostrado em (DEMEYER; INGRAHAM, 1971, Teorema 3.4).

Teorema 5. *Seja A uma R -álgebra. São equivalentes:*

- A é uma Álgebra de Azumaya,
- A é um A^e -progerador e A é R -central,
- A aplicação $\varphi : A^e \rightarrow \text{Hom}_R(A, A)$ é um isomorfismo.

Por meio da caracterização acima, conseguimos provar os dois resultados a seguir.

Se A é uma Álgebra de Azumaya sobre R , então para qualquer R -módulo M , temos o isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes A)^A & \longrightarrow & M \\ m \otimes 1 & \longmapsto & m \end{array} \quad (1)$$

como R -módulos. Além disso, para qualquer A/R -módulo bilateral N ,

$$\begin{array}{ccc} N^A \otimes A & \longrightarrow & N \\ \sum_i n_i \otimes a_i & \longmapsto & \sum_i n_i a_i \end{array} \quad (2)$$

Além disso, se A é uma Álgebra de Azumaya sobre R , temos que existe uma correspondência biunívoca entre os ideais I de R e os ideais U da álgebra A dada por

$$I \mapsto IA \quad \text{e} \quad U \mapsto U \cap R.$$

De fato, inicialmente, observe que por A ser central, então para todo ideal U de A temos

$$U^A = \{x \in U; ax = xa, \text{ para todo } a \in A\} = U \cap C(A) = U \cap R.$$

Pelos isomorfismos (1) e (2), temos

$$I \simeq (I \otimes A)^A \simeq (IA)^A = IA \cap A \quad (3)$$

e

$$U \cong U^A \otimes A = (U \cap R) \otimes A \simeq (U \cap R)A \quad (4)$$

Sendo A uma Álgebra de Azumaya sobre R e I um ideal de R , temos que $IA \cap R = I$, de acordo com (DEMEYER; INGRAHAM, 1971). Vamos denotar por \mathcal{I} o conjunto dos ideais de R e por \mathcal{U} o conjunto dos ideais de A e considerar as aplicações

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathcal{I} & \rightarrow & \mathcal{U} \\ I & \mapsto & IA \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \psi : \mathcal{U} & \rightarrow & \mathcal{I} \\ U & \mapsto & U \cap R \end{array}$$

Assim, para todo $I \in \mathcal{I}$ e $U \in \mathcal{U}$ temos

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(U) &= \varphi(U \cap R) = (U \cap R)A \stackrel{(4)}{\simeq} U \\ (\psi \circ \varphi)(I) &= \psi(IA) = IA \cap R \simeq I \end{aligned}$$

Logo, a correspondência é bijetora.

Agora, vamos apresentar um resultado que justifica nossa divisão do estudo das álgebras separáveis em casos centrais e comutativos que pode ser encontrado em (DEMEYER; INGRAHAM, 1971, Teorema 3.8).

Teorema 6. *Uma R -álgebra A é separável se, e somente se, A é separável como uma álgebra sobre seu centro e seu centro é uma R -álgebra separável.*

Por fim, destacamos um resultado que fala sobre a Álgebra dos endomorfismos de um R -módulo progerador:

Teorema 7. *Se E é um R -módulo progerador, então o anel dos endomorfismos de E é uma R -álgebra de Azumaya.*

4. Conclusões

O estudo realizado acerca das álgebras separáveis, com destaque para as Álgebras de Azumaya, propiciou uma maior compreensão sobre a temática em questão, de modo que diferentes caracterizações foram apresentadas com o intuito de estabelecer uma relação com os demais conceitos vistos. Através da construção do trabalho, aprofundamos o estudo sobre os módulos projetivos, finitamente gerados, geradores, fiéis, progeradores, entre outros, e observamos propriedades muito interessantes das álgebras separáveis, como a transitiva, por exemplo. Assim, este trabalho, além de contribuir de forma significativa para a construção do conhecimento, integra uma parte da nossa dissertação de mestrado, onde a partir desses conceitos conseguimos provar resultados mais amplos e relacioná-los com outras áreas.

Agradecimentos

À Universidade Federal de Campina Grande e, em particular, a Unidade Acadêmica de Matemática, pela realização da XII Semana de Matemática, evento este que propicia a troca de conhecimento sobre as mais diversas áreas da matemática.

À professora Dra. Josefa Itailma pela orientação para a realização deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

DEMEYER, F.; INGRAHAM, E. *Separable Algebras Over Commutative Rings*. Berlin: Springer Verlag, 1971. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 3 e 4.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Atlas, 2008. Citado na página 1.

MILIES, C. P. *Anéis e módulos*. São Paulo: Editora Livraria de Física, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

Aplicações Das Equações Diferenciais A
Modelos De Crescimento Populacional
E Infectologia

Aplicações das Equações Diferenciais a Modelos de Crescimento Populacional e Infectologia RESUMO EXPANDIDO

Mauricio Silva Bezerra¹ -mauricio.jornalismo@gmail.com
Kelvin Pereira de Sousa Araujo² - kelvin.pereira@estudante.ufcg.edu.br
Alânnio Barbosa Nóbrega³ - alannio@mat.ufcg.edu.br

¹Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Este trabalho faz uma breve apresentação sobre a história das Equações Diferenciais. Com ênfase em algumas aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias à biologia, e destaque para alguns modelos que foram desenvolvidos a partir do século XVIII por Malthus, Verhulst, Gompertz Smith, Goel, Maitra & Montroll e Ayala Ehrenfeld Gilpin. Estes modelos tratam do estudo do crescimento de populações por meio da dinâmica populacional e Equações Diferenciais. Eles nos permite entender como se dá esse crescimento, responder perguntas e fazer previsões. O modelo de Malthus, que recebe esse nome em homenagem ao seu desenvolvedor Thomas Robert Malthus, é o primeiro modelo a ser estudado nesse segmento e o mais simples. E que com o passar do tempo outros estudiosos aprimoraram aplicações desse tema em modelos matemáticos, dos quais alguns também são apresentados neste presente trabalho. O estudo mostrado aqui é oriundo de um Projeto de Iniciação Científica. A metodologia utilizada foi a pesquisa bibliográfica.

Palavras-chave: *Equações Diferenciais Ordinárias; Dinâmica Populacional; Equação Logística.*

1. Introdução

O estudo das equações diferenciais tem origem com advento do Cálculo Diferencial e Integral, este campo da Matemática se tornou ao longo dos anos uma das mais importantes áreas de estudo, dando subsídios a outras ciências para tratar problemas que envolvem taxas de variação, tendo sido uma ferramenta crucial para o desenvolvimento da física. Ao realizar o estudo das equações diferenciais, os matemáticos são capazes de desenvolver técnicas, conceitos e modelos que preveem o comportamento desses fenômenos, dos mais simples, até problemas mais complexos, aplicados na ciência e na tecnologia.

A grande motivação para o estudo das equações diferenciais veio por meio da Mecânica Clássica, desde o início do século XVII, e contou com a contribuição de importantes matemáticos como Issac Newton, P.S Laplace, J.B Fourier, C.C Jacobi, H. Poincaré, membros da família Bernoulli e entre outros.

Dentre os vários problemas da Física que podem ser abordados através das equações diferenciais, destacamos: a descrição do movimento dos corpos, propagação de ondas e evolução de sistemas dinâmicos. Além disso, o estudo das equações diferenciais se mostrou uma ferramenta indispensável a outras áreas do conhecimento, como no caso da biologia, onde estas desempenham um papel de destaque na compreensão das dinâmicas populacionais, o que permitiu entre outras coisas o entendimento da propagação de doenças infecto-contagiosas e análise na eficácia de vacinas.

A proposta deste trabalho é estudar as equações diferenciais ordinárias aplicadas à biologia e alguns modelos desenvolvidos a partir do século XVIII por Malthus (1798), Verhulst (1837), Gompertz (1825), Smith (1963), Goel, Maitra & Montroll (1971) e Ayala Ehrenfeld Gilpin (1973), por exemplo.

Especificamente quando estamos estudando o crescimento de populações por meio das equações diferenciais e a dinâmica populacional queremos fazer previsões com o objetivo de aproveitar melhor os recursos disponíveis, ou tomar decisões. Como por exemplo, prever se uma pesca será boa ou má ou se preparar para uma invasão de pernilongos. No entanto, os principais questionamentos a respeito do estudo das equações diferenciais e a



dinâmica populacional são os seguintes

- 1) Quantos seremos na Terra e quantos recursos teremos para as próximas gerações em quantos anos dobraremos de tamanho populacional?
- 2) Teremos alimentos suficiente capaz de suprir todas as nossas necessidades?

2. Metodologia

O presente trabalho foi desenvolvido durante os encontros de Iniciação Científica do Grupo PET-Matemática, e PIBIC sob a orientação do Professor Doutor Alânnio Barbosa Nobrega. A metodologia utilizada foi de pesquisa bibliográfica a partir do estudo de tópicos relacionados ao tema nos livros de Figueiredo e Neves (FIGUEIREDO; NEVES, 2007), Boyce e de Prima (BOYCE; DIPRIMA, 2010) e Bassanezi e Ferreira (BASSANEZI RODNEY CARLOS, 1988). O trabalho consistiu em analisar modelos de crescimento populacional, propagação de doenças infecto contagiosa a partir dos conhecimentos do Cálculo Diferencial e Integral.

3. Resultado e discussão

O primeiro estudioso que tentou estimar o crescimento da população mundial foi Thomas Robert Malthus em seu trabalho publicado e intitulado por "An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society" e publicado em 1798. O artigo foi elaborado a partir das seguintes ideias: Malthus afirmava que o crescimento da população mundial se dava por meio de uma progressão geométrica, caso não fosse controlado, enquanto que os meios de sobrevivência apresentavam um crescimento aritmético.

Com isso ele definiu uma função $p(t)$ sendo o total de uma população em que a taxa de crescimento em um determinado instante t , é definida por $\dot{p}(t)/p(t)$.

O modelo elaborado por Malthus é relativamente simples, isso por que foi considerado que a taxa de crescimento dessa população era constante e definida pela seguinte equação.

$$\frac{dy}{dt} = \lambda p(t). \quad (1)$$

Em que λ era a taxa de crescimento da população. Desse modelo podemos fazer as seguintes observações: nos casos em que a taxa de mortalidade é igual a taxa de natalidade não haveria variação no total da população, no entanto em casos em que houvesse variação tanto na taxa de mortalidade quanto na taxa de natalidade aconteceria o seguinte. Para os valores em que a taxa de mortalidade era menor que a taxa de natalidade a população apresentaria um crescimento exponencial, tendendo para o infinito com a variabilidade do tempo. Nos casos em que a taxa de mortalidade é maior do que a taxa de natalidade a população tende a extinção com o tempo.

O modelo malthusiano apresentou suas limitações, pois não levava em conta os problemas causados por uma superpopulação, tais como a escassez de recursos, porém mostrou-se ideal em estudos que envolviam as populações de países em desenvolvimento e em populações de microorganismos a um curto espaço de tempo.

Um outro modelo bem conhecido proposto por Verhulst em 1837 levava em consideração a presença de alguns fatores inibidores existentes no ambiente externo dessas populações, ou seja, a população teria um crescimento máximo e sustentável quando:

$$P_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) \quad (2)$$

Por outro lado o fator inibidor incorporado a esse modelo fará com que o crescimento se acentue a medida que a população cresce.

A partir da equação de Malthus surge a equação logística, assim denominada em que λ é substituído por uma função $g(t) = a - bp$. Sendo assim a nova equação tem a seguinte característica.

$$\frac{dy}{dt} = (a - bp)p \quad (3)$$

Esse modelo foi utilizado para fazer o estudo de populações da França e da Bélgica em 1834 e em 1920 nos Estados Unidos.

Os modelos matemáticos que estudam a dinâmica populacional também foram importantes para a análise da disseminação de doenças infecto contagiosas e da eficácia de vacinas. O tratamento que Daniel Bernoulli deu ao seu modelo tinha por objetivo analisar o comportamento de uma determinada população em relação ao surto de varíola, um dos grandes problemas sanitários do século XVIII. Em 1760 Bernoulli resolveu estudar a eficácia de um programa de vacinação em que os indivíduos eram submetidos a inoculação.

O modelo seguia algumas etapas, o primeiro caso a considerar seria analisar as pessoas que haviam contraído a doença e sobreviveram adquirindo imunidade pelo resto da vida.

A equação que representaria essa etapa seria a seguinte:

$$\frac{dx}{dt} = -(\beta + \mu(t))x \quad (4)$$

Em que β é a taxa segundo a qual os indivíduos que estão suscetíveis contraem a doença e $\mu(t)$ é a taxa de mortes por qualquer outro motivo que não esteja relacionado a varíola.

Temos também:

$$\frac{dn}{dt} = -v\beta x - \mu(t)n \quad (5)$$

Em que v é a taxa segundo a qual as pessoas contraem a varíola e morrem em decorrência dela e $\frac{dn}{dt}$ é a taxa de mortalidade do conjunto inteiro.

Por fim, destacamos que desde os trabalhos pioneiros de Malthus, Verhust e Bernoulli, vários novos modelos foram propostos na tentativa de aperfeiçoar os anteriores, acrescentando mais elementos à análise do comportamento das populações estudadas. abaixo listamos alguns desses modelos.

Modelo de Gombertz (1825)

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \ln \frac{P_\infty}{P}, \lambda > 0 \quad (6)$$

Modelo de Smith (1963)

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\lambda P(P_\infty - P)}{P_\infty + aP} \quad \lambda \text{ e } a \text{ são constantes positivas;} \quad (7)$$

Modelo de Goel, Maitra e Montrool (1971)

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^a \right] \quad (8)$$

Modelo de Ayala, Ethrenfeld, Gilpin(1973)

$$\frac{dP}{dt} = P (\lambda - aP + be^{-P}) \quad (9)$$

4. Conclusões

Com este trabalho pudemos perceber a importância da matemática no desenvolvimento das ciências como um todo. Ao observar que as equações Diferenciais nos permitem propor modelos para estudar a dinâmica das populações, vemos o quanto o estudo desse tópico tem forte impacto, na biologia, na infectologia, na economia, nas ciências sociais e políticas, entre outros. Deste modo passamos a entender a matemática como uma ciência viva e crucial aos avanços científicos e tecnológicos, para um maior bem estar da sociedade. Ao mesmo tempo tal trabalho nos desafia a entender tópicos mais complexo, na busca de interagir melhor com as outras ciências.

Referências

BASSANEZI RODNEY CARLOS, F. J. W. C. *Equações diferenciais com aplicações*. [S.l.]: HARBRA São Paulo, 1988. Citado na página 2.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010. v. 10. Citado na página 2.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas, 3aEd*. [S.l.]: IMPA Rio de Janeiro, 2007. Citado na página 2.

Explorando Padrões De Mortalidade
Em Campina Grande Comparando O
Modelo Poisson Vs. Binomial Negativo

Explorando Padrões de Mortalidade em Campina Grande Comparando o Modelo Poisson vs. Binomial Negativo

Lucas Manoel Batista de Albuquerque¹ - lucas.albuquerque@aluno.uepb.edu.br

Rodolfo Pereira Franklin¹ - rodolfo.franklin@aluno.uepb.edu.br

Hiago José Andrade de Albuquerque Martins¹ - hiago.martins@servidor.uepb.edu.br

Lucas Cardoso Pereira¹ - lucascardoso@servidor.uepb.edu.br

¹Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Estatística - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Neste estudo, analisamos a mortalidade na Região Metropolitana de Campina Grande, um tema crucial em saúde pública e epidemiologia. Focamos na escolha entre os modelos estatísticos de Binomial Negativa e Poisson para modelar o número de mortes na região. Nossa mudança de abordagem de Binomial Negativa para Poisson visou determinar qual modelo oferece a melhor representação dos dados de mortalidade. A pesquisa envolveu uma análise quantitativa, com dados coletados no site do TABNET e análises realizadas no software R. Três variáveis explicativas - investimento em saúde, número de internações e média da estadia hospitalar - foram consideradas influentes nas taxas de óbitos. A seleção do melhor modelo foi baseada no AIC, com uma ênfase na precisão do ajuste e na simplicidade do modelo. A análise dos resultados revelou que o modelo de Binomial Negativa superou o modelo de Poisson, com um AIC mais baixo, indicando um ajuste superior aos dados. O estudo fornece insights cruciais sobre a modelagem de óbitos na região, contribuindo para a formulação de políticas de saúde e intervenções mais eficazes. Com conclusões alinhadas aos objetivos, este trabalho tem implicações significativas na prática clínica e na formulação de políticas de saúde, buscando melhorar a qualidade de vida na Região Metropolitana de Campina Grande.

Palavras-chave: Mortalidade; Poisson; Binomial Negativa

1. Introdução

O estudo da mortalidade em áreas urbanas desempenha um papel fundamental na análise de questões de saúde pública e epidemiologia. A Região Metropolitana de Campina Grande, como muitas outras regiões, enfrenta desafios relacionados à mortalidade, os quais podem ser influenciados por uma série de fatores, incluindo doenças, condições ambientais e sociais, entre outros determinantes de saúde. Ao abordar a modelagem do número de mortes nessa região, pesquisadores se deparam frequentemente com a necessidade de escolher a abordagem estatística mais adequada para representar a distribuição dos dados. Em nosso trabalho anterior, adotamos o modelo de Binomial Negativo como a estratégia de modelagem inicial. Contudo, neste estudo, buscamos estender nossa análise ao compará-lo com o modelo de Poisson. No presente trabalho, destacamos a mudança na abordagem, passando do modelo de Binomial Negativo para o modelo de Poisson, com o intuito de avaliar qual dessas abordagens oferece uma representação mais precisa do número de mortes na Região Metropolitana de Campina Grande. Tal comparação é fundamental para determinar quais características da distribuição de mortes são melhor capturadas por cada modelo e, conseqüentemente, proporciona insights valiosos para a compreensão da dinâmica da mortalidade na região. Através desta apresentação, discutiremos os resultados obtidos com o modelo de Poisson e as razões que nos levaram a explorar essa nova abordagem. Compreender as diferenças entre o modelo de Binomial Negativo e o modelo de Poisson é fundamental para avaliar sua aplicação em estudos de saúde pública e epidemiologia, contribuindo, assim, para a tomada de decisões informadas e embasadas em evidências.

2. Metodologia

Para atingir os objetivos estipulados, adotamos uma abordagem de pesquisa quantitativa, que envolveu a coleta e análise de dados relevantes. O cerne do estudo reside na utilização das informações disponíveis no site <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/defthtm.exe?sim/cnv/obt10br.def> (TABNET...), que serviu como ponto de partida para a abordagem metodológica empregada. O processo de análise foi conduzido utilizando o software R na versão 4.3.1. A modelagem dos dados foi realizada por meio de técnicas de Modelos Lineares Genera-

lizados (MLG)(CORDEIRO; DEMÉTRIO,) (PAULA,) com uma ênfase na distribuição Binomial Negativa e Poisson, adequadas para o tipo de dado que estamos lidando. Três variáveis explicativas foram selecionadas como fatores influentes nos óbitos da região metropolitana de Campina Grande: o investimento em saúde, o número de internações e a média da estadia das pessoas nos hospitais. Essas variáveis foram cuidadosamente escolhidas devido à sua relevância percebida na determinação das taxas de mortalidade. Através da aplicação das técnicas de MLG, pudemos modelar de maneira eficaz o número de óbitos, levando em consideração as variáveis explicativas mencionadas. Esse enfoque permitiu uma análise aprofundada dos fatores subjacentes que influenciam as taxas de mortalidade na região, fornecendo uma compreensão mais clara das relações entre as variáveis e os resultados de saúde observados. É importante destacar que foi utilizado o nível de significância de 5% para os testes estatísticos, como ferramenta para decidir qual o melhor modelo utilizamos o AIC (Critério de informação de Akaike) devido à sua capacidade de equilibrar o ajuste do modelo aos dados e a complexidade do modelo. O AIC avalia o quão bem o modelo se ajusta aos dados observados, favorecendo um bom ajuste, enquanto penaliza a complexidade do modelo, evitando a seleção de modelos excessivamente complexos. Isso assegura que o modelo escolhido seja capaz de explicar os dados com precisão, ao mesmo tempo em que é simples o suficiente para evitar o sobreajuste. Portanto, o AIC é uma métrica valiosa na seleção do melhor modelo estatístico..

3. Resultado e discussão

A análise dos dados revelou importantes descobertas acerca da modelagem dos óbitos na região metropolitana de Campina Grande. Ao examinar os coeficientes estimados do modelo, observamos que todas as variáveis explicativas apresentam significância estatística.

O modelo ajustado com a Binomial Negativa foi o seguinte:

$$E(Y) = \exp((3.985 \cdot 10^0) + (8.974 \cdot 10^{-8} * x_1) + (8.727 \cdot 10^{-5} * x_2) + (1.021 \cdot 10^{-1} * x_3))$$

E para a Poisson obtivemos o seguinte modelo:

$$E(Y) = \exp((3.934 \cdot 10^0) + (9.150 \cdot 10^{-8} * x_1) + (8.456 \cdot 10^{-5} * x_2) + (1.111 \cdot 10^{-1} * x_3))$$

Onde:

x_1 : Investimento em saúde no mês;

x_2 : Número de internações no mês;

x_3 : Número médio de dias internados dos pacientes no mês.

No presente caso, o modelo de Binomial Negativa apresenta um AIC de 1229.5, enquanto o modelo de Poisson possui um AIC de 1460. Isso significa que o modelo de Binomial Negativa é preferível, pois tem um valor de AIC mais baixo, indicando que oferece um melhor ajuste aos dados observados em comparação ao modelo de Poisson. Portanto, com base nos AICs, o modelo de Binomial Negativa é a escolha apropriada para a modelagem do número de mortes na região metropolitana de Campina Grande.

A comparação entre os modelos estatísticos de Binomial Negativa e Poisson revela insights cruciais sobre sua adequação aos dados de mortalidade na região metropolitana de Campina Grande. Inicialmente, observamos que a estatística de dispersão (dispersion parameter) na Binomial Negativa foi estimada em 73.0057, indicando uma dispersão dos dados que não segue uma distribuição binomial tradicional. Essa característica peculiar torna a Binomial Negativa a escolha mais apropriada, dada a natureza dos dados.

A análise do desvio residual mostra que ambos os modelos reduzem substancialmente o desvio em relação ao desvio nulo, indicando que ambos têm a capacidade de explicar grande parte da variabilidade nos dados. Entretanto, o modelo de Binomial Negativa apresenta um AIC significativamente menor (1229.5) em comparação com o modelo de Poisson (1460). Um AIC mais baixo sugere que o modelo se ajusta melhor aos dados observados.

Além disso, ao verificar o gráfico de envelope, o modelo de Binomial Negativa demonstra um melhor ajuste, com apenas 1,59% dos pontos de resíduos fora das bandas de confiança enquanto o modelo Poisson apresenta 98,41% dos pontos de resíduos fora das bandas de confiança, em comparação com o nível de tolerância de 5%. Isso reforça a adequação do modelo Binomial Negativa aos dados.



4. Conclusões

Com base nas análises detalhadas e rigorosas conduzidas ao longo deste estudo, é possível concluir que este trabalho oferece insights fundamentais sobre a modelagem de óbitos na região metropolitana de Campina Grande. Ao considerar dois modelos estatísticos, a Binomial Negativa e o Poisson, e avaliando sua adequação aos dados, nossas conclusões estão alinhadas com o principal objetivo deste estudo: compreender as dinâmicas que impactam as taxas de mortalidade na região.

Este estudo representa uma valiosa contribuição para as áreas de pesquisa em saúde pública e estatística, pois identifica e quantifica o impacto do investimento em saúde, do número de internações e da média de permanência nas taxas de óbitos. Essas conclusões fornecem uma base sólida para o desenvolvimento de estratégias de saúde pública mais eficazes, uma necessidade crucial na busca por uma melhoria contínua da saúde da população.

As implicações deste estudo vão além do âmbito da pesquisa, estendendo-se à prática clínica e à formulação de políticas de saúde. As descobertas sugerem que investimentos aprimorados em saúde, otimização de internações e uma gestão eficiente do tempo de permanência podem ter um impacto significativo na redução das taxas de óbitos. Essas informações são de grande relevância para formuladores de políticas de saúde, administradores de sistemas de saúde e profissionais da área, capacitando-os a implementar ações direcionadas que resultem em benefícios substanciais para a população.

Em suma, este estudo fornece uma base sólida e evidência concreta para aprimorar as práticas de saúde e políticas de saúde na região metropolitana de Campina Grande. Suas conclusões têm o potencial de direcionar a alocação de recursos e a implementação de intervenções específicas, com o objetivo final de reduzir as taxas de mortalidade e melhorar a qualidade de vida da comunidade local.

Referências

CORDEIRO, G.; DEMÉTRIO, C. *Modelos Lineares Generalizados e Extensões*. Disponível em: https://www2.ufjf.br/clecio_ferreira/wp-content/uploads/sites/234/2013/05/Livro-Gauss-e-Clarice.pdf. Citado na página 2.

PAULA, G. *MODELOS DE REGRESSÃO com apoio computacional*. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~giapaula/texto.2013.pdf>. Citado na página 2.

TABNET - Sistema de Informação de Mortalidade. Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/deftohtm.exe?sim/cnv/obt10br.def>. Citado na página 1.

O Uso Do Jogo Disputa Algebrica Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental

O USO DO JOGO DISPUTA ALGÉBRICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Jefferson Braz Ferreira Sousa ¹ - jeffersonsousapb@gmail.com
Fabrício Almeida Silva ¹ - fabricioalmeida98729@gmail.com.
Rodolfo Moreira Cabral ¹ - rodolfomoreira.16@hotmail.com
Fabiola Da Cruz Martins ¹ - fabiolamartins@servidor.uepb.edu.br

¹Universidade Estadual da Paraíba, Campus VII - Patos, PB, Brasil

Resumo: Este trabalho tem como objetivo discutir as potencialidades e limitações do Jogo Disputa Algébrica no ensino de equações com duas incógnitas. O jogo permite que os estudantes participem ativamente do processo educacional, explorando diferentes estratégias, tomando decisões e resolvendo problemas. Através do jogo, eles têm a oportunidade de experimentar situações reais de forma segura e controlada, desenvolvendo habilidades cognitivas, emocionais e sociais. Consideramos que uma abordagem significativa para ensinar Álgebra no Ensino Fundamental é aquela que torna o conteúdo relevante e significativo para os alunos. Dessa forma, compreendemos que as atividades práticas, jogos, problemas do dia a dia e exemplos práticos que mostrem a aplicação da Álgebra na vida real, podem ser ferramentas úteis para o ensino. Nesse contexto, buscando desenvolver habilidades de resolução de equações com duas incógnitas nos alunos dos anos finais do ensino fundamental, desenvolvemos esta pesquisa utilizando o jogo “Disputa Algébrica”. Esta pesquisa é caracterizada como qualitativa, a qual foi desenvolvida no âmbito do Estágio Supervisionado I, numa turma de 25 alunos do 8º ano dos anos finais do ensino fundamental de uma escola da rede pública estadual localizada no sertão da Paraíba. Na aplicação do jogo foi notado que houve contribuição tanto no ensino de equações de duas incógnitas e na participação dos alunos de forma ativa na aula. O jogo potencializou a aprendizagem e o aprofundamento das compreensões das equações, pois os alunos puderam dialogar e pensar em conjunto para encontrar a solução correta, assim não privando o conhecimento matemático para um grupo que sabem resolver matemática e os outros que não conseguem fiquem de lado.

Palavras-chave: Ensino de Álgebra; Estágio Supervisionado; Equações

1. Introdução

A Educação Matemática está intrinsecamente ligada à Matemática, pois o método e o conteúdo não devem ser separados. Silva e Fillos (2010), afirmam que:

É importante, portanto, que os professores conheçam não somente o conteúdo Matemático, mas que reflitam sobre como estão ensinando e como está acontecendo à aprendizagem. A profissão de educador matemático requer um conhecimento amplo de educação. Não é fácil para um professor de Matemática entender de imediato sobre a Educação Matemática, ainda mais quando na sua formação acadêmica não teve essa informação. Conceber esse conhecimento requer interesse, e isso precisa ser despertado (SILVA; FILLOS, 2010).

A Educação Matemática é caracterizada como uma prática que requer o domínio do conteúdo específico, neste caso, a Matemática, e a compreensão de conceitos e métodos educacionais relacionados à comunicação e internalização e/ou à aquisição/edificação do conhecimento matemático escolar (FIORENTINI; LORENZATO, 2017). Portanto, a experiência de um educador em sala de aula por si só não é o bastante para influenciar a aprendizagem dos alunos. Esse profissional deve buscar conhecimentos que ampliem suas ferramentas para atingir o objetivo de ensinar, ou seja, a maneira de facilitar a construção do conhecimento para os indivíduos na sociedade.

Diante disso, pensou na utilização do jogo Disputa Algébrica para elucidar e desenvolver os alunos para resolver equações do polinômiais do 1º com duas incógnitas, visto que os discentes sentiram uma determinada



dificuldade em visualizar o sentido das letras na equação. Conforme Grandó (1995), etimologicamente a palavra jogo vem do latim *locu*, que significa gracejo, zombaria, e que foi empregada no lugar de *ludu*: brinquedo, jogo, divertimento e passatempo.

Dessa forma, o jogo permite que os estudantes participem ativamente do processo educacional, explorando diferentes estratégias, tomando decisões e resolvendo problemas. Mediante ao jogo, eles têm a oportunidade de experimentar situações reais de forma segura e controlada, desenvolvendo habilidades cognitivas, emocionais e sociais. Além disso, a ludicidade promove a interação entre os alunos, fomentando a colaboração, o trabalho em equipe e o respeito mútuo. Ao envolver-se em atividades divertidas e prazerosas, as crianças e jovens desenvolvem habilidades de comunicação, negociação e resolução de conflitos.

Diante disso, a abordagem colaborativa na educação, que envolve os alunos na construção do conhecimento matemático, torna o processo de aprendizagem mais participativo e significativo, além de ter o potencial de transformar a sociedade. O jogo estimula a criatividade, o pensamento crítico e a autonomia dos estudantes, preparando-os para os desafios do mundo atual e contribuindo para uma sociedade mais justa e equilibrada.

A pesquisa desenvolvida e discutida neste trabalho teve como objetivo analisar o desenvolvimento de habilidades de resolução de equações com duas incógnitas dos alunos dos anos finais do ensino fundamental, por meio do jogo Disputa Algébrica.

2. Metodologia

Esta pesquisa é caracterizada como qualitativa, a qual foi desenvolvida no âmbito do Estágio Supervisionado I, numa turma de 25 alunos do 8^o ano dos anos finais do ensino fundamental de uma escola da rede pública estadual localizada no sertão da Paraíba.

Nossa compreensão por pesquisa qualitativa é fundamentada em Yin (2016), o qual destaca cinco características que a definem: 1. estuda o significado da vida das pessoas nas condições do cotidiano; 2. representa as opiniões dos participantes do estudo; 3. abrange o contexto em que as pessoas vivem; 4. revela conceitos existentes que permitem explicar o comportamento social humano; e 5. utiliza múltiplas fontes para coleta dos dados. Yin (2016) menciona que:

A pesquisa qualitativa não é apenas um diário ou uma narrativa cronológica da vida cotidiana. Tal função seria uma versão meio mundana dos acontecimentos da vida real. Ao contrário, a pesquisa qualitativa é guiada por um desejo de explicar esses acontecimentos, por meio de conceitos existentes ou emergentes. [...] Da mesma forma, a pesquisa qualitativa pode ser uma ocasião para desenvolver novos conceitos (YIN, 2016).

Dessa forma, esta pesquisa teve como objetivo analisar o desenvolvimento de habilidades de resolução de equações com duas incógnitas por meio do jogo Disputa Algébrica. Diante disso, para alcançarmos nosso objetivo, desenvolvemos uma atividade buscando o desenvolvimento dos seguintes aspectos: i) elucidar a estrutura algébrica de uma equação com duas incógnitas; ii) desenvolver habilidade de resolução de uma equação com duas incógnitas a partir de um par ordenado; iii) gerar capacidade de encontrar o valor de uma incógnita sabendo do valor da outra incógnita (**Figura 1**).

3. Resultado e discussão

No momento da revisão dos conteúdos, pudemos perceber que os alunos estavam entusiasmados que a aula seria um jogo, sendo assim, estavam participativos no momento da revisão e tirando dúvidas, pois sabiam que aquele momento era importante para que eles tirassem seus questionamentos diante do conteúdo para que na hora do jogo não perdessem pontuação.

Na aplicação do jogo foi notado que houve contribuição tanto no ensino de equações de duas incógnitas e na participação dos alunos de forma ativa na aula, pois foi possível perceber que os alunos desenvolveram o entendimento que uma incógnita pode assumir qualquer valor, fixar o processo de resolução de uma equação de forma que consigam resolver problemas presentes no dia a dia do aluno e capacitar no desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, percebeu-se a colaboração em equipe na resolução das questões propostas em cada fase do jogo, visto que competiam uns contra os outros para vencer a competição.

Figura 1: Tabuleiro da Disputa Algébrica

Fases	Grupo 1	grupo 2	grupo 3	grupo 4	grupo 5	grupo 6
1	PAR (-2,4) $-x+3y=14$	PAR (3,2) $3x-y=21$	PAR (-3,4) $5x-y=26$	PAR (2,5) $-x+4y=12$	PAR (-2,14) $-7x+y=28$	PAR (5,10) $4x+y=30$
2	PAR (2,6) $4x+3y=27$	PAR (4,3) $-2x-2y=-22$	PAR (-2,10) $5x+3y=20$	PAR (6,2) $-3x-5y=19$	PAR (7,3) $4x-2y=24$	PAR (4,4) $2x+5y=28$
3	PAR (3,4) $3(x-y)+2=5$	PAR (2,2) $4+2(X-y)=4$	PAR (6,7) $2(x+y)-2=20$	PAR (2,5) $5(x+Y)-2=23$	PAR (4,2) $4(x-y)+2=8$	PAR (-4,2) $3(x+y)-6=-12$
4	PAR (5,15) $3(x-y)+4=-11$	PAR (4,6) $7(x+y)-3=67$	PAR (3,8) $5(x-y)+3=20$	PAR (3,6) $5x+3(3-y)=6$	PAR (4,8) $6(x+y)-2=70$	PAR (-4,7) $2+3(x+y)=15$
5	$x=-3, y=?$ $5(x+y)-4y=1$	$x=4, y=?$ $2y+3(x-y)=15$	$x=-4, y=?$ $3(x-y)+2y=0$	$x=2, y=?$ $7y+6(x-y)=20$	$x=6, y=?$ $5(x-y)-6y=31$	$x=3,$ $4(x-y)+5y=18$
6	$y=-1, x=?$ $3x=2(x+y)-3$	$y=9, x=?$ $4x=3(x+y)-6$	$y=-1, x=?$ $5x=4(x-y)+1$	$y=3, x=?$ $3x=2(x-y)+7$	$y=-1, x=?$ $6x=5(x+y)-5$	$y=4, x=?$ $4x=3(x-y)+3$

Fonte: Adaptado de Rosa (2020).

No decorrer da aplicação desse jogo, foi possível perceber que aqueles alunos que na maioria das vezes não são muitos participativos em aulas com exposição de conteúdo, o trabalho em equipes proporcionou que houvesse a contribuição e participação de forma ativa desses alunos que frequentemente não participam de aulas tradicionais. Portanto, compreende-se que a aplicação de um jogo em aulas de matemática, permite que o aluno seja autônomo na sua construção do conhecimento.

Fazendo relação com umas das vantagens citadas por Grandó et al. (2000), o uso de atividades com jogos permite ao professor identificar os principais desafios enfrentados pelos alunos, com isso, na aplicação do jogo foi notado que ao entrega um par ordenado para verificar se era solução de a uma determinada equação de duas incógnitas, as equipes tiveram uma aceitabilidade maior do que ao saber o valor de um incógnita para descobrir o valor da outra teve uma menor quantidade de acertos. Mas, mesmo diante das dificuldades enfrentadas pelos alunos em cada fase do jogo, todas as equipes se esforçaram em conjunto para chegar nas soluções, sem deixar a criatividade individual de lado.

O jogo foi projetado com um objetivo específico, permitindo que os alunos desenvolvessem as habilidades necessárias para o conteúdo, superando a desvantagem de apenas se envolverem no jogo e participando de forma espontânea e produtiva.

Desse modo, o jogo potencializa a aprendizagem e o aprofundamento das compreensões das equações, pois os alunos puderam dialogar e pensar em conjunto para encontrar a solução correta, não privando, portanto, o conhecimento matemático para um grupo que tenham um maior domínio da matemática, menosprezando os alunos que têm mais dificuldades.

4. Conclusões

O estágio é um elemento importante na formação do aluno, pois oferece experiências supervisionadas por profissionais da área, fornecendo orientações que impactam na construção da carreira dos estudantes e os fazem refletir sobre a importância de suas práticas em sala de aula.

O planejamento de jogos com instrumentos no ensino da matemática é importante, pois permite transmitir o conteúdo de forma inovadora, saindo do tradicional, mas mantendo o objetivo principal do jogo. No jogo aplicado, o recurso foi acessível e fácil, o que possibilitou uma boa execução.

Durante a utilização do jogo, houve a limitação de alguns alunos não quererem participar e outros cometerem erros nos cálculos mentais por falta de atenção. Para o futuro, é sugerido utilizar recursos manipuláveis ou problemas para ensinar equações de primeiro grau com duas incógnitas.

Referências

- FIorentini, D.; Lorenzato, S. *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. Coleção Formação de Professores. FILHO, PL *Jogo digital educativo para o ensino de Matemática*. 2013. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná . . . , 2017. Citado na página 1.
- GRANDO, R. C. *O jogo [e] suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática*. 30 p. Tese (Doutorado) — [sn], 1995. Citado na página 2.
- GRANDO, R. C. et al. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. *Campinas, SP:[sn]*, p. 239, 2000. Citado na página 3.
- SILVA, M. S. d.; FILLOS, L. M. Sentidos da integração curricular e o ensino de matemática nos parâmetros curriculares nacionais. *O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense*, Paraná: Quedas do Iguaçu, v. 1, p. 7, 2010. Citado na página 1.
- YIN, R. K. *Pesquisa qualitativa do início ao fim*. Porto Alegre, RS: Revisão técnica de Dirceu da Silva, 2016. v. 1. Citado na página 2.

**Gamificação Na Matemática: Proposta
De Modelagem No Ensino De Fração
Com Minecraft**

GAMIFICAÇÃO NA MATEMÁTICA: PROPOSTA DE MODELAGEM NO ENSINO DE FRAÇÃO COM *MINECRAFT*

José Nathan Firmino de Oliveira¹ - jose.nathan@aluno.uepb.edu.br
Jefferson Braz Ferreira Sousa¹ - jeffersonsousapb@gmail.com
Vinícius Reuteman Feitoza Alves de Andrade¹ - vreuteman@gmail.com
Wellington Candeia de Araújo² - wcandeia@servidor.uepb.edu.br
Francisco Anderson Mariano da Silva¹ - franciscoanderson4@gmail.com

¹Universidade Estadual da Paraíba, Campus VII - Patos, PB, Brasil

²Universidade Estadual da Paraíba, Campus I - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Neste trabalho foi elaborado um mapa (espaço de estudos) dentro do jogo *Minecraft* para o ensino das frações (chamado de *Ilha das Frações*) para ser utilizado pelo professor em sala de aula, tem por sua vez, o potencial de atrair a atenção do aluno e promover uma aprendizagem significativa. O mapa em questão trata da oportunidade de criar ambientes de estudos dentro do próprio jogo *Minecraft* para utilização na sala de aula e a ideia surge da problemática de como tornar conteúdo abstrato de frações em algo prático, dinâmico e divertido para o aluno. O objetivo deste trabalho é explorar o uso dos princípios da gamificação como uma ferramenta prática para o aprendizado da matemática, especificamente no ensino de frações. Com abordagem metodológica baseada em pesquisa teórica e análise conceitual foi adotada para explorar a literatura sobre gamificação no ensino de matemática com frações. A utilização do jogo *Minecraft* como ambiente de aprendizado de frações traz benefícios significativos para o desenvolvimento dos alunos em diversos aspectos. Após os estudos e o desenvolvimento da sala virtual foi identificado que o jogo permite que os alunos visualizem as frações de forma ilustrativa e trabalhem com diversos conteúdos matemáticos, como combinações, medidas de área e perímetro, e representação de figuras geométricas 3D. O mapa *Ilha das Frações*, oferece uma abordagem prática e interativa para o ensino, auxiliando os alunos na compreensão dos conceitos, desenvolvimento de habilidades de cálculo e estímulo ao raciocínio lógico.

Palavras-chave: *Minecraft*; Gamificação; Jogos digitais; Educação Matemática; Ensino de frações

1. Introdução

Durante a jornada como aluno, é comum encontrar desafios recorrentes na sala de aula, como a dificuldade de compreender temas abstratos que muitas vezes gera agitação e resulta em reprovação. O medo da abstração também dificulta a adoção de novas metodologias, tornando-se uma rotina, que segundo Bittencourt (2004), a matemática, no aspecto da interdisciplinaridade, mostra-se resistente a mudanças nos métodos de ensino, o que impede os alunos de relacioná-la com problemas do dia a dia.

O problema não está no ensino tradicional em si, mas sim na limitação dos professores em adotar apenas essa abordagem. Isso pode levar os alunos a rejeitar a disciplina por não conseguirem entender os conteúdos e não formarem conexão com sua vida cotidiana. Para promover uma melhor interação entre professor, aluno e a matemática, é essencial que o professor conheça a realidade dos alunos, crie problemas e situações relacionados às suas experiências de vida. Isso torna a matemática mais relevante e interessante para os estudantes.

O professor precisa ampliar suas metodologias e abordar os assuntos abstratos de maneira diferente, relacionando-os ao cotidiano fora da sala de aula ou explorando ambientes digitais inovadores como uma ferramenta utópica.

Uma das vantagens do jogo é a diversão e a oportunidade de modelar temas nos jogos digitais, que quebram o estigma de que os jogos são apenas para diversão. Com a revolução da internet e o uso das tecnologias digitais, surgem muitas possibilidades para ensinar e aprender de forma efetiva e significativa, onde o aluno não é mais um elemento passivo no processo de aprendizagem (SCHLEMMER, 2005). No entanto, segundo Mattar (2010), a escola tende a separar a aprendizagem do prazer, como se fossem fenômenos exclusivos um do outro.

Neste trabalho foi elaborado um espaço de estudos dentro do jogo *Minecraft* para o ensino das frações



(chamado de Ilha das Frações) para ser utilizado pelo professor em sala de aula, tem por sua vez, o potencial de atrair a atenção do aluno e promover uma aprendizagem significativa. Desta forma o objetivo é explorar o uso da gamificação como uma ferramenta eficaz para o aprendizado da matemática, especificamente no ensino de frações. A proposta é utilizar o jogo *Minecraft* como uma plataforma de modelagem para envolver os alunos de maneira interativa e motivadora, buscando melhorar a compreensão e a aplicação dos conceitos de frações por meio de atividades práticas e lúdicas.

Os jogos digitais têm como uma de suas características a sensação de prazer a que os jogadores são submetidos, o que pode provocar um aprendizado involuntário, sem compromisso, sem pressão. Logo vem uma questão, por que não incluir jogos digitais pedagógicos no contexto escolar, no processo de ensino e aprendizagem da matemática e no ensino de frações?

Conforme Parato (2018), existem diversas definições para frações, que são utilizadas de acordo com as necessidades didáticas do público-alvo. As mais usadas são: uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais; Uma fração representa uma divisão, em que o numerador equivale ao dividendo e o denominador equivale ao divisor; Uma fração é um número racional.

Os numerais que representam números racionais não-negativos são chamados frações e os números inteiros utilizados na fração são chamados numerador e denominador, separados por uma linha horizontal ou traço de fração.

Numerador

Denominador

Onde numerador indica quantas partes são tomadas do inteiro, isto é, o número inteiro que é escrito sobre o traço de fração e denominador indica em quantas partes dividimos o inteiro, sendo que este número inteiro deve necessariamente ser diferente de zero.

Os jogos digitais enfrentam rejeições por que os limitam apenas à diversão, mas ao longo do tempo, áreas como saúde, esportes e educação têm reconhecido seu potencial como ferramentas de aprendizagem. Na educação, a utilização dos jogos digitais requer um plano de ensino alinhado com as ferramentas digitais, como demonstra Pressky (2012), o uso de jogos digitais não diminui a seriedade e eficácia do ensino, pois o sucesso está no aprendizado do aluno, não na abordagem utilizada, pois as possibilidades dessas tecnologias na educação vão além da diversão.

É fundamental reconhecer que os jogos digitais devem ser utilizados como uma ferramenta adicional, e não como uma substituição aos métodos tradicionais de ensino. Os educadores devem escolher com cautela os jogos que estejam alinhados com os objetivos e necessidades específicas de aprendizagem dos alunos (CASTANHO, 2013).

O jogo *Minecraft* é um popular jogo de *sandbox* que pode ser usado para gamificação, o que envolve o uso de mecânicas e elementos do jogo, para envolver os alunos e melhorar sua experiência de aprendizado. Ele oferece uma oportunidade para criar desafios e missões que exigem resolução de problemas, pensamento crítico e criatividade.

Os jogadores exploram um mundo aberto tridimensional intencionalmente em blocos, pixelizado e gerado por processos lineares, podendo descobrir e extrair matérias-primas, ferramentas, construir estruturas ou ter-
raplenagens. Dependendo do modo de jogo, podem combater inimigos controlados por computador, bem como cooperar ou competir contra outros jogadores no mesmo mundo (SUPPORT, 2023).

No jogo *Minecraft*, é possível criar desafios que envolvam a construção de estruturas, exploração de novas áreas e resolução de quebra-cabeças, proporcionando ambientes interativos que simulam situações da vida real. Essas modificações permitem criar modos de jogo personalizados, adicionar novos itens e alterar a mecânica do jogo.

2. Metodologia

Neste trabalho, utilizou-se uma abordagem metodológica baseada em pesquisa teórica e análise conceitual. Explorando a literatura existente sobre gamificação no ensino de matemática e frações, assim como as teorias e conceitos relacionados ao uso do jogo *Minecraft* como ferramenta educacional. Além disso, realizou-se uma análise detalhada das possibilidades e potencialidades do uso do jogo *Minecraft* no ensino de frações.



Com base nessas revisões teóricas e análises conceituais, desenvolve-se uma proposta de modelagem que combina os princípios da gamificação com o ambiente virtual do *Minecraft* para o ensino de frações. Essa abordagem permitiu refletir e elaborar uma proposta fundamentada teoricamente para o uso do *Minecraft* como ferramenta de ensino de frações.

3. Resultado e discussão

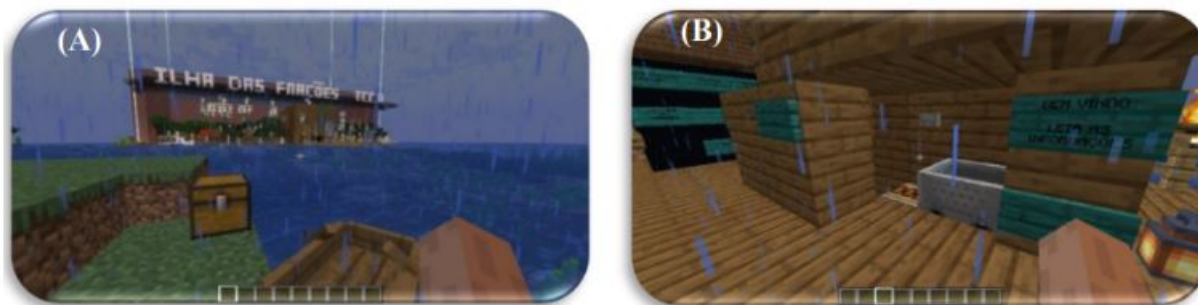
Na **1ª Etapa**, corresponde ao início de conversa, que tem o objetivo de proporcionar aos alunos a possibilidade de jogar *Minecraft* explorando os vastos conteúdos que o jogo oferece e, para que seja eficiente, é muito importante que o professor já conheça o jogo antes de levá-lo para a sala de aula. Para iniciar o projeto, o professor deverá organizar uma apresentação sobre o jogo *Minecraft*, que poderá ser feita com a colaboração dos alunos que já conhecem, de modo a estimular a curiosidade sobre a proposta de trabalho.

O planejamento é realizado na **2ª Etapa**, onde o tema do trabalho é uma decisão do professor ou dos alunos, a sugestão de atividade que será descrita ao longo de um plano de aula é de explorar um local chamado Ilha das Frações, com o intuito de aprender frações seguindo as instruções da ilha e cumprido os seus desafios, assim, utilizando os conhecimentos sobre frações que irá receber durante o mapa para ir avançando de assunto na Ilha das Frações.

No mapa Ilha das Frações criado, o professor só poderá ter o papel de tutor com o intuito de ser um personagem que não executa ações, mas fornece instruções e analisa o desempenho dos alunos. Para cada aula, poderão atuar até 30 alunos sem a necessidade de um servidor exclusivo, podendo também trabalhar em pares. Ou se preferir pode realizar uma aula expositiva e dialogada, onde uma dupla de alunos escolhida pela sala estará em contato direto com o jogo *Minecraft*, onde os demais observavam as informações e ajudariam a passarem nos desafios.

Na **3ª Etapa**, consiste em começar o jogo, em que o personagem se depara com um baú (**Figura 1 A**) que possui um barco dentro e que será usado para levá-lo a Ilha das Frações. Utilizando o barco até chegar ao porto da Ilha das Frações, deverá sair do barco e começa as etapas, tendo que ler as placas azuis e seguir as setas que estão localizados em quadros (**Figura 1 B**).

Figura 1: Iniciando o jogo na Ilha das Frações (A) e ponto inicial para o primeiro estudo (B)



Fonte: Autoria própria (2023).

Primeiramente passando pelo corredor da esquerda seguindo até o quadro negro que lá estará as informações iniciais dos tópicos que serão abordados na Ilha das Frações e as instruções para ir até a primeira etapa.

Na **1ª Etapa** da Ilha das Frações, o jogador deverá ler as informações iniciais, tendo que apertar o botão a direita, logo, o carrinho levará o discente até o ponto inicial da primeira etapa. Os alunos necessitam conhecer as frações, que são formadas por duas parcelas sendo o numerador sendo a parcela de cima e o denominador da parcela de baixo e o traço da fração representa divisão. Um exemplo de representação numérica de frações foi 26. Após visualizar o exemplo, é finalizada a **1ª Etapa**, tendo que vencer um desafio para escapar de uma prisão, posteriormente o jogador terá de obedecer a placa e **caia agora!**

Chegando no ponto de partida da **2ª Etapa**, depara-se com um aldeão preso (preso por não saber frações), onde o desafio será salvá-lo. Os discentes aprenderam a capacidade de ler frações, assim, a leitura de uma fração, primeiro lê o numerador e depois o denominador. De acordo com o denominador, a fração pode receber

nomes especiais. No mapa temos exemplos de frações de base menores que 10, sendo a base representada por blocos pretos e o numerador são os blocos pintados. Após essa parte finalizada, os estudos da **2ª Etapa** se encerram e partimos para o desafio **caia agora!**

Após isso, segue-se o destino que o ponto de início que será à esquerda da prisão, onde o aluno vai entrar em um carro de trem que levará ao início da última **3ª Etapa**. Os discentes vão conhecer alguns tipos de frações, sendo elas as frações próprias, impróprias e aparentes. Ao finalizar essa partida, conclui-se o jogo com os estudos das frações.

4. Conclusões

A utilização do jogo *Minecraft* como ambiente de aprendizado de frações traz diversos benefícios para o desenvolvimento dos alunos. Sua facilidade de uso e variedade de ferramentas disponíveis permitem a aplicação em diferentes temas da matemática, tornando a aprendizagem mais significativa. O jogo oferece uma forma ilustrativa de trabalhar as frações, além de outros conteúdos matemáticos, como análise combinatória, medidas de área e perímetro, e representação de figuras geométricas 3D.

O mapa Ilha de Frações dentro do jogo *Minecraft* é uma ferramenta prática e interativa para ensinar frações, ajudando os alunos a entenderem os conceitos, desenvolverem habilidades de cálculo e estimular o raciocínio lógico. Isso torna o aprendizado de matemática mais envolvente, participativo e motivador.

O jogo *Minecraft* é uma ferramenta educacional para ser usada em sala de aula. No entanto como limitação tem-se alguns laboratórios escolares não possui estrutura quanto aos requisitos de sistema operacional e hardware. Para trabalhos futuros pode-se melhorar o mapa Ilha de Frações ou dar continuidade ao trabalho, com a inclusão de recursos adicionais, como tutoriais interativos que auxiliem os alunos na compreensão dos conceitos de frações, proporcionando orientação e suporte durante a exploração do mapa.

Referências

- BITTENCOURT, J. Sentidos da integração curricular e o ensino de matemática nos parâmetros curriculares nacionais. *Zetetike*, Campinas, SP, v. 12, n. 2, p. 71–88, 2004. Disponível em: (<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646973>). Acesso em: 16 out. 2023. Citado na página 1.
- CASTANHO, A. F. A. O jogo e seu lugar na aprendizagem da matemática. *Revista Nova Escola*, v. 260, 2013. Citado na página 2.
- PARATO, P. M. *Matemática Essencial 6º ano; ensino fundamental, anos finais*. [S.l.]: Scipione, 2018. v. 1. Citado na página 2.
- PRESSKY, M. *Aprendizagem baseada em jogos digitais*. [S.l.]: São Paulo: Senac, 2012. Citado na página 2.
- SCHLEMMER, E. Metodologias para educação a distância no contexto da formação de comunidades virtuais de aprendizagem. *Ambientes virtuais de aprendizagem. Porto Alegre: Artmed*, p. 29–49, 2005. Disponível em: (<https://support.xbox.com/pt-BR/help/games-apps/gametitles/minecraft-realms-overview>). Acesso em: 16 out. 2023. Citado na página 1.
- SUPPORT, X. *Minecraft Realms e Realms Plus*. 2023. Disponível em: (<https://support.xbox.com/pt-BR/help/games-apps/game-titles/minecraft-realms-overview>). Acesso em: 21 abr. 2023. Citado na página 2.

O Ensino De Progressão Aritmética
Através De Jogos: Relato De Uma
Investigação Do Pibid

O ENSINO DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA ATRAVÉS DE JOGOS: RELATO DE UMA INVESTIGAÇÃO DO PIBID

Rodrigo Emanuel de Macêdo¹ - rodrigo.emanuel@estudante.ufcg.edu.br

Maria Nazaré Dantas de Sousa² - maria.nazare@estudante.ufcg.edu.br

Iarini de Lima Costa³ - iarini.lima@estudante.ufcg.edu.br

Leonardo de Medeiros Silva⁴ - leonardo.silva5@professor.pb.gov.br

¹ Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde - Cuité, PB, Brasil

² Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde - Cuité, PB, Brasil

³ Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde - Cuité, PB, Brasil

⁴ Escola Cidadã Integral Técnica José Itamar da Rocha Cândido - Cuité, PB, Brasil

Resumo: Neste relato será apresentado um projeto realizado pelo PIBID matemática da UFCG - Campus Cuité, nas turmas do 2º ano do ensino médio da Escola Cidadã Integral Técnica Jornalista José Itamar da Rocha Cândido, com o objetivo de formalizar o conceito de progressão aritmética de uma maneira didática. Essa atividade foi oferecida durante o segundo semestre de 2023 e de forma presencial. O relato sugere que apesar dos alunos não terem conseguido alcançar esse conteúdo no ano anterior as aulas foram bastante satisfatórias em termos de aprendizagem e participação dos alunos.

Palavras-chave: Matemática; Progressão Aritmética; PIBID

1. Introdução

Em 2007, houve uma ação conjunta da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), do Ministério da Educação, da Secretaria de Educação Superior (SESU) e do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) em que deram início ao PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) com o principal intuito de prover a iniciação à docência a graduandos de cursos de licenciaturas e preparar os alunos para a atuação em sala de aula.

O PIBID insere os alunos de graduação ativamente na sala de aula, partindo disso os bolsistas do PIBID podem começar a estudar formas mais eficientes de repassar os conteúdos para seus alunos, relacionando diretamente com a teórica adquirida na universidade. Com esse contato, aparecem ideias relevantes para a aula ficar mais atrativa e dinâmica.

Segundo Mello (2018), é necessário mencionar que o recurso didático a ser adotado em sala de aula, deverá acontecer de forma mais dinâmica e menos traumática, tornando – o mais interessante ao estudante, dessa maneira acredita -se que os jogos contribuem de maneira significativa para o processo de ensino-aprendizagem.

Grando (2004) fala que ao se referir a utilização de jogos em aulas de matemática como um suporte didático, tem que considerar a utilização dele em todos os níveis de ensino, que os objetivos do jogo estejam claros e a metodologia que vai ser utilizada seja adequada ao nível de ensino que será trabalhado.

Dessa maneira os jogos são recursos didáticos importantes para a dinamicidade das aulas, mas não devem ser trabalhados de qualquer maneira ou sem nenhum planejamento prévio. Então, algumas questões devem ser trabalhadas como: Quais pontos negativos e positivos ao utilizar jogos matemáticos? Há alguma forma de trabalhar esses jogos de maneira eficaz?

2. Metodologia

2.1 Contextualização da escola e início das atividades

O subprojeto de matemática da UFCG/CES é realizado na ECIT Jornalista José Itamar da Rocha Cândido localizado na cidade de Cuité – PB. A nossa intervenção foi realizada em setembro de 2023, em duas turmas do 2º ano do curso técnico integrado de administração.

O primeiro contato com a turma aconteceu durante o desenvolvimento do subprojeto do PIBID na escola. A partir daí, juntamente com o professor supervisor surgiu a ideia de trabalhar o conteúdo de progressão aritmética



na aula de prática experimental. Partindo disso, os pibidianos forma buscar publicações de diversos autores sobre alguma prática experimental que envolvesse o conteúdo de PA (Progressão Aritmética).

A prática experimental escolhida para ser trabalhada foi através de um jogo chamado “corrida ao 100”, onde o enfoque será trabalhar a construção de uma progressão aritmética através da sequência vencedora de cada partida do jogo. A prática se deu inicialmente pelo jogo, para posteriormente apresentarmos o conceito de P.A., de modo a construir um ensino lúdico para os alunos, para que os mesmos construam seu conhecimento identificando as características na prática, e partindo disso formalizando os conceitos.

2.2 Atividade, Jogo “Corrida ao 100”

O objetivo de utilizar deste jogo em nossas práticas experimentais foi introduzir e trabalhar o conceito de PA (Progressão Aritmética) de forma lúdica e atrativa para os alunos, pois os mesmos não tiveram contato com o conteúdo no primeiro ano do ensino Médio.

O jogo consiste em uma corrida numérica, na qual se jogam dois jogadores, e vence o jogador que alcançar a casa número 100 primeiro. As regras do jogo consistem em, primeiro os dois jogadores decidem quem será o jogar 1 e o jogador 2, a cada jogada o jogador escolherá um número de casas de 1 a p, onde p será um número natural arbitrário para cada rodada, sendo o jogo dividido em 5 rodadas, onde na primeira se inicia-se com $p = 9$, na segunda $p = 8$, e assim sucessivamente até a rodada 5 onde $p = 5$, e cada vez que a rodada acaba, invertase o jogador que começa.

logo após a aplicação do jogo foi pedido aos alunos que respondessem 5 questões a respeito do jogo realizado, com o intuito de fazer com que os alunos observassem se existe ou não uma estratégia vencedora, e se sim, por que ela funciona. Deste modo introduzimos os conceitos matemáticos básicos envolvendo P.A. para que os alunos identificassem, suas características na atividade que acabaram de realizar.

3. Resultado e discussão

No contexto da educação matemática, é fundamental encontrar abordagens inovadoras e envolventes para transmitir conceitos matemáticos complexos. Neste estudo, investigamos a aplicação do jogo ”Corrida ao 100” como uma estratégia pedagógica para introduzir o conceito de Progressão Aritmética (PA) de forma lúdica e envolvente aos alunos do 2^a ano do Ensino Médio.

O jogo envolvia uma corrida numérica, na qual os alunos jogavam em duplas, e o vencedor era o primeiro a atingir a casa número 100, a cada rodada teve um número de casas permitidas, representadas por p, variando no intervalo fechado de $p = [9; 8; 7; 6; 5]$. Após a realização do jogo, os alunos responderam um questionário de 6 questões para reflexão sobre suas estratégias e compreensão do conceito matemáticos subjacentes à Progressão Aritmética (PA) presente no jogo. Os resultados são apresentados na seguinte descrição.

Questões	Respostas
1) Há alguma vantagem em ser o jogador 1 ou ser o jogador 2?	Observaram que ser o jogador 1 ou 2 não tem uma vantagem protetora. A vantagem depende das estratégias escolhidas e das decisões tomadas durante o jogo. Em alguns casos, ser o jogador 1 poderia ser vantajoso, se caso garantir uma estratégia desde a primeira jogada durante a rodada.
2) Existe uma estratégia que permite ganhar sempre? Descreva-a.	Consideraram que não existe uma estratégia que permita ganhar sempre. Eles notaram que não há uma sequência fixa que leve sempre à vitória, pois as estratégias precisam se adaptar às mudanças por p , em cada rodada.
3) Ao decorrer das partidas, qual é a fórmula que você pode considerar que terá sequência vencedora?	Perceberam que a sequência vencedora envolvia escolher p de maneira estratégica para aproveitar ao máximo o número de casas permitidas em cada rodada. Embora não tenham identificado uma fórmula matemática específica, eles compreenderam a lógica do jogo.
4) Qual seria o número de passos (p) ideal para que o jogador 1 venda sempre? porque?	Exploraram a ideia de que um p menor poderia ser vantajoso para o jogador 1, permitindo que ele alcance mais rapidamente a pontuação de 100 pontos. No entanto, eles também consideraram que essa estratégia dependerá das escolhas do jogador 2 e das mudanças em p , a cada rodada. Portanto, a ideia de um p "ideal" foi considerada relativa.
5) Qual seria o número de passos (p) ideal para que o jogador 2 venda sempre? porque?	Exploraram a ideia de que um p maior poderia ser vantajoso para o jogador 1, permitindo que ele alcance mais rapidamente a pontuação de 100 pontos. No entanto, eles também consideraram que essa estratégia dependerá das decisões do jogador 1 e das mudanças em p , a cada rodada. Portanto, a ideia de um p "ideal" foi considerada relativa.

A partir desses resultados consistem com a ideia de que jogos educacionais como "Corrida ao 100", podem ser uma ferramenta valiosa para o ensino de matemática, proporcionando uma abordagem interativa e envolvente. Além de promover uma compreensão prática e significativa de conceitos matemáticos, em particular, das Progressões Aritméticas, incentivando a reflexão e a aplicação prática, preparando-os para explorar conceitos mais avançados.

4. Conclusões

Foi possível identificar o interesse e empenho dos estudantes. A partir das resoluções das questões que tivemos a oportunidade de construir o esse conceito matemático, partindo da interpretação das questões, ideias de passos que foram seguidos e conseguimos mostrar a diversidade nas maneiras de resolução.

Houve bastante interação dos estudantes com os professores, além disso ao final de cada aula houve uma procura dos estudantes por novas datas e também sugestões de conteúdos a serem abordados em futuras aulas. Tudo isso mostra que o nosso objetivo inicial foi alcançado, conseguimos abordar tudo que estava planejado para o momento e de uma maneira clara e de fácil entendimento por parte dos alunos.

5. Agradecimentos

Aos órgãos colaboradores CAPES, UFCG e ECIT Jornalista José Itamar da Rocha Cândido pelo apoio ao projeto PIBID.

6. Referências bibliográficas

MELLO, COLLAÇO DE. Criatividade Jogos Didáticos. São José: Saint-Germain, 2018.

GRANDO, Regina Célia. O jogo e a matemática no contexto da sala de aula. São Paulo: Paulus, 2004.

Estudio del conocimiento
didáctico-matemático de dos profesores
sobre argumentación, EGD y diseño de
tareas

Estudio del conocimiento didáctico-matemático de dos profesores sobre argumentación, EGD y diseño de tareas

Haliaphne Annh Acosta Aguilar¹ - haliaphne.acosta@usach.cl

¹Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación, Doctorado en Ciencias con mención en Matemáticas; Santiago, Chile

Resumo: Nuestro trabajo estudia la transformación del conocimiento didáctico-matemático en torno al diseño de tareas escolares que promuevan la argumentación, mediados por algún entorno de geometría dinámica. Para el estudio, se consideran algunos elementos del modelo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino, Batanero y Font [2]. La estrategia investigativa usada en este trabajo es una adaptación de lo denominado estudio en primera persona; esta nos permite reflexionar y obtener mayor comprensión del conocimiento de dos profesores sobre: argumentación, entornos de geometría dinámica y diseño de tareas. Con base en el modelo y la estrategia investigativa es posible caracterizar el conocimiento y construir categorías para describir la transformación del mismo, enfocado en el estudio del conocimiento del profesor. El trabajo se desarrolla en el campo de argumentación y prueba, en la línea de la geometría, y está vinculado a intereses del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional.

Palavras-chave: Entornos de Geometría Dinámica (EGD); Diseño de Tareas; Argumentación; Conocimiento Didáctico-Matemático

Trabalho conjunto com: **Michael Montana.** Universidad Pedagógica Nacional; Bogotá, Colombia.

Referências

- 1 CAMARGO, L, *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática*, Editorial Universidad de Antioquia y Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Obtenido de aquí, (2021).
- 2 GODINO, D.; BATANERO, C.; FONT, V, *The onto-semiotic approach to research in mathematics education*, *ZDM*, The International Journal on Mathematics Education, 39, 127 - 135. Obtenido de aquí, (2007).
- 3 GODINO, J, *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories for analysing the knowledge of mathematics teachers]*, Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13 - 31, (2009).
- 5 MOLINA, O.; FONT, V.; PINO-FAN, L, *Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión*, Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 37(1), 93 - 116, (2019).
- 6 PINO-FAN, L.; GODINO, J, *Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico matemático del profesor*, *Paradigma*, 36, 87 - 109. doi:<https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015.p87-109.id552>, (2015).