

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Considere os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e as seguintes operações:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \\ \times : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\longmapsto (x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1) \quad \text{e} \\ \triangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \triangle y = \frac{x+y}{2} \quad . \end{aligned}$$

- a) Verifique se “ $\triangle$ ” é associativa e se possui elemento neutro.
- b) Mostre que o produto de números reais é distributivo em relação à operação “ $\triangle$ ”.
- c) Mostre que “ $\times$ ” é associativa, possui elemento neutro e é distributiva à direita em relação a “ $+$ ”.
- d) Encontre o elemento neutro de “ $+$ ” em $\mathbb{R}^2$ e mostre que todo elemento de $\mathbb{R}^2$ é simetrizável em relação a “ $+$ ”. Vale o mesmo para “ $\times$ ”?
2. Sejam A um conjunto com 2 elementos e “ $*$ ” uma operação em A .
- a) Mostre que se “ $*$ ” possui elemento neutro então é associativa e comutativa.
- b) Mostre que se “ $*$ ” é associativa e comutativa, então é constante ou possui elemento neutro.
- c) Dê exemplo de uma operação associativa e não comutativa em A e um exemplo de uma operação comutativa e não associativa em A .
3. Se A e B são duas partes quaisquer de um conjunto X , definimos a *diferença simétrica* entre A e B como sendo o conjunto $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. Sendo $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das partes de X , defina a operação

$$\begin{aligned} \triangle : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ (A, B) &\longmapsto A \triangle B \quad . \end{aligned}$$

Mostre que:

- a) $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ e que $A \triangle A = \emptyset$.
- b) A operação de diferença simétrica é associativa, comutativa e possui elemento neutro.
- c) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

4. Sabendo que a operação “ $*$ ” no conjunto $A = \{i, j, a, k, c, b, d, x\}$ é associativa, complete a sua tabela:

$*$	i	j	a	k	c	b	d	x
i	b	k			a	c	x	j
j	x			i	k	d		c
a	i	j		k	c	b	d	
k	j		k	b		x	i	
c	a	x		j	b		k	d
b	c	d		x	i	a		k
d		a	d			j	b	i
x		i	x	a	j		c	

5. Considere em $\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$ as seguintes operações:

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ (m, n) &\longmapsto m * n = |m - n| \end{aligned} \quad \text{e}$$

$$\triangle : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+, \text{ definida por } m \triangle n = \begin{cases} m & , \text{ se } n = 1 \\ n & , \text{ se } m = 1 \\ 1 & , \text{ se } m, n \neq 1 \end{cases}.$$

- a) Mostre que estas duas operações são comutativas e possuem elemento neutro.
b) Mostre que o único elemento $a \in \mathbb{Z}_+$ que satisfaz a implicação

$$a * x = a * y \implies x = y$$

para $x, y \in \mathbb{Z}_+$, é o elemento neutro de “ $*$ ”.

- c) Mostre que todo $b \in \mathbb{Z}_+$, com exceção de $b = 1$, possui infinitos simétricos em relação a “ $\triangle$ ”.

6. Sejam A um conjunto não vazio e $\mathcal{P}'(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos não vazios de A . Considere “ $*$ ” uma operação em A e “ $*_1$ ” a operação em $\mathcal{P}'(A)$ definida por

$$X *_1 Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}, \text{ para } X, Y \in \mathcal{P}'(A).$$

Mostre que:

- a) “ $*_1$ ” é associativa $\iff$ “ $*$ ” é associativa.
b) “ $*_1$ ” é comutativa $\iff$ “ $*$ ” é comutativa.
c) “ $*_1$ ” possui elemento neutro $\iff$ “ $*$ ” possui elemento neutro.

(Sugestão: para “ $\implies$ ” use subconjuntos unitários de A .)

7. Sejam A_1 e A_2 conjuntos não vazios e “ $\ast_1$ ” e “ $\ast_2$ ” operações em A_1 e A_2 , respectivamente. Considere o produto cartesiano $A = A_1 \times A_2$ e defina $\ast : A \times A \longrightarrow A$ da seguinte forma:

$$(a_1, a_2) \ast (b_1, b_2) = (a_1 \ast_1 b_1, a_2 \ast_2 b_2).$$

Mostre que:

- “ $\ast$ ” é associativa se, e somente se, “ $\ast_1$ ” e “ $\ast_2$ ” são.
 - “ $\ast$ ” é comutativa se, e somente se, “ $\ast_1$ ” e “ $\ast_2$ ” são.
 - “ $\ast$ ” possui elemento neutro se, e somente se, “ $\ast_1$ ” e “ $\ast_2$ ” possuem.
8. Considere o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$ de todas as funções de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ e a operação de composição de funções, “ $\circ$ ”, em $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$. Considere também $h, f \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$ definidas por:

$$h(n) = 3n \quad \text{e} \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{3} & , \text{ se } 3 \text{ divide } n \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

- Prove que $f \circ h = Id_{\mathbb{Z}}$. É verdade que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?
- f é simetrizável em relação a “ $\circ$ ”? Justifique sua resposta.

9. Seja A um conjunto não vazio com n elementos. Mostre que:

- O número de operações em A é n^{n^2} .
- O número de operações comutativas em A é igual a $n^{\frac{n^2+n}{2}}$.
- O número de operações com elemento neutro em A é igual a $n^{(n-1)^2+1}$.

10. Dê exemplo de:

- Uma operação que possui infinitos elementos neutros à direita.
- Uma operação que possui infinitos elementos neutros à esquerda.
- Uma operação “ $\ast$ ” num conjunto A para a qual existem $x \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $x^n \ast x^m \neq x^{n+m}$.

11. Sejam n um inteiro positivo e $\mathcal{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Considere em $\mathcal{Z}_n$ as operações de soma, “ $\oplus$ ”, e produto, “ $\odot$ ”, módulo n . Mostre que:
- “ $\oplus$ ” é associativa, comutativa e possui elemento neutro.
 - “ $\odot$ ” é associativa, comutativa e possui elemento neutro.
 - Todo elemento de $\mathcal{Z}_n$ é simetrizável em relação a “ $\oplus$ ”.
 - Um elemento $x \in \mathcal{Z}_n$ é simetrizável em relação a “ $\odot$ ” se, e somente se, $\text{mdc}(x, n) = 1$.

12. Considere no conjunto $\mathbb{R}^2$ a operação “ $*$ ” definida por $(a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$.
- Mostre que $(\mathbb{R}^2, *)$ é um monóide comutativo.
 - Sendo $\alpha = (1, 1)$, descreva o conjunto $A = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha * v = \alpha\}$ e mostre que A é um submonóide de $(\mathbb{R}^2, *)$.
 - Mostre que $\beta = (1, 2)$ é simetrizável em relação a “ $*$ ”. O elemento α é simetrizável em relação a “ $*$ ”? Justifique sua resposta.
13. Considere $(M, *)$ um monóide.
- Mostre que a operação $*$: $M \times M \longrightarrow M$ é uma função sobrejetora.
 - Que condição M deve satisfazer para que “ $*$ ” seja injetora?
 - Mostre que se a é um elemento simetrizável do monóide $(M, *)$, então a possui um único simétrico.
 - Mostre que se a é um elemento simetrizável do monóide $(M, *)$, então as aplicações $h_a, g_a : M \longrightarrow M$, definidas por $g_a(x) = x * a$ e $h_a(x) = a * x$, são bijetoras.
14. Sejam $(E, *)$ um monóide, “ e ” o seu elemento neutro e $U(E, *)$ o conjunto dos seus elementos simetrizáveis. Mostre que:
- $U(E, *)$ é fechado em relação à operação “ $*$ ”.
 - O simétrico de cada elemento de $U(E, *)$ pertence a $U(E, *)$.
15. Sejam $(M, *)$ um monóide e $a \in M$. Considerando $C = \{x \in M \mid a * x = x * a = a\}$, mostre que:
- C é não vazio e é fechado em relação a “ $*$ ”.
 - Se $x \in C$ e x é simetrizável, então o simétrico de x também pertence a C .
16. Sejam A um conjunto e “ $*$ ” uma operação associativa em A .
- Mostre que $R(A, *)$ é fechado em relação à operação “ $*$ ”.
 - Se A é finito e $a \in R(A, *)$, mostre que as aplicações
- $$\begin{array}{ccc} g_a : A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & g_a(x) = x * a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} h_a : A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & h_a(x) = a * x \end{array}$$
- são bijetoras.
- Se A é finito e $a \in R(A, *)$, mostre que $g_a^{-1}(a)$ é um elemento neutro à esquerda para “ $*$ ” e $h_a^{-1}(a)$ é um elemento neutro à direita para “ $*$ ”.
 - Conclua que se A é finito e $R(A, *)$ é não vazio, então existe em A elemento neutro para a operação “ $*$ ”.

17. Sejam M um conjunto não vazio e “ $*$ ” e “ $\cdot$ ” operações em M , sendo “ $\cdot$ ” distributiva em relação a “ $*$ ”. Suponha que “ $*$ ” possui elemento neutro e este elemento por 0.

a) Mostre que se todo elemento de M é regular à esquerda em relação a “ $*$ ”, então $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in M$.

b) Mostre que se todo elemento de M é regular à direita em relação a “ $*$ ”, então $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in M$.

c) Dê um contra-exemplo mostrando que o resultado do item (a) perde a validade se simplesmente retirarmos a hipótese de regularidade à esquerda dos elementos de M em relação a “ $*$ ”.

18. Seja A um conjunto não vazio e considere em A as seguintes operações:

$$\begin{array}{ccc} \diamond : A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x \diamond y = x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \boxplus : A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & x \boxplus y = y \end{array} .$$

Mostre que:

a) Se “ $*$ ” é uma operação qualquer em A , então “ $\diamond$ ” é distributiva à direita e “ $\boxplus$ ” é distributiva à esquerda em relação a “ $*$ ”.

b) Qualquer operação em A é distributiva em relação a “ $\diamond$ ” e a “ $\boxplus$ ”.

c) Mostre que “ $\diamond$ ” é a única operação em A que é distributiva à direita em relação a toda operação em A .

19. Sejam A e B conjuntos não vazios e suponha que existe uma função bijetora $g : A \longrightarrow B$. Considere “ $*$ ” uma operação em A e defina

$$\begin{array}{ccc} \Delta : B \times B & \longrightarrow & B \\ (x, y) & \longmapsto & x \Delta y = g(g^{-1}(x) * g^{-1}(y)) \end{array} .$$

Mostre que:

a) “ $*$ ” será associativa se, e somente se, “ Δ ” for.

b) “ $*$ ” será comutativa se, e somente se, “ Δ ” for.

c) “ $*$ ” terá elemento neutro se, e somente se, “ Δ ” tiver.

d) Se ambas as operações tiverem elemento neutro e $a \in A$, então a será simetrizável com respeito a “ $*$ ” se, e somente se, $g(a)$ for simetrizável com respeito a “ Δ ”.

20. Sejam a e b inteiros e defina a operação “ $*$ ” em $\mathbb{Z}$ por

$$x * y = ax + by, \text{ para } x, y \in \mathbb{Z}.$$

Determine condições sobre a e b para que esta operação:

- a) Seja associativa.
- b) Seja comutativa.
- c) Seja associativa e comutativa.
- d) Tenha elemento neutro.
- e) Defina estrutura de monóide comutativo em $\mathbb{Z}$.

21. Sejam $(M, *)$ um monóide e “ e ” o seu elemento neutro. Considerando o subconjunto $A = \{x \in M \mid x * x = x\}$ de M (A é o conjunto dos elementos idempotentes), mostre que:

- a) A é não vazio.
- b) O único elemento deste monóide que é simetrizável e que pertence a A é o elemento neutro.
- c) Se “ $*$ ” é comutativa, então A é um submonóide de $(M, *)$.
- d) Se “ $\triangle$ ” é uma operação em M distributiva em relação a “ $*$ ”, então $x \triangle m \in A$ e $m \triangle x \in A$ para quaisquer $m \in M$ e $x \in A$.
- e) Pode-se afirmar que A é fechado em relação a “ $*$ ”, mesmo sem a hipótese de comutatividade desta operação? Justifique.
- f) Dê exemplo de um monóide infinito não comutativo no qual todo elemento é idempotente.

22. Seja “ $*$ ” uma operação num conjunto E que é associativa e tem elemento neutro. Sendo A um subconjunto não vazio de E , indicamos por $C(A)$ o conjunto dos elementos $x \in E$ tais que $a * x = x * a$ para todo $a \in A$. No caso de termos $A = \{a\}$, indicamos $C(A)$ simplesmente por $C(a)$. Provar que:

- a) $C(A)$ é fechado em relação à operação “ $*$ ”.
- b) Se $B \subseteq A \subseteq E$, então $C(B) \supseteq C(A)$.
- c) $C(C(C(A))) = C(A)$.
- d) $C(a) \subseteq C(a^n)$ para todo $a \in E$ e para todo inteiro $n \geq 2$.
- e) Se $x \in A$ e x é simetrizável em relação a “ $*$ ”, então o simétrico de x também pertence a A .
- f) Dê um exemplo de uma operação “ $\triangle$ ” num conjunto X para a qual existe $a \in X$ tal que $C_1(a) = \{x \in X \mid x \triangle a = a \triangle x\}$ não é fechado em relação a “ $\triangle$ ”.

23. Seja $(M, *)$ um monóide e denote por e o seu elemento neutro. Mostre que:
- Se para um certo elemento $a \in M$ existem $x, y \in M$ tais que $a * x = y * a = e$, então $x = y$.
 - Se b é um elemento de M tal que b^n é simetrizável, para algum inteiro $n > 1$, e se k é um inteiro tal que $0 < k < n$, então b^k também é simetrizável.
24. Dê um contra-exemplo para a afirmação: se x e y são elementos de um monóide tais que xy é simetrizável, então necessariamente x e y são simetrizáveis.
25. Uma lei de composição interna $(x, y) \mapsto x * y$ em $E \neq \emptyset$ é dita ser *totalmente não associativa* se $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ para quaisquer $a, b, c \in E$. Mostre que:
- Tal lei não é comutativa e não possui elemento neutro.
 - $(a, b) \mapsto a^b$ é totalmente não associativa em $E = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$.
26. Mostre que $A = \{\cos \theta + i \sin \theta \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$ fechado em relação à multiplicação usual de números complexos. .
27. Considere $(M, *)$ um monóide e denote por “ e ” o seu elemento neutro. Considere também um subconjunto não vazio A de M , fechado em relação a “ $*$ ”. Suponha que $(A, *)$ possui elemento neutro e denote este elemento neutro por e_1 .
- É necessariamente verdade que $e = e_1$? Se a resposta for afirmativa, dê uma prova; se for negativa dê um contra-exemplo.
 - Mostre que se existe $a \in A$ tal que a é simetrizável em $(M, *)$, então tem-se $e = e_1$.
28. Considere A um conjunto não vazio, “ $*$ ” uma operação em A . Dizemos que um subconjunto B de A satisfaz a *propriedade de absorção* em relação a “ $*$ ” se para quaisquer $x \in A$ e $b \in B$ tem-se $x * b \in B$ e $b * x \in B$. Mostre que:
- Se B_1 e B_2 são subconjuntos de A que satisfazem a propriedade de absorção em relação a “ $*$ ”, então $B_1 \cup B_2$ e $B_1 \cap B_2$ também satisfazem esta propriedade.
 - Se “ $*$ ” possui elemento neutro e $B \neq A$, então $B \cap U(A, *) = \emptyset$.
29. Sejam $(A, *)$ um monóide comutativo. Mostre que:
- Se $a \in A$, então o conjunto $B = \{a * x \mid x \in A\}$ satisfaz a propriedade de absorção em relação a “ $*$ ”.
 - Se X é a união de todos os subconjuntos próprios de A que satisfazem a propriedade de absorção em relação a “ $*$ ”, então $X = A - U(A, *)$.
 - O resultado do item (a) continua válido sem a hipótese de comutatividade de “ $*$ ”? Justifique.

30. Considere o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Dados os subconjuntos

$$\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\} \quad , \quad \mathcal{A} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid \text{Im } f \text{ é finita}\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ é diferenciável e } f'(x) > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, decida qual(is) deles é (são) fechado(s) e qual(is) deles satisfaz(em) a propriedade de absorção em relação a cada uma das seguintes operações:

- a) A soma usual de funções.
- b) O produto usual de funções.
- c) A composição de funções.