ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

$2^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Considere o conjunto de matrizes

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ , \ |ad - bc| = 1 \right\}.$$

   Mostre que M, munido do produto de matrizes, é um grupo.

2. Considere o conjunto $\mathcal{P}(A)$, onde A é um conjunto não vazio, e a operação de interseção de conjuntos. $(\mathcal{P}(A), \cap)$ é um grupo? Justifique sua resposta.

3. Sejam G um grupo e $a \in G$. Mostre que a aplicação $\gamma_a : G \longrightarrow G$, definida por $\gamma_a(g) = a^{-1}ga$, é uma bijeção.

4. Sejam G um grupo e $a, b \in G$ tais que $ab = ba$. Mostre que:

   a) $a^n b = ba^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

   b) $(ab)^n = a^n b^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

5. Sejam A e B conjuntos não vazios de mesma cardinalidade e seja $g : A \longrightarrow B$ uma bijeção Considere em A uma operação "$*$" de modo que $(A, *)$ seja um grupo. Defina então em B a operação "$\diamond$" da seguinte forma:

$$b_1 \diamond b_2 = g(g^{-1}(b_1) * g^{-1}(b_2)).$$

   Mostre que $(B, \diamond)$ é um grupo e identifique o seu elemento neutro.

6. Considere o conjunto $A = \{1, a, b, x, y\}$ e "$*$" uma operação em A, definida pela seguinte tabela:

$*$	a	b	x	y	1
a	b	x	1	b	a
b	a	1	y	x	b
x	1	a	b	y	x
y	x	y	a	1	y
1	a	b	x	y	1

   a) Existe em A um elemento neutro para a operação "$*$"?

   b) $(A, *)$ é um grupo? Justifique sua resposta.

   c) "$*$" é associativa?

7. Seja G um grupo com elemento neutro e. Suponha que $x^2 = e$ para todo $x \in G$. Mostre que G é abeliano. (Dica: se x, $y \in G$, temos $(xy)^2 = e$.)

8. Considere o conjunto $\mathcal{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e a operação $\oplus$ definida da seguinte forma: $a \oplus b =$ resto da divisão de $a + b$ por 8, para $a, b \in \mathcal{Z}_8$. Construa a tábua de operação do grupo $(\mathcal{Z}_8, \oplus)$ e exiba um subgrupo de $\mathcal{Z}_8$ de ordem 2, se existir.

9. Consideremos o grupo $S_{\mathbb{Z}}$ (grupo simétrico sobre o conjunto $\mathbb{Z}$) e $f, g \in S_{\mathbb{Z}}$, definidas da seguinte forma:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{, se } n \text{ é par} \\ n-1 & \text{, se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(n) = \begin{cases} n-1 & \text{, se } n \text{ é par} \\ n+1 & \text{, se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Mostre que $o(f) = o(g) = 2$ e que $o(f \circ g) = \infty$.

10. Considere o grupo M do exercício 1 e os elementos $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ de M. Mostre que $o(A) = 4$, $o(B) = 3$ e $o(AB) = \infty$.

11. Calcular as ordens de todos os elementos de S_3 e construir a tábua de operação deste grupo.

12. Seja G um grupo finito de ordem par. Mostre que existe $x \in G$ tal que $o(x) = 2$.

13. Sejam G um grupo e $x \in G$ um elemento de ordem finita. Suponha que $o(x) = nm$, com m e n inteiros positivos. Mostre que $o(x^n) = m$.

14. Considere o conjunto $D_\infty = \mathbb{Z} \times \{1, -1\}$ e a operação $* : D_\infty \times D_\infty \longrightarrow D_\infty$, definida por $(n, x) * (m, y) = (n + xm, xy)$.

    a) Mostre que $(D_\infty, *)$ é um grupo.

    b) Mostre que $H = \{(m, 1) \ / \ m \in \mathbb{Z}\}$ é subgrupo de D_∞.

    c) Mostre que $o((m, -1)) = 2$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

    d) $(D_\infty, *)$ é abeliano? Justifique sua resposta.

15. Considere o grupo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, cuja operação é o produto de números complexos. Sejam $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e $C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $C_n \leq C \leq \mathbb{C}^*$.

16. Considere o grupo $GL_2(\mathbb{R})$ e o conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \ , \ a^2 + b^2 \neq 0 \right\}.$$

Mostre que H é um subgrupo abeliano de $GL_2(\mathbb{R})$.

17. Considere $\mathcal{S} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ e o grupo $(S, +)$, onde " + " denota a operação de soma de sequências. Considere também os subconjuntos K, das progressões aritméticas, e C, das sequências convergentes, de $\mathcal{S}$.

    a) Mostre que K e C são subgrupos de $\mathcal{S}$.

    b) Determine $K \cap C$.

18. Sejam G um grupo, $g \in G$ e H e K dois subgrupos de G.

    a) Mostre que $C(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ é um subgrupo de G.

    b) Se G é abeliano, mostre que $HK = \{hk \mid h \in H\ ,\ k \in K\}$ é um subgrupo de G.

19. Seja G um grupo abeliano e considere o conjunto $T(G) = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$. Mostre que $T(G)$ é um subgrupo de G. Vale o mesmo resultado sem a hipótese de comutatividade de G? Justifique.

20. Sejam G um grupo e $a \in G$. Mostre que $o(a) = o(a^{-1})$ e $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$.

21. Encontre todos os subgrupos de S_3 e verifique qual(is) deles é(são) normal(is).

22. Seja G um grupo abeliano finito com pelo menos dois elementos de ordem 2. Mostre que $|G|$ é um múltiplo de 4. (Dica: se a e b são dois elementos de G de ordem 2, mostre que $H = \{e, a, b, ab\}$ é um subgrupo de G).

23. Suponha um grupo finito G com dois subgrupos de ordens m e n primos entre si. Mostre que $|G|$ é múltiplo de nm.

24. Considere o grupo $(C_{12}, \cdot)$, onde $C_{12} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^{12} = 1\}$. Existe algum elemento $w \in C_{12}$, diferente de 1, tal que $w^5 = 1$? Caso exista, encontre todos.

25. Considere X um conjunto finito com exatamente 10 elementos e " $*$ " uma operação em X. Suponha que a e b são dois elementos distintos de X tais que $a * a = (b * b) * b = a$. Mostre que $(X, *)$ não pode ser um grupo.

26. Verifique se cada uma das seguintes aplicações são homomorfismos de grupos.

    a) $\psi : S_4 \longrightarrow S_4$, definida por $\psi(\alpha) = \alpha^2$.

    b) $M_n(\mathbb{R})$ é o grupo aditivo das matrizes $n \times n$ com entradas reais, $\mathbb{R}$ é o grupo aditivo dos reais e $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função determinante.

    c) $\mathbb{Z}$ é o grupo aditivo dos inteiros e $f,\ g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ são definidas por $f(x, y) = x + y$ e $g(x, y) = xy$.

    d) $\mathbb{R}^*$ é o grupo multiplicativo dos reais não nulos e $\det : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ é a função determinante.

e) $\mathcal{F}(I\!\!R)$ é o grupo aditivo das funções de $I\!\!R$ em $I\!\!R$, $M_2(I\!\!R)$ é o grupo aditivo das matrizes 2×2 com entradas reais e $T : \mathcal{F}(I\!\!R) \longrightarrow M_2(I\!\!R)$ é definida por $T(f) = \begin{pmatrix} f(0) & 0 \\ f(1)+f(2) & f(1) \end{pmatrix}$.

27. Considerando G um grupo, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

    a) G é abeliano.

    b) $\begin{array}{rccc} \varphi : & G & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & \varphi(x) = x^{-1} \end{array}$ é um homomorfismo.

28. Considere $C^\infty(I\!\!R) = \{f : I\!\!R \longrightarrow I\!\!R \mid f$ é infinitamente diferenciável$\}$ e o grupo $(C^\infty(I\!\!R), +)$, onde " + " é a soma de funções. Considere também o operador derivação:

$$\begin{array}{rccc} D : & C^\infty(I\!\!R) & \longrightarrow & C^\infty(I\!\!R) \\ & f & \longmapsto & D(f) = f' \end{array}.$$

    Mostre que D é um homomorfismo sobrejetivo e determine o seu núcleo.

29. Sejam G e G_1 grupos e $\varphi : G \longrightarrow G_1$ um homomorfismo. Mostre que:

    a) Se H é um subgrupo de G, então $\varphi(H) = \{\varphi(h) \mid h \in H\}$ é um subgrupo de G_1.

    b) Se $H \trianglelefteq G$ e φ é sobrejetor, então $\varphi(H) \trianglelefteq G_1$

    c) Se $g \in G$ é um elemento de ordem finita, então $\varphi(g)$ também tem ordem finita e $o(\varphi(g))$ divide $o(g)$.

    d) Se K é um subgrupo de G_1, então $\varphi^{-1}(K) = \{x \in G \mid \varphi(x) \in K\}$ é um subgrupo de G. Se $K \trianglelefteq G_1$, então $\varphi^{-1}(K) \trianglelefteq G$.

30. Considere os grupos $(I\!\!R, +)$ e $(I\!\!R^*_+, \cdot)$ $(I\!\!R^*_+ = \{x \in I\!\!R \mid x > 0\})$. Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} exp : & I\!\!R & \longrightarrow & I\!\!R^*_+ \\ & x & \longmapsto & exp(x) = e^x \end{array}$$

    é um isomorfismo.