# ESTRUTURAS ALGÉBRICAS

## $3^{\underline{a}}$ LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Considere em $\mathbb{Z}$ as operações " $+_1$ " e " $*$ " definidas por

$$a +_1 b = a + b - 1 \qquad \text{e} \qquad a * b = a + b - ab \ .$$

   a) Mostre que $(\mathbb{Z}, +_1, *)$ é um anel. Identifique o zero deste anel.

   b) $(\mathbb{Z}, +_1, *)$ é comutativo?

   c) $(\mathbb{Z}, +_1, *)$ possui unidade? Em caso afirmativo, identifique-a.

2. Considere o conjunto $I\!R^2$ e as operações " $+$ ", " $\cdot$ ", " $\times$ " e " $*$ " em $I\!R^2$ definidas por:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \quad ,$$

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2) \quad , \quad (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (2x_1 - y_2, y_1x_2) \ .$$

   a) Mostre que $(I\!R^2, +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade.

   b) Mostre que $(I\!R^2, +, \times)$ é um anel não comutativo e sem unidade.

   c) $(I\!R^2, +, *)$ é um anel? Justifique sua resposta.

3. Sejam $V$ um espaço vetorial e $\mathcal{L}(V)$ o conjunto de todas as transformações lineares de $V$ em $V$. Considere as operações de soma de transformações lineares, " $+$ ", e composição de funções, " $\circ$ ".

   a) Mostre que $(\mathcal{L}(V), +, \circ)$ é um anel com unidade.

   b) Identifique o zero e a unidade deste anel.

   c) Existe algum espaço vetorial $V$ para o qual $(\mathcal{L}(V), +, \circ)$ é comutativo? Justifique.

4. Seja $A$ um anel. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   i) $A$ é comutativo.

   ii) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ para quaisquer $x, y \in A$.

5. Sejam $A$ um anel e $a$, $b \in A$.

   a) Desenvolva $(a + b)^2$ e $(a + b)^3$.

   b) Desenvolva as potências do ítem (a) com a hipótese de que $ab = ba$.

   c) Supondo que $ab = ba$ e que $a^2 = b^2 = 0$, mostre que $(a + b)^n = 0$ para todo inteiro $n \geq 3$.

6. Seja $A$ um anel com a seguinte propriedade: $a^2 = a$ para todo $a \in A$. Mostre que:

   a) $a = -a$ para todo $a \in A$.

   b) $A$ é comutativo.

7. Mostre que todo anel com grupo aditivo cíclico é comutativo. Conclua que todo anel finito de ordem prima é comutativo.

8. Sejam $A$ um anel com unidade. Mostre que:

   a) Se $a$, $b$, $c \in A$ são tais que $ab = ca = 1$, então $b = c$ e portanto $a$ é um elemento inversível do anel $A$.

   b) Se $x \in A$ é tal que $x^2$ é inversível, então $x$ também é inversível.

9. Sejam $R$ um anel com unidade e $a \in U(R)$. Mostre que:

   a) Se $x \in R$ e $ax = 0$, então $x = 0$.

   c) Se $b$, $c \in R$ e $ab = ac$, então $b = c$.

   d) Se $3a = 0$, então $3x = 0$ para todo $x \in R$.

10. Sejam $K$ um corpo de 2 elementos. Considere o produto cartesiano $R = K \times K$ e as operações " $+$ " e " $*$ " em $R$ definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \text{e} \qquad (a, b) * (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd)\ .$$

   Mostre que $(R, +, *)$ é um corpo e construa as tabelas de suas operações.

11. Seja $K$ um corpo. Mostre que são equivalentes:

   i) Não existe $x \in K$ tal que $x^2 = -1$.

   ii) Para $a$, $b \in K$ com $a^2 + b^2 = 0$ tem-se necessariamente $a = b = 0$.

   Encontre nos corpos $\mathbb{C}$, $(\mathcal{Z}_5, \oplus, \odot)$ e $(\mathcal{Z}_{13}, \oplus, \odot)$ elementos $x$ tais que $x^2$ é igual ao oposto aditivo da unidade.

12. Em cada ítem, mostre que o anel não é um domínio de integridade e determine os seus elementos inversíveis.

   a) $(\mathcal{Z}_{10}, \oplus, \odot)$.

   b) $(\mathcal{Z}_{12}, \oplus, \odot)$.

   c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (produto direto).

13. Em cada ítem, verifique se o anel é um domínio de integridade. Em caso negativo, exiba algum divisor de zero.

a) $(A, +, *)$, onde $A$ é o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e " $+$ " e " $*$ " são operações em $A$ definidas por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \ .$$

b) $(\mathcal{Z}_{13}, \oplus, \odot)$.

c) $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in I\!R \right\}$ (subanel de $M_2(I\!R)$).

d) $\mathcal{F}(I\!R)$, cujas operações são a soma e o produto usuais de funções.

14. Considere o anel de matrizes $M_2(I\!R)$. Mostre que

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in I\!R \right\}$$

é um subanel de $M_2(I\!R)$ e que $M$ é um corpo.

15. Mostre que:

a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in I\!R \right\}$ é um subanel, mas não um ideal de $M_2(I\!R)$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y \text{ é par}\}$ é um subanel, mas não um ideal, do produto direto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

c) $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$ é um ideal primo do produto direto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

d) $\mathcal{D}_0 = \{f \in \mathcal{F}(I\!R) \mid f'(0) \text{ existe e é igual a } 0\}$ é um subanel do anel $\mathcal{F}(I\!R)$ de todas as funções de $I\!R$ em $I\!R$. $\mathcal{D}_0$ é um ideal de $\mathcal{F}(I\!R)$? Justifique.

e) $I = \{f \in \mathcal{F}(I\!R) \mid f(1) = 0\}$ é um ideal maximal do anel $\mathcal{F}(I\!R)$.

f) $J = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in I\!R \right\}$ é um ideal do anel $S$ do ítem (a).

g) Se $A$ é um anel, então $I = \{a \in A \mid 3a = 0\}$ é um ideal de $A$.

h) $\mathcal{I} = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid X \text{ é finito}\}$ é ideal do anel $\mathcal{P}(A)$ das partes de $A$.

16. Sejam $A$ um anel, $b \in A$, $B$ um subanel de $A$ e $I$ e $J$ ideais de $A$. Mostre que:

a) $C(b) = \{x \in A \mid xb = bx\}$ é um subanel de $A$.

b) $S = \{x \in A \mid xb = x\}$ é um subanel de $A$.

c) $B + I = \{x + y \mid x \in B \ , \ y \in I\}$ é um subanel de $A$.

d) $B \cap I$ é um ideal de $B$. $B \cap I$ é necessariamente um ideal de $A$?

e) $Z(A) = \{x \in A \mid /xa = ax \ \forall a \in A\}$ é um subanel comutativo de $A$ ($Z(A)$ é chamado de centro de $A$).

f) Se $A$ é comutativo, então $Ann(b) = \{x \in R \mid xb = 0\}$ é um ideal de $A$.

g) $T = \{x \in R \mid xJ \subseteq I\}$ é um ideal de $A$.

17. Mostre que:

a) Se $I = 8\mathbb{Z}$ e $J = 12\mathbb{Z}$ (ideais de $\mathbb{Z}$), então $I + J = 4\mathbb{Z}$, $I \cap J = 24\mathbb{Z}$ e $IJ = 96\mathbb{Z}$.

b) Se $I = 2\mathbb{Z}$ e $J = 3\mathbb{Z}$ (ideais de $\mathbb{Z}$), então $I + J = \mathbb{Z}$, $I \cap J = IJ = 6\mathbb{Z}$.

c) Se $R$ é um anel comutativo com unidade e $a$, $b \in R$ são tais que $a + b = 1$, então para $I = aR$ e $J = bR$ tem-se $I + J = R$ e $I \cap J = IJ = abR$. (Dica: para mostrar que $IJ = I \cap J$ tome $x \in I \cap J$ e observe que $x = xa + xb$.)

18. Seja $D$ um domínio de integridade. Mostre que:

a) Se $a \in D$ é tal que $a^2 = a$, então $a = 0$ ou $a = 1_D$.

b) Se $S \neq \{0\}$ é um subanel de $D$ com unidade, então $1_S = 1_D$.

c) Se $I$ e $J$ são ideais de $D$, ambos diferentes de $\{0\}$, mostre que $I \cap J \neq \{0\}$.

19. Considere o subconjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ de $I\!R$. Mostre que:

a) Se $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, com $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{Q}$, então $a = c$ e $b = d$.

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ é um subcorpo de $I\!R$ e determine $\alpha^{-1}$, onde $\alpha = a + b\sqrt{2} \neq 0$.

20. Em cada ítem, verifique se a aplicação é um homomorfismo de anéis. No caso da aplicação ser um homomorfismo, determine seu núcleo.

a) $f : M_2(I\!R) \longrightarrow I\!R$ é definida por $f(A) = \det A$.

b) Considere o anel $(\mathcal{Z}_{10}, \oplus, \odot)$ e a aplicação $r : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}_{10}$, definida por $r(n) =$ resto da disvisão de $n$ por 10.

c) $A$ é um anel, $a \in A$ é um elemento idempotente e $g : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ é definida por $g(n) = na$.

d) $D : C^1(I\!R) \longrightarrow C^0(I\!R)$, definida por $D(f) = f'$. Aqui $C^1(I\!R)$ e $C^0(I\!R)$ são os anéis das funções de $I\!R$ em $I\!R$ de classe $C^1$ e contínuas, respectivamente, cujas operações são a soma e o produto usuais de funções.

e) Sendo $A$ um conjunto e $B \subseteq A$, considere o anel $\mathcal{P}(A)$ e a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ & X & \longmapsto & \varphi(X) = X \cap B \end{array} .$$

f) Considere $C^0(I\!R)$ como no ítem (d) e a aplicação

$$\begin{array}{rlcl} \psi: & C^0(I\!R) & \longrightarrow & I\!R \\ & f & \longmapsto & \psi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \end{array} .$$

21. Sejam $A$ e $R$ anéis e $\varphi : A \longrightarrow R$ um homomorfismo. Mostre que:

a) Se $B$ é subanel de $A$, então $\varphi(B)$ é subanel de $R$.

b) Se $I$ é ideal de $R$, $\varphi^{-1}(I) = \{x \in A \mid \varphi(x) \in I\}$ é ideal de $A$.

c) Se $A$ possui unidade, $\varphi(1_A)$ é unidade de $Im\ \varphi$.

d) Se $x \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$, então $\varphi(nx) = n\varphi(x)$.

e) Se $x \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$, então $\varphi(x^n) = \varphi(x)^n$.

22. Sejam $A$ um anel comutativo com unidade e $\alpha \in A$. Defina

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_\alpha: & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \varphi_\alpha(x) = \alpha x \end{array} .$$

a) $\varphi_\alpha$ é um homomorfismo se, e somente se, $\alpha$ é idempotente.

b) se $A$ é um domínio de integridade e $\varphi_\alpha$ é um homomorfismo, então $\varphi_\alpha \equiv 0$ ou $\varphi_\alpha = Id_A$.

c) Se $B$ é um subanel com unidade de $A$ e $\alpha = 1 - 1_B$, mostre que $\varphi_\alpha$ é um homomorfismo cujo núcleo contém $B$.

23. Sejam $A$ um anel com unidade e $a \in U(A)$. Considerando a aplicação

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_a: & A & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & \varphi_a(x) = axa^{-1} \end{array}$$

mostre que:

a) $\varphi_a$ é um automorfismo de $A$.

b) Se $a, b \in U(A)$, então $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$.

24. Considerando o anel $M$ do exercício 14, mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rlcl} g: & \mathbb{C} & \longrightarrow & M \\ & a + bi & \longmapsto & g(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

é um isomorfismo de anéis.

25. Mostre que os corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ (exercício 19) não são isomorfos.