DETERMINANTES, PADRÕES E CONJECTURAS: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA.

Marília de Souza Sales[1] - marysales01@hotmail.com
Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros[1] - luiz.silva@professor.ufcg.edu.br

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *O presente trabalho tem o intuito de propor atividades envolvendo a análise de padrões com determinantes de matrizes, com os objetivos de estabelecer fórmulas para o cálculo de determinantes de matrizes especiais, abrir horizontes para manipulações das propriedades deste objeto de estudo e desenvolver o pensamento matemático. Destacamos também a investigação matemática como metodologia para produzir e redescobrir conhecimentos e o uso de tecnologias como ferramenta para divulgar e expandir o uso experimental na Matemática, expondo como um professor pode desenvolver essas atividades de forma a promover um ensino de qualidade na Educação Básica.*
Palavras-chave*: Determinantes; Padrões; Conjecturas.*

1. Introdução

A preocupação em oferecer um ensino de qualidade na Educação Básica em Matemática nos instiga a refletir a nossa prática como educador e buscar soluções que atendam a demanda de um mundo cada vez mais globalizado e tecnológico.

Visando o desenvolvimento do protagonismo estudantil na aprendizagem da matemática, dos pensamentos algébrico e computacional do estudante, os professores podem consultar os documentos normativos do Ministério da Educação e Cultura, tais como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a fim de buscarem orientações para a prática pedagógica do docente e, consequentemente, garantir as aprendizagens essenciais.

Entre as recomendações expostas nestes registros temos a indicação de atividades pedagógicas envolvendo a identificação de regularidades e generalizações de padrões para desenvolver o domínio de um saber/fazer Matemática e de um saber/pensar matemático. Segundo Giraldo, Paulo e Mattos (2012), "a incorporação de tecnologias computacionais no ensino de Matemática possibilita novas abordagens, e em alguns casos revelando aspectos dos conceitos matemáticos que não poderiam ser ensinados por meio de recursos convencionais". Assim, o uso desse tipo de tecnologia subsidia a realização de atividades essenciais para o desenvolvimento e formação da aprendizagem da matemática, tais como a identificação de padrões, elaboração de conjecturas, fazer experimentos e avaliar ou reavaliar os resultados, propor generalizações e em certos casos estabelecer suas demonstrações.

Conforme (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006), a investigação matemática "envolve naturalmente conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente os caracteriza é o paradigma de conjectura-teste-demonstração". A incorporação dessa prática na sala de aula pode favorecer a interação do estudante com métodos ativos de aprendizagem, possibilitando e incentivando a busca de demonstrações, contraexemplos e reflexões de suas descobertas que devem fazer parte de uma aprendizagem pautada no próprio educando.

Diante dessa perspectiva, elaboramos algumas atividades para analisar padrões, envolvendo determinantes e matrizes, com os objetivos de estabelecer fórmulas e abrir horizontes para novas manipulações das propriedades deste objeto de estudo. E assim, promover práticas distintas de uma simples algoritmização tão recorrentes na sala de aula.

Para tanto, propomos o uso do *software* Maxima[1], para a exploração das atividades, verificações e refinamen-

[1]http://maxima.sourceforge.net/

tos das conjecturas estabelecidas. A escolha desse *software* ocorre porque ele é disponibilizado gratuitamente e permite a manipulação de objetos matemáticos em suas representações algébricas e simbólicas. Com isso, priorizamos o tempo de estudo do estudante na validação do pensamento, em detrimento ao tempo gasto no processo de algebrização.

Como resultado da nossa pesquisa, apresentamos algumas atividades que explora o paradigma exploração-conjectura-demonstração que exibiremos na próxima Seção.

2. Exemplo de atividade envolvendo padrões, conjecturas e determinantes

Quando pensamos em padrões e regularidades, logo associamos ao que é comum a todos os objetos em um dado conjunto/grupo. A identificação e as generalizações de padrões favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico, em todas as etapas da Educação Básica, como apontam BRASIL (2018) e BRASIL (2000).

Durante a nossa pesquisa percebemos que o determinante de algumas matrizes especiais, que apresentam regularidades e padrões na disposição dos elementos que a compõem, também figura padrões em função da ordem ou de alguns elementos destacados da matriz. Sabemos que o determinante possui muitas aplicações, entre elas caracterizar um conjunto de três pontos colineares e, por sua vez, oferece uma maneira alternativa para a obtenção da equação da reta que passa por dois pontos dados, assim como são utilizados para o cálculo de área de figuras planas e o cálculo de volume de alguns sólidos geométricos, sendo, portanto, um conteúdo riquíssimo do ponto de vista educacional, merecendo maior destaque no Ensino Médio.

A despeito deste objeto matemático estar relacionado a problemas de áreas e volumes, bem como a colinearidade de pontos no plano, ele não provoca afinidades dos estudantes com o seu estudo pelo fato de envolver, além de cálculos cansativos, atividades que requerem do estudante apenas a aplicação de regras, desestimulando o interesse do discente. Além disso, é bastante comum encontrar nos livros didáticos apenas exercícios propostos de repetição, sem nenhum destaque às propriedades desse interessantíssimo objeto.

Por meio das atividades propostas a seguir, os estudantes, por meio da observação dos resultados, dos padrões e regularidades percebidos, são estimulados a utilizar as propriedades para demonstrar casos particulares, testar ou refutar uma conjectura. A análise de uma das propostas será apresentada na Seção 3.

Atividade Proposta 1. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e a matriz $A_n = [a_{ij}]_{n\times n}$, definida por:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i \neq j, \\ a, & se\ i = j. \end{cases}$$

Quais seriam os valores dos determinantes quando $a \in \{0, 1\}$, para as matrizes de ordem $2, 3, 4$ e 5? O que se percebe nestes resultados? Agora, o que aconteceria se $a \in \{2, 3, 4\}$?

Conjectura 1. $|A_n| = (a-1)^{n-1} \cdot (a+n-1)$.

Atividade Proposta 2. *Seja $b \in \mathbb{R}$, utilize o Maxima para obter o determinante da matriz abaixo, considerando os casos de ordem 3, 4 e 5, descreva o padrão observado.*

$$B_n = [b_{ij}]_{n\times n}\ tal\ que\ b_{ij} = \begin{cases} b, & se\ i = j\ e\ i \neq 1, \\ 1, & caso\ adverso. \end{cases}$$

Conjectura 2. $|B_n| = (b-1)^{n-1}$.

Atividade Proposta 3. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, considere a matriz $C_n = [c_{ij}]_{n\times n}$ definida por:*

$$c_{ij} = \begin{cases} a, & se\ i = j, \\ b, & se\ i - j = 1\ ou\ i = 1\ e\ j = n, \\ 0, & caso\ adverso. \end{cases}$$

Utilize o Maxima para obter o determinante da matriz C_n com $n = 3$, 4 e 5. Registre os resultados dos determinantes e observe os expoentes de a e b. Consegue detectar alguma relação? Registre a sua conjectura e procure justificá-la.

Conjectura 3. $|C_n| = a^n + (-1)^{n+1} b^n$.

3. Resultado e discussão da Atividade Proposta 1.

Nessa atividade, o professor pode motivar os estudantes a utilizar o Maxima para calcular o determinante da matriz fornecida. Após estabelecerem a conjectura intuitivamente, direcionar os discentes a realizarem algumas verificações para casos particulares, por exemplo considerando inicialmente alguns valores de a e de n. Caso elas sejam refutadas, o estudante é aconselhado a refiná-las. Para isso, os questionamentos apontados no enunciado do exemplo devem direcionar o estudante a perceber que, no caso $a = 0$, o determinante é igual a ordem da matriz menos uma unidade, variando o sinal conforme a paridade da ordem da matriz. Podemos representar esses resultados em uma tabela para facilitar a observação de resultados e identificação dos padrões.

Tabela 1: Resultado do determinante, em função do valor de a

n	$a = 0$	$a = 2$	$a = 3$
2	1	3	8
3	-2	4	20
4	3	5	48
5	-4	6	112

Fonte: Elaborada pela autora

Nesta etapa da investigação, para cada valor de a, os estudantes podem estabelecer conjecturas distintas. O professor pode estimular os alunos a realizarem algumas verificações no Maxima e justificá-las, mediando através das propriedades dos determinantes. Possíveis conjecturas podem surgir para casos de $a \in \{0, 2, 3\}$, sendo:

$$\begin{aligned} a &= 0 \Rightarrow |A_n| = (n-1) \cdot (-1)^{n-1}, \\ a &= 2 \Rightarrow |A_n| = (n+1), \\ a &= 3 \Rightarrow |A_n| = 2^{n-1}(n+2). \end{aligned}$$

Para os dois primeiros casos, classificamos de fácil percepção a identificação dos padrões. Para $a = 3$, é possível que os estudantes apresentem dificuldades: para superá-las, sugerirmos que o professor estimule os estudantes a reescrever cada resultado obtido como um produto de fatores primos, a fim de estabelecer relações com as potências de 2. Note que, para cada caso particular do valor de a, temos conjecturas distintas. Para o caso geral, recomendamos que seja realizado pelo professor, uma vez que, para alguns estudantes, o processo de demonstração é desconhecido.

Vale ressaltar que para conjecturar é preciso explorar e imaginar uma generalização a partir de exemplos significativos. E, quando os estudantes observam os casos particulares, adquirem experiências, o processo de refutação e reformulação ocorrem espontaneamente. Para isso, exploraremos os casos particulares:

Para $n = 1$, por definição de determinante, temos que:

$$|A_1| = a.$$

Para $n = 2$:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (a+1) \cdot (a-1).$$

Para $n = 3$, temos:

$$\begin{aligned} |A_3| &= \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a+2 & a+2 & a+2 \end{vmatrix} = (a+2) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (a+2) \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a+2) \cdot (a-1)^2. \end{aligned}$$

Embora essa opção envolva manipulações com várias propriedades, ela é viável pois os algoritmos realizados também apresentam regularidades, fundamentais para a demonstração e a obtenção do determinante de uma matriz no caso geral. Além disso, algumas relações podem não ser identificadas pelos estudantes imediatamente.

cabe ao professor estimular os alunos através de uma pergunta norteadora, por exemplo, qual a relação entre o expoente do fator $(a-1)$ e a ordem da matriz?

A partir dos resultados acima, podemos observar que existem relações, em função da ordem n da matriz e dos elementos a da diagonal, nos direcionando a formular a seguinte conjectura:

Conjectura 1:$|A_n| = (a-1)^{n-1} \cdot (a+n-1)$.

Antes de apresentar a demonstração do resultado, é interessante observar que o professor deve pedir aos alunos que testem essa conjectura para outros valores que não fizeram parte do processo inicial. Por fim, o professor pode expor o resultado como proposição, respeitando a linguagem e simbologia matemática e sistematizando a sua demonstração.

Proposição 1. *Seja $A = [a_{ij}]$ a matriz quadrada de ordem n, cujos elementos são fornecidos pela seguinte lei de formação: para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, n$, o $ij-$ésimo elemento de A é*

$$a_{ij} = \begin{cases} a \ se \ i = j, \\ 1 \ se \ i \neq j. \end{cases}$$

Então, $|A| = (a-1) \cdot (a+n-1)$.

Demonstração. Observe que:

$$\begin{aligned}
|A_n| &= \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} \\
&\stackrel{1}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 & a+n-1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{2}{=} (a+n-1)\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{3}{=} (a+n-1)\begin{vmatrix} a-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\stackrel{4}{=} (a+n-1) \cdot \underbrace{(a-1) \cdot (a-1) \cdot (a-1) \cdots (a-1)}_{n-1} \\
&= (a-1)^{n-1} \cdot (a+n-1).
\end{aligned}$$

□

Nas igualdades acima foram aplicadas as seguintes operações:

1. Substituimos a n-ésima linha por $L_1 + L_2 + \cdots + L_{n-1}$, isto é: $L_n \leftarrow \sum_{i=1}^{n-1} L_i$.

2. Utilizamos o fato que ao multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

3. Para $j \in \{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n-1\}$, substituimos as colunas C_j por $C_j - C_n$, isto é: $C_j \leftarrow C_j - C_n$.

4. Usamos o fato de que o determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

4. Conclusões

O progresso do presente trabalho viabilizou uma proposta de atividade que pode favorecer a descoberta ou redescoberta de conhecimentos matemáticos, a criação e análise de conjecturas, além de desenvolver o pensamento algébrico e computacional. Todavia, pudemos comprovar as limitações da utilização de um *software* no processo formativo, haja vista que com ele podemos realizar a verificação para casos particulares, mas não para o caso geral. Para isto, devemos recorrer às propriedades dos objetos e da linguagem matemática para realizar a demonstração das conjecturas.

Agradecimentos

Agradecemos a todo corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática (Profmat) da Universidade Federal de Campina Grande, por todo conhecimento compartilhado. Aos professores Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro (UFPB) e Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer (UFCG) pelas valiosas sugestões na construção desse trabalho.

Agradecemos à CAPES pelo auxílio e concessão da bolsa, fundamental para o suporte à pesquisa e conclusão do Mestrado Profissional de Matemática.

Referências

BRASIL. *Parâmentros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC, 2000. Citado na página 2.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em 19 de JANEIRO de 2020. Citado na página 2.

GIRALDO, V.; PAULO, C.; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática.* Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 1.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006. Citado na página 1.