A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO ESFÉRICO

Maxwell Aires da Silva[1] **- maxwell.matematico@gmail.com**

[1]Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Na Geometria Euclidiana Plana existe um resultado bastante conhecido sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, a saber, dado um triângulo* $\Delta(ABC)$ *qualquer, sendo* α, β *e* γ *seus ângulos internos, a soma destes resultam em um ângulo raso, ou seja,* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, *ou ainda em radianos* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. *Contudo, se o triângulo não estiver contido em um plano, e sim na superfície* $\mathcal{S}$ *de uma esfera de raio* $r > 0$, *então a soma de seus ângulos internos será superior a dois ângulos retos, conforme mostrou o matemático francês Albert Girard em* 1629. *Mais precisamente,* $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \dfrac{\mathcal{A}}{r^2}$, *em que* $\mathcal{A}$ *é a área do triângulo e* r *é o raio da esfera que o contém. Objetivamos apresentar e demonstrar tal resultado, a qual pode ser encontrada em LIMA* (2012)
Palavras-chave*: Triângulo esférico; soma dos ângulos internos; Girard*

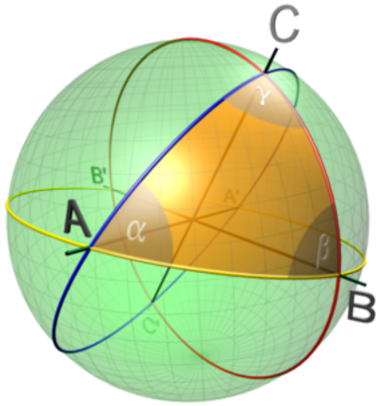
1. Introdução

A Geometria Euclidiana, assim nomeada em homenagem ao filósofo e matemático grego **Euclides** (325 a.C. - 265 a.C.) é um ramo da Matemática que estuda as figuras geométricas planas e espaciais, seus elementos e suas medidas relacionadas como perímetro, área, volume, ângulo (abertura), etc. Em meados do século III a.C Euclides publicou o que viria a ser uma das obras mais bem sucedidas de toda a História da Matemática, *Os Elementos*, EUCLIDES (2009), constituída de 13 livros (capítulos) dos quais 5 tratam de Geometria Plana; 3 sobre Números; 1 sobre Proporções; 1 sobre Incomensurabilidade e os 3 últimos sobre Geometria Espacial.

Nos *Elementos*, a proposição 32 nos diz que dado um triângulo $\Delta(ABC)$ qualquer, sendo α, β e γ seus ângulos internos, a soma destes resultam em um ângulo raso, ou seja, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ou ainda em radianos $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Este resultado é bastante conhecido e serve como base para muitas outras demonstrações envolvendo ângulos de figuras quaisquer.

Toda a geometria envolvida nos Livros de 1 a 5 dos *Elementos* possuem algo em comum, a saber, tais figuras estão contidas em algum plano. Contudo, se o triângulo não estiver contido em um plano, e sim na superfície $\mathcal{S}$ de uma esfera de raio $r > 0$, então a soma de seus ângulos internos será superior a dois ângulos retos, conforme nos indica **intuitivamente** na Figura 1:

Figura 1: Ângulos internos de um triângulo esférico



Fonte: Wikipédia

Não é difícil, contudo, convencer-se desse fato, bastando para isso considerar o ponto C da figura anterior como sendo um polo da esfera e os pontos A e B contidos no equador relativo a C, e desse modo devemos ter $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2}$, e daí $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \gamma > \pi$. Em 1629 o matemático francês **Albert Girard** (1595 - 1632) apresentou uma expressão que nos permite calcular tal soma conhecendo-se apenas a área $\mathcal{A}$ do triângulo e o raio r da esfera que o contém.

Objetivamos com isso apresentar e demonstrar o teorema de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

2. Definições e Resultados Preliminares

Pretendemos aqui apresentar algumas definições e resultados que servirão de suporte teórico para o resultado que demonstramos na seção seguinte.

Definição 1: Seja $\mathcal{S}$ uma esfera de centro O e raio $r > 0$. Um **Círculo Máximo** $\mathcal{C}$ é a interseção de $\mathcal{S}$ com um plano que passa por O.

Definição 2: Um círculo máximo $\mathcal{C}$ divide a esfera $\mathcal{S}$ em duas regiões denominadas **Hemisférios**.

As definições anteriores foram extraídas de DOLCE (2013)

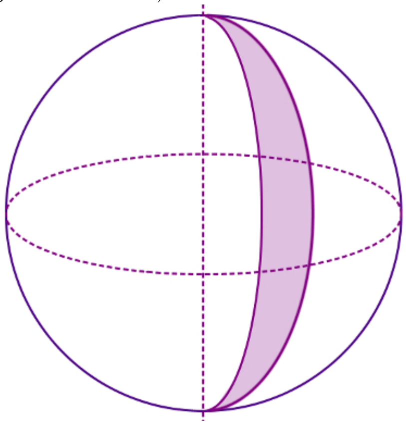
Definição 3: Seja $\mathcal{S}$ uma esfera de centro O e raio $r > 0$. Um **Triângulo Esférico** é uma região de $\mathcal{S}$ totalmente contida em um hemisfério $\mathcal{H}$ limitada por três arcos de círculo máximo, denominado seus lados.

Definição 4: Seja P um ponto sobre a superfície da esfera $\mathcal{S}$. Um ponto P' é dito um **Ponto Antipodal** a P quando é diametralmente oposto a ele.

Definição 5: Um **Fuso** f é uma região da esfera compreendida entre dois semicírculos máximos.

A Figura 2 mostra uma um exemplo de fuso:

Figura 2: Esfera, Círculo Máximo e Fuso

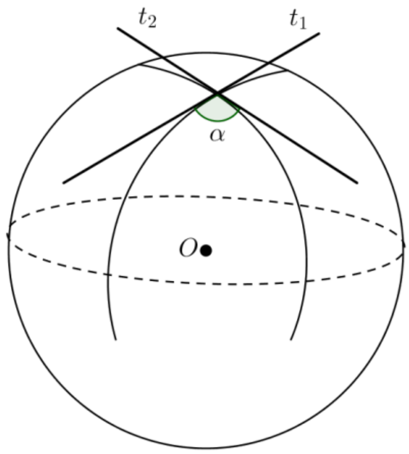


Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/

Definição 6: Um **Ângulo esférico** é o ângulo formado por dois arcos de círculo máximo. A medida de um ângulo esférico é obtida pela abertura das semirretas tangentes a esses arcos.

A Figura 3, extraída de SANTOS (2018), ilustra a forma de se medir um ângulo esférico:

Figura 3: Ângulo esférico



Fonte: file:///C:/Users/55839/Downloads/4645-19421-1-PB.pdf

Também é sabido que a área da esfera é dada por $A(\mathcal{S}) = 4\pi r^2$, em que $r > 0$ é o raio. Para a a área do fuso, perceba que sendo α o ângulo do fuso (medido em radianos), sua área é diretamente proporcional a este, e a expressão $A(f) = 2\alpha r^2$ determina a área de tal fuso.

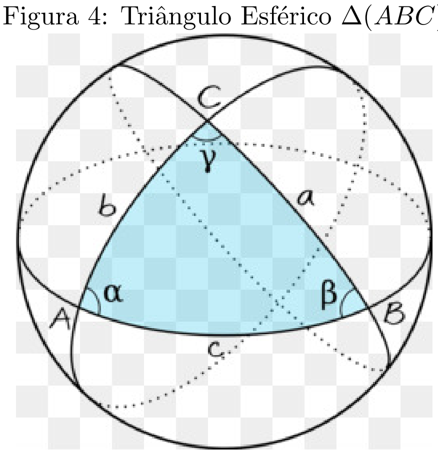
3. Resultado Principal

Vamos agora apresentar e demonstrar o teorema devido a Girar, demonstrado por ele em 1629, a qual pode ser encontrada em LIMA (2012)

Teorema: (Girar) A soma dos ângulos internos α, β e γ de um triângulo esférico é dada por $\alpha+\beta+\gamma = \pi + \dfrac{\mathcal{A}}{r^2}$, em que $\mathcal{A}$ é a área do triângulo e r é o raio da esfera que o contém.

Demonstração: De fato, tome um triângulo esférico $\Delta(ABC)$ arbitrário de ângulos internos α, β e γ totalmente contido em um hemisfério $\mathcal{H}$ da esfera $\mathcal{S}$, conforme ilustra a Figura 4:

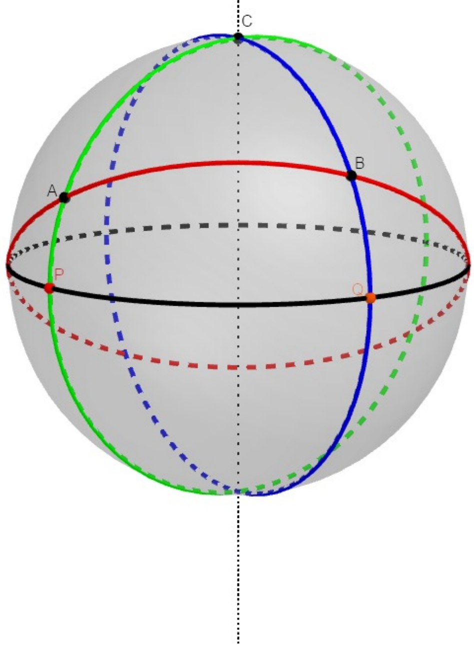
Figura 4: Triângulo Esférico $\Delta(ABC)$



Fonte: https://www.gratispng.com/png-8cg2uz/

Sem perda de generalidade, considere o ponto C como sendo um polo do triângulo e o círculo máximo de preto, ilustrado na Figura 5 como sendo o equador relativo a C. Agora, prolongue o lado AC (verde) em ambas as direções até o ponto P e o ponto P', seu ponto antipodal. Prolongue também o lado BC (azul) em ambas as direções até o ponto Q e o ponto Q', seu ponto antipodal até seu equador relativo (preto), ou seja, até o ponto P e o ponto P', seu ponto antipodal, conforme mostra a Figura 5:

Figura 5: Prolongamento dos lados até seu equador relativo



Fonte: Elaborada pelo autor

Com isso, obtemos exatamente a área de um fuso de ângulo γ, que denotaremos por f_γ cuja área é dada por

$$A(f_\gamma) = 2\gamma r^2. \tag{1}$$

Efetuando o mesmo procedimento a partir dos pontos B e A do triângulo, obtemos análoga e respectivamente

$$A(f_\beta) = 2\beta r^2 \text{ e } A(f_\alpha) = 2\alpha r^2 \tag{2}$$

Fazendo $A(f_\gamma) + A(f_\beta) + A(f_\alpha)$ obtemos a área do hemisfério $\mathcal{H}$, que corresponde à metade da área da esfera. Mas, neste caso, a área $\mathcal{A}$ do triângulo foi somada duas vezes a mais, donde obtemos

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 = 2\pi r^2 + 2\mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad 2r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi r^2 + 2\mathcal{A}.$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{2r^2}$ em ambos os membros, vem

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{2\pi r^2}{2r^2} + \frac{2\mathcal{A}}{2r^2}$$

e efetuando os devidos cancelamentos, obtemos finalmente $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \dfrac{\mathcal{A}}{r^2}$.

■

O resultado do Girard possui uma consequência imediata no que diz respeito ao valor mínimo e máximo da soma de tais ângulos.

Corolário: Seja $\Delta(ABC)$ um triângulo esférico com α, β e γ ângulos internos. Então,

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Demonstração: De fato, pelo Teorema anterior tem-se

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\mathcal{A}}{r^2},$$

em que $\mathcal{A}$ é a área do triângulo. Então, quanto menor for a área do triângulo menor será a soma dos ângulos internos, pois $\mathcal{A} \to 0 \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}}{r^2} \to 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \to \pi$. Agora, quanto maior for a área do triângulo maior será a soma dos ângulos internos, e maximizamos a área do triângulo esférico quando $\mathcal{A} \to 2\pi r^2$, e isto nos diz que $\mathcal{A} \to 2\pi r^2 \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}}{r^2} \to 2\pi \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \to 3\pi$. Logo,

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

■

4. Conclusões

O resultado obtido por Girard é de grande relevância para o nosso contexto, uma vez que o nosso espaço ambiente (habitat) tem a forma de uma esfera, a saber, o planeta terra. Entender como funciona a geometria de uma esfera nos permite entender com mais clareza como estudar e aplicar a geometria em escala global.

É interessante também ressaltar que, para a Astronomia, a Geologia e a Cosmologia, por exemplo, a geometria esférica é de suma importância, visto que tais áreas da ciência estudam, dentre outras coisas, o nosso planeta como um dos ambientes principais de pesquisa científica.

Referências

DOLCE. O. *Fundamentos de Matemática Elementar.* Vol 10. Atual, São Paulo, 2013. Citado na página 2

EUCLIDES. *Os Elementos.* Editora UNESP, São Paulo, 2009. Citado na página 1

LIMA. E. L. *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* SBM, Rio de Janeiro, 2012. Citado na página 3

SANTOS. R. A., OLIVEIRA. J. *Trigonometria Triangular Esférica.* RCT, Roraima, 2018. Citado na página 3.