ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENEM

Jaldir de Oliveira Costa[1] **- jaldir.matematica@gmail.com**
Romildo Nascimento de Lima[1] **- romildo@mat.ufcg.edu.br**

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste trabalho pretendemos discutir a presença do conteúdo de Análise Combinatória no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM. Iniciamos por um breve histórico do exame, destacando a sua Matriz de Referência e a abordagem dada às questões de combinatória. Apontamos um levantamento realizado nas provas aplicadas a partir de 2009, quando o exame foi reformulado e passou para o modelo atual, onde identificamos a incidência de 26 questões que exigem o domínio das diferentes técnicas de contagem. Por fim, indicamos uma estratégia para resolver problemas combinatórios e explicamos sua utilização através de uma proposta de resolução para uma questão.*
Palavras-chave*: Análise Combinatória; ENEM; Resolução de Problemas.*

1. Introdução

Este trabalho é derivado da dissertação do Mestrado Profissional de Matemática, elaborada por COSTA (2021), que apresenta uma proposta de ensino para o conteúdo Análise Combinatória no Ensino Médio. Um dos capítulos foi dedicado à discussão desse conteúdo no Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, após a reformulação da Matriz Curricular, ocorrida em 2009.

O ENEM é, certamente, o principal instrumento avaliativo da etapa final da Educação Básica. Instituído através da Portaria MEC nº 438, de 28 de maio de 1998, o ENEM cumpre com a atribuição da União de realizar o processo de avaliação nacional para os estudantes do Ensino Médio, conforme o previsto no Artigo 9º da LDB (BRASIL, 1996), Inciso VI: "Assegurar processo nacional de avaliação do rendimento escolar no ensino fundamental, médio e superior, em colaboração com os sistemas de ensino, objetivando a definição de prioridades e a melhoria da qualidade do ensino".

Tabela 1: Quantidade de inscritos no ENEM: 1998 a 2019

Ano	Quantidade de Inscritos	Ano	Quantidade de Inscritos
1998	157.221	2009	4.148.721
1999	346.819	2010	4.626.094
2000	390.180	2011	5.380.857
2001	1.624.131	2012	5.791.332
2002	1.829.170	2013	7.173.574
2003	1.882.393	2014	8.722.290
2004	1.552.316	2015	7.792.025
2005	3.004.491	2016	8.627.371
2006	3.742.827	2017	6.731.186
2007	3.568.592	2018	5.513.662
2008	4.018.070	2019	5.095.308

Fonte dos dados: ⟨https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/historico⟩ Acesso 01/06/2021, às 00:09.

O exame, que é aplicado anualmente, registrou as menores quantidades de inscritos nas primeiras edições pois a participação era voluntária, conforme expresso no Artigo 5º da (BRASIL, 1998). Mas, a partir de 2005, quando a obtida passou a ser utilizada como meio para o ingresso nas instituições privadas, através do Programa Universidade Para Todos - PROUNI (2004) e do Fundo de Financiamento Estudantil - FIES (2010), o número de inscrições aumentou consideravelmente. Com a implantação do Sistema de Seleção Unificada - SISU, que possibilitou o credenciamento das instituições públicas de Ensino Superior (IES) para utilizarem as notas do

ENEM como critério de seleção, em substituição parcial/total aos vestibulares, o número de inscritos supera os 5 milhões de inscritos, desde 2011. Assim, cabe destacar que uma maior quantidade de inscritos representa, estatisticamente, que a concorrência por vaga no Ensino Superior também aumenta (quantidade de inscritos por número de vagas ofertadas).

A partir da Matriz de Referência e do levantamento nas avaliações anteriores identificamos os conteúdos mais recorrentes, onde é possível constatar que o domínio das diferentes técnicas de contagem está sempre presente. Isto implica na necessidade de conhecermos os conceitos elementares da Análise Combinatória: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo, Combinação (Simples ou Com Repetição), entre outras.

Além disso, pretendemos analisar a inserção deste conteúdo no ENEM e propor uma discussão sobre a estratégia para resolver os problemas combinatórios. Em seguida, selecionamos uma questão, dentre todas pertinentes à combinatória, e apresentamos uma proposta de solução, acompanhada da discussão.

2. Metodologia

Este trabalho foi desenvolvido, principalmente, a partir de uma pesquisa documental, bibliografias relacionadas ao conteúdo de Análise Combinatória e consulta ao acervo de provas do ENEM.

Inicialmente analisamos a Portaria MEC nº438/1998 que criou o ENEM, e a Portaria Normativa Nº18/2012 que instituiu o SISU.

Em seguida, analisamos a Matriz de Referência, documento vigente desde 2009, que é o principal instrumento norteador sobre os conteúdos e habilidades exigidos no exame, organizados em quatro áreas do conhecimento e uma produção do genêro dissertativo-argumentativo. A área de Matemática e Suas Tecnologias contempla 45 questões, ou seja, o equivalente a 20% da nota final do candidato.

Neste documento, identificamos que o conteúdo de Análise Combinatória é mencionado na Competência 1, através da Habilidade 2: "H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem". Contudo, esta é uma descrição abrangente, que deixa implícito quais tópicos atendem aos "Princípios de Contagem". Mais adiante, a Matriz de Referência cita, novamente, os princípios de contagem, ao tratar dos Conhecimentos Numéricos: "Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, **princípios de contagem**."(BRASIL, 2009)

Como os Princípios de Contagem são aplicáveis em diferentes contextos, principalmente, em situações-problemas do cotidiano, o estudo da Análise Combinatória é dividido em subtópicos que possibilitam compreender as tópicos derivados do Princípio Fundamental de Contagem, que podemos chamar de técnicas de contagem.

Para o estudo de cada uma dessas técnicas e como, referências desse trabalho, destacamos MORGADO, HAZZAN e PEREIRA; CAMPOS, pois, reunem as principais teorias e apresentam exemplos que permitem aprofundar os conhecimentos na temática, sendo um recurso além do livro didático. Dentre estes, destacamos a estratégia de MORGADO e CARVALHO (2015, p. 108-109) para atacar e resolver problemas de contagem:

> **1) Postura.** Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. (...)
> **2) Divisão.** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples. (...)
> **3) Não adiar as dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

E, também as recomendações de PEREIRA e CAMPOS (2012, p. 16) que apresentam uma estratégia semelhante para chegar a solução de problemas combinatórios, dividir a decisão em subdecisões e aplicar o Princípio da Multiplicação.

> O **Princípio da Multiplicação** pode ser utilizado também quando a decisão é dividida em mais que duas subdecisões. Por exemplo, suponha que a decisão tenha que ser tomada e que tal decisão seja dividida em três subdecisões d_1,d_2,d_3 que deverão ser tomadas uma após a outra e numa seqüência. Em outras palavras, para tomarmos a decisão d, primeiro uma decisão d_1 tem que ser tomada, depois

de d_1 uma decisão d_2 tem que ser tomada, depois de tomadas as decisões d_1 e d_2, uma decisão d_3 tem que ser tomada.

Ambas estratégias indicam a necessidade prévia de organizar as ideias e, em seguida, aplicar o conhecimento matemático correspondente, ter uma postura ativa para buscar soluções e aprender com os próprios erros. Adquirindo, neste processo, uma base de conteúdos que permita-o solucionar situações mais complexas que venham a surgir, inclusive para os desafios do Ensino Superior.

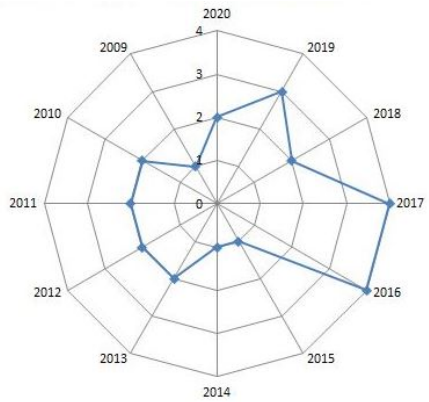
Assim, o próximo passo, é identificar e resolver questões que possam ser aplicadas estas estratégias. Por isso, prosseguimos com um levantamento das questões do ENEM, identificando, dentre estas, quais contemplam o conteúdo de Análise Combinatória.

3. Resultado e discussão

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP é responsável pela elaboração e aplicação do ENEM, mantendo, em seu site, o banco de provas e gabaritos de todos os exames aplicados, desde o primeiro realizado em 1998 até o ano de 2020.

Analisamos cada prova e cada questão, com a finalidade de averiguar a incidência das questões cujo conteúdo é Análise Combinatória, a partir de 2009. O resultado está ilustrado no Gráfico Figura 1, onde é possível observar o quantitativo anual, variando de 1 a 4 questões, e o total de 26 questões aplicadas nas doze últimas edições.

Figura 1: Questões de Análise Combinatória no ENEM - 2009 a 2020

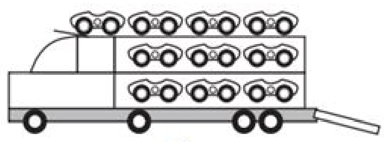


Fonte: Autoral utilizando os dados do (INEP, 2021)

Depois que as questões foram identificadas e catalogadas, somos motivados a resolver algumas, aplicando a estratégia de resolução apresentada na metodologia. Assim como o trabalho de COSTA (2021), que sugeriu as resoluções para dez questões aplicadas no ENEM, referentes ao mesmo conteúdo.

Aqui, detalharemos a solução para apenas uma questão, que foi aplicada no exame de 2017. Selecionada porque exemplifica bem o modelo de questão aplicado no exame e pode, claramente, ser resolvida segundo a estratégia de MORGADO e CARVALHO (2015). Além disso, a resolução é interessante devido a sua complexidade, que pode ser desenvolvida por uma técnica de contagem menos usual. Vejamos:

> Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.
Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?
A) $C_{6,4}$
B) $C_{9,3}$
C) $C_{10,4}$
D) 6^4
E) 4^6

Solução: Existem 10 carrinhos a serem coloridos, utilizando-se quatro cores, onde cada cor deve ser utilizada pelo menos uma vez. Sigamos as seguintes etapas:

1ª) Tomando 4 carrinhos e colorindo-os um de cada cor, todas as cores serão utilizadas e teremos $10 - 4 = 6$ carrinhos restantes;

2ª) Para colorir os 6 carros, teremos 4 cores à disposição, que podem repetir-se ou não. Por isso será utilizado conceito de Combinação com repetição: $C_{n-1+p,6} = C_{4-1+6,6} = C_{9,6}$;

3ª) Pela propriedade de Combinação, onde $C_{n,p} = C_{n,n-p}$, temos que $C_{9,6} = C_{9,9-6}$. Ou seja, a quantidade de modelos distintos do brinquedo-caminhão cegonha é $C_{9,3}$. Portanto, a alternativa correta é B.

□

Note que, a estratégia de resolução possui uma sequência. Primeiramente, assuminos o papel de quem deseja resolver o problema e tomar a decisão de colorir os carros sob as condições dadas. Em seguida, dividimos esta decisão principal em três decisões mais simples: no primeiro momento colorimos um carro com cada cor, que garante que todas as cores serão utilizadas. Por fim, aplicamos o conceito de Combinação com Repetição para encontrar a quantidade de maneiras possíveis de colorir os seis carrinhos restantes e, aplicamos ainda, uma propriedade das combinações para chegar ao resultado.

Uma avaliação interessante de ser feita é quais as interpretações equivocadas do enunciado, que levariam às demais opções incorretas. Vejamos:

A) $C_{6,4}$: Esta opção representa uma tentativa equivocada de selecionar 4 carros distintos (que não é o caso), dentre os 6 restantes. Ou talvez, um erro na aplicação da propriedade das combinações.

C) $C_{10,4}$: Esta opção estaria correta se, e somente se, o questionamento fosse com relação à escolha de 4 carrinhos quaisquer, dentre 10 carrinhos distintos disponíveis.

D) 6^4: Esta opção expressa uma tentativa de usar o conceito de Arranjo com Repetição dos elementos $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$, porém a maneira correta deveria ser as cores 4 disponíveis para os 6 carros restantes. Mas, não estaria correta pois fixaria uma ordem.

E) 4^6: Aplicação do conceito de Arranjo com Repetição, ou seja, $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6$. Porém, neste caso, a ordem na coloração dos carrinhos não é relevante, então deve-se usar o conceito de combinação.

A partir dessa investigação, entendemos que o objetivo principal da questão é avaliar se o canditato saberá distinguir sobre os agrupamentos ordenáveis ou não ordenáveis, além de aplicar corretamente as técnicas de contagem e suas propriedades.

Percebamos que, para se chegar a resposta, utilizando corretamente o conceito de Combinação com elementos repetidos, foi necessário responder aos seguintes questionamentos:

a) Os elementos (cores) podem se repetir? Sim.

b) Vai utilizar todos os elementos (cores)? Sim.

c) A ordenação dos elementos (coloração dos carrinhos) interfere na contagem? Não.

Assim, percebemos que as demais alternativas estão baseadas em raciocínios equivocados e/ou escolha das outras técnicas de contagem. Por isso, a tarefa de analisar as alternativas incorretas é muito recomendada para discussão em sala de aula. Em especial, para interação em grupos, onde cada aluno pode apresentar sua interpretação e a motivação para marcá-las. Porém, quando o aluno se detém a assinalar a alternativa e, após a conferência do resultado, percebe que acertou ou errou, limita-se a discussão e, consequentemente, a aprendizagem.

4. Conclusões

As questões do ENEM são elaboradas em consonância com a Matriz de Referência, que faz menção ao conteúdo de Análise Combinatória, quando aponta para o domínio dos princípios de contagem. Deste modo, o exame exige a habilidade de compreender as variadas técnicas de contagem e a capacidade de distinguir entre agrupamentos simples ou com repetição, aplicados em diferentes contextos.

Este fato é constatado quando levantamos a quantidade de questões e detalhamos a resolução de uma delas. Pois, vimos que é necessário ter uma boa estratégia para resolver os problemas combinatórios, e, que estes questionamentos exigem engenhosidade associada ao domínio das principais técnicas.

Concluimos que, dentro do conteúdo programático para a Educação Básica, o estudo de Análise Combinatória deverá contemplar o maior número possível de técnicas, e exemplos, que permitam reconhecer e resolver os problemas de contagem. Assim, destacamos as estratégias de MORGADO e CARVALHO (2015) e PEREIRA e CAMPOS (2012) pois direcionam sobre a abordagem para resolução desses problemas.

Referências

BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.* Brasília: Diário Oficial da União, 1996. Citado na página 1.

BRASIL. *Portaria nº438 de 28 de maio de 1998.* Brasília: MEC, 1998. Citado na página 1.

BRASIL. *Matriz de referência do ENEM.* Brasília: MEC, 2009. Citado na página 2.

COSTA, J. O. *Guia de ensino para análise combinatória a partir dos livros didáticos, ENEM e BNCC.* Campina Grande: UFCG, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 3.

HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar: Combinatória, Probabilidade. Vol. 5. 8. ed.* São Paulo: Atual, 2013. Citado na página 2.

INEP. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* 2021. Disponível em: ⟨https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem⟩. Citado na página 3.

MORGADO, A. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: IMPA, 1991. Citado na página 2.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 5.

PEREIRA, A. G. C.; CAMPOS, V. S. M. *Análise Combinatória e Probabiliade. 2. ed.* Natal: EDUFRN, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 5.