A importância do estudo de Indução e da Recorrência Matemática para as Provas da OBMEP

José Railton da Silva Dantas[1] **- joserailton20082008@hotmail.com**
Rodrigo Cohen Mota Nemer[1] **- rodrigocmnemer@mat.ufcg.edu.br**

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste trabalho abordamos o conceito de Indução; relatamos sobre Recorrência Matemática; expusemos definições, enunciamos teoremas associados ao conteúdo Progressões Aritméticas. Tem como objetivo compor um material de apoio para auxiliar estudantes da educação básica quando envolvidos com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Foi realizado uma revisão bibliográfica e análise de provas aplicadas em edições anteriores desta Olimpíada. Por fim, dedicamo-nos à resolução das questões selecionadas e relacionadas aos temas apresentados. Nosso trabalho é relevante para alunos e professores envolvidos em competições Matemáticas, ou mesmo, para aqueles que buscam aprofundar seus conhecimentos sobre os temas abordos.*

Palavras-chave: *Indução; Recorrência; Progressão.*

1. Introdução

Este trabalho é decorrente da Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática de Dantas (2021), na qual foram dedicados dois de seus Capítulos sobre os conteúdos matemáticos que iremos abordar.

Neste trabalho é apresentado conceitos de Indução e Recorrência Matemática, Progressões Aritméticas e duas Questões da OBMEP, estas foram selecionadas das provas aplicadas nos anos de 2012 e 2014.

Este trabalho tem como objetivos: Desenvolver o conceito de Indução Matemática, apresentando situações problemas, bem como sua utilidade para demonstrações Matemáticas, no nosso trabalho, nos assuntos Progressões Aritméticas e Progressão Geométricas; Revisar os conceitos de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas, através da resolução de questões da OBMEP que abordam esse assunto e apresentar, e desenvolver Recorrências Matemáticas.

Os conceitos matemáticos abordados neste trabalho são necessários para as provas desta Olimpíada, o que torna, o estudo deles relevantes para discentes e docentes envolvidos nesta Competição. Pois, as provas da OBMEP têm histórico de abordar temas que envolvem raciocínio recursivo – conforme Problemas 1 e 2 (ver Seção 3). Indução e Recorrência estão presentes em apostilas de preparação para esta Olimpíada. Por isso, trabalhamos tais conceitos à luz de Morgado e Carvalho (2015), apresentando aplicações. Ainda, para que fique claro ao leitor a importância desses conteúdos, iremos usá-los no estudo de Progressões Aritméticas.

2. Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi realizada pesquisa na literatura com o intuito de selecionarmos as referências bibliográficas. Após esta seleção, foi desenvolvida a parte histórica e conceitual do texto. Em seguida, selecionou-se questões de provas aplicadas em edições da OBMEP. A resolução destas questões foram desenvolvidas com uma linguagem própria, acessível ao público alvo focada na justificação dos argumentos utilizados.

Para entender a importância de Indução e Recorrência Matemática na prova da OBMEP é necessário compreender tais conceitos. Para Indução é necessário saber o que significa uma sentença matemática. Com base em Vieira (2015), considere P uma propriedade e $P(n)$ uma sentença aberta que depende da variável n, para $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, quando uma sentença contém n e ao substituir n por $a \in \mathbb{N}$, obtêm-se $P(a)$, que é verdadeira ou falsa. Desse modo, a propriedade P será verdadeira ou falsa. A seguir, enunciamos o Teorema 1, conhecido como o *Princípio de Indução Finita.*

Teorema 1. *Seja P uma propriedade sobre números naturais. Suponhamos que P é tal que*

(i) *$P(1)$ é válida;*

(ii) *para cada natural $k \geq 1$, a validade de $P(k)$ implica a validade de $P(k+1)$.*

Então, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

A seguir apresentamos definição de recorrências.

Definição 1. *Uma relação de recorrência é uma equação que expressa cada elemento de uma sequência em função de elementos anteriores. Mais precisamente, no caso em que apenas o elemento imediatamente anterior está envolvido, uma relação de recorrência possui o formato a seguir*

$$x_n = \varphi(n, x_{n-1}) \text{ para } n > 1,$$

onde, $\varphi : \mathbb{N} \times X \to X$ é uma função, e X é um conjunto ao qual os elementos de uma sequência devem pertencer. Para qualquer $x_0 \in X$, isso define uma sequência única com x_0 como seu primeiro elemento.

Trazemos agora, o conceito de Progressão Aritmética, à luz de Morgado e Carvalho (2015).

Definição 2. *Chama-se Progressão Aritmética (PA) uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa constante é chamada de razão da PA e é representada pela letra r.*

Note que, a definição de progressão aritmética é de cunho recursivo, ou seja, é um exemplo da aplicação de recorrência. Temos, a seguir, o Teorema 2, que trata do cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PA.

Teorema 2. *Seja a Progressão Aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de n termos. A soma dos n primeiros termos dessa PA é dada por:*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

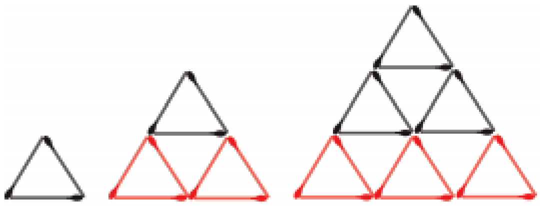
3. Resultado e discussão

Este trabalho aborda alguns conceitos da Matemática Discreta, dentre eles Indução, Recorrência e Progressões. É um material de apoio para a OBMEP, no entanto, não aborda todos os conteúdos para este Evento, existem outros trabalhos que complementam assuntos não abordados neste, como o de Araujo (2018), por exemplo. Temos ainda o banco de Questões da OBMEP, que é composto por exercícios para o treinamento desta Olimpíada.

Adiante temos duas questões da OBMEP, em que suas resoluções foram desenvolvidas à luz de Dantas (2021). É importante perceber que tais questões fazem uso do raciocínio recursivo, o que mostra a importância do estudo de recorrências na preparação para esta Olimpíada. Quanto a relevância de Indução Matemática para este Evento, está no fato de serem provadas a validade, por indução, das fórmulas utilizadas no conteúdo de progressões.

1. **Problema (Questão 9, Primeira Fase, Nível 2)(OBMEP, 2012).** Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na Figura 1. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?

Figura 1: OBMEP 2012 - Questão 9



Prova da 1ª fase da OBMEP 2012

Solução: Perceba que a posição ocupada por cada triângulo é igual ao número de palitos do lado do triângulo. Seja (a_n) a sequência formada pelo número de palitos de fósforo de cada triângulo. Temos

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = a_1 + 3 \cdot 2$$
$$a_3 = a_2 + 3 \cdot 3$$

E de modo análogo,

$$a_n = a_{n-1} + 3n.$$

Esta última igualdade é possível prová-la por Indução.

Agora, somando os membros respectivos das igualdades apresentadas, segue

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 3 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 3n.$$

Subtraindo $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$ dos dois membros da igualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3n \\ &= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots n). \end{aligned}$$

Como $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(1+n)n}{2}$, o termo geral da sequência (a_n) é dado por

$$a_n = \frac{3(1+n)n}{2}.$$

Com a expressão do termo geral, obtemos o número de palitos de fósforo em cada montagem dos triângulos.

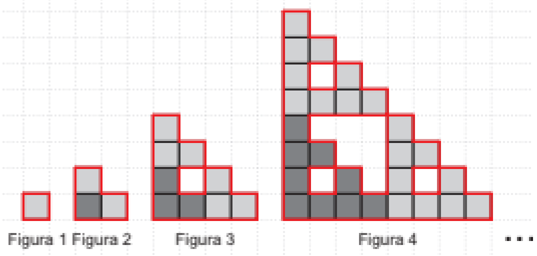
Sabemos que um triângulo foi construído com 135 palitos de fósforo. Assim, $a_n = 135$. Daí,

$$\frac{3n^2 + 3n}{2} = 135$$

que resulta no polinômio de segundo grau $n^2 + n - 90 = 0$, cujas raízes são $n = -10$ e $n = 9$. Note que n deve ser positivo, pois representa a posição dos triângulos. Assim, $n = -10$ não serve e $n = 9$ é solução.

2. **Problema (Questão 8, Primeira Fase, Nível 3)(OBMEP, 2014).** Começando com um quadrado de 1cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4cm, 8cm, 20cm e 56cm. Quanto mede o contorno da Figura 6?

Figura 2: OBMEP 2014 - Questão 8



Prova da primeira fase da OBMEP 2014

Solução: Para resolvermos este exercício, utilizaremos o raciocínio recursivo. Considere (F_n) a sequência formada pela medida do contorno de cada figura.

Vejamos o processo de construção da segunda imagem na Figura 2: ela é dada pela união de três quadrados, isto é, pela união de três cópias da primeira imagem. Por exemplo, na segunda figura, temos a união de três quadrados. Perceba que os lados que não estão destacados em vermelho representavam 4 lados antes. Assim, a medida do contorno desta figura é dado pelo produto entre o número de figuras sobrepostas e o número de lados destacados em vermelho, neste caso 4, menos 4. Análise semelhante pode ser feita para o contorno das demais figuras. Desse modo, temos

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 4 \\
F_2 &= 3 \cdot 4 - 4 = 8 \\
F_3 &= 3 \cdot 8 - 4 = 20 \\
F_4 &= 3 \cdot 20 - 4 = 56 \\
F_5 &= 3 \cdot 56 - 4 = 164 \\
F_6 &= 3 \cdot 164 - 4 = 488.
\end{aligned}
$$

Portanto, o contorno da Figura 6 mede $F_6 = 488$ cm. Além disso, perceba a conexão desta questão com recorrências matemática, pois

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 4 \\
F_2 &= 3 \cdot F_1 - 4 = 8 \\
F_3 &= 3 \cdot F_2 - 4 = 20 \\
F_4 &= 3 \cdot F_3 - 4 = 56 \\
F_5 &= 3 \cdot F_4 - 4 = 164 \\
&\vdots \\
F_n &= 3 \cdot F_{n-1} - 4.
\end{aligned}
$$

Desse modo, temos a seguinte recorrência: $F_n = 3 \cdot F_{n-1} - 4$ e $F_1 = 4$.

$\square$

4. Conclusões

Nos conteúdos desenvolvidos, abordamos demonstrações, mostramos aplicações voltadas aos conteúdos apresentados. Trouxemos questões de provas da OBMEP juntamente com suas soluções. As soluções foram desenvolvidas por meio de uma escrita própria, e, sempre que possível, fazendo comentários sobre o desenvolvimento de tais soluções.

O nosso trabalho é relevante para professores e alunos da Educação Básica, independentemente do envolvimento com a OBMEP. Entendemos que a aprendizagem vai além dos conteúdos ministrados em sala de aula, e que existe a necessidade de melhorar a qualidade da educação pública do nosso país.

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do PROFMAT - UFCG, por toda a dedicação e conhecimentos compartilhados. Aos professores, Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer, por ter me orientado, Dr. Vandenberg Lopes Vieira e Dr. José Arimatéia Fernandes, pelas considerações feitas para a melhoria do trabalho original.

Referências

ARAUJO, J. E. de. *Divisibilidade, Congruência e Aritmética Modular em Problemas Olímpicos, Dissertação de Mestado, Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional*. 2018. Disponível em: ⟨http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2015/10/TCC-Joselito-Elias.pdf⟩. Acesso em: 09 out 2020. Citado na página 2.

DANTAS, J. R. da S. *Matemática Discreta abordada nas questões e material da OBMEP, Dissertação de Mestado, Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional*. 2021. Disponível em: ⟨hhttp://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2021/03/Jose-Railton-da-Silva-Dantas-PROFMAT-UFCG-1.pdf⟩. Acesso em: 09 set 2021. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. *Matemática Discreta*. [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

OBMEP. *OBMEP 2012*. 2012. Disponível em: ⟨http://www.obmep.org.br/provas.htm⟩. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 2.

OBMEP. *OBMEP 2014*. 2014. Disponível em: ⟨http://www.obmep.org.br/provas.htm⟩. Acesso em: 09 jan 2021. Citado na página 4.

VIEIRA, V. L. *Um Curso Básico em TEORIA DOS NÚMEROS*. [S.l.]: Campina Grande: eduepb, 2015. Citado na página 1.