Uma Proposta Histórico-Construtivista dos Logaritmos

Daniel Cordeiro de Morais Filho[1] **- demoraisfilho@gmail.com**
Rayanne Dantas Maia[2] **- rayanne-maia@hotmail.com**

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Parcialmente financiado pelo PET/FNDE - Campina Grande, PB, Brasil

[2]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *O presente trabalho aborda um estudo para conceitualização dos logaritmos baseada no seu processo de construção histórica e no estudo dos métodos puramente algébricos, utilizados na construção das tábuas de logaritmos. Apresentamos uma proposta, até certo ponto, autoral, para a construção do conceito de logaritmo a partir do resgate histórico da ligação desse conceito com os de PAs e de PGs. Em consequência, discutiremos algumas limitações desse processo para definir o logaritmo de todo número real positivo, porém, contornaremos esses "obstáculos" usando importantes resultados da Análise Matemática na reta real. Intencionando levar, até certo ponto, nosso trabalho para uma sala de aula, encerramos com uma proposta de atividade construtivista, com o intuito de proporcionar ao professor uma sugestão de trabalho que possibilitará ao aluno uma aprendizagem histórica e significativa sobre os logaritmos, a partir da ideia de PAs e de PGs.*
Palavras-chave*: Construtivismo; Logaritmo; História*

1. Introdução

O ensino dos logaritmos, pode muitas vezes ser visto pelos alunos do Ensino Médio como um conteúdo de pouca importância para o conhecimento, e sem conexão com qualquer outro assunto que os alunos já viram. Um fator que contribui para essa ocorrência pode ser a forma como os logaritmos são abordados em sala de aula, por ser, quase sempre, consequência de processos pedagógicos focados na memorização da definição, nas propriedades e repetição dessas propriedades em exercícios manipulativos. Muitas vezes, não se exibe a necessidade da criação dos logaritmos, tampouco se faz um resgate dos processos históricos que levaram a sua construção, e nem se trabalham com os conhecimentos prévios dos alunos para facilitar a compreensão desse conceito. Para mudar essa realidade, faz-se necessário realizar um trabalho que conduza o aluno a um novo olhar para o estudo do tema, percebendo a importância dos logaritmos no contexto da História da Matemática, bem como para resolução de diversas situações-problemas.

Acreditamos ser indispensável que o professor desenvolva uma postura de pesquisador, e que agregue às suas aulas conhecimentos além dos livros didáticos, como uma forma de enriquecer seu trabalho. Nesse sentido, pode acrescentar questionamentos e debates que levem o aluno a agir, a pensar e a ir de encontro às respostas, além de estimulá-lo na participação ativa do processo de construção do conhecimento, pois "aprende-se agindo sobre o conteúdo a ser aprendido e retirando das ações sobre esse conteúdo qualidades próprias dessas ações e não mais dos conteúdos apenas" (BECKER, 2012a, p.265).

Com esse intuito, encontramos na História da Matemática uma alternativa para realizar um estudo estimulador dos logaritmos, partindo da necessidade da sua engenhosa construção, associada aos conceitos de PAs e de PGs, que proporcionaram aos pioneiros matemáticos dos séculos XVI e XVII pensar em maneiras para se chegar ao conceito dos logaritmos principiando-se com essas sequências numéricas. Empregando um processo construtivo, elaborado por questionamentos, construções de teoremas e discussões de exemplos, apresentaremos como garantir a existência do logaritmo de todo número real positivo, bem como encontrar boas aproximações para ele, a partir de PAs e PGs, refazendo o verdadeiro processo histórico de criação dessas ideias.

Analisamos, também, livros didáticos atuais para verificar se encontramos algum resquício do elo histórico perdido entre o estudo dos logaritmos e as progressões aritméticas e geométricas. Tendo em vista o resgate histórico didático desse elo, e, propondo uma ressignificação para o estudo dos logaritmos, temos por objetivos:

1.1 Objetivo Geral

Desenvolver uma proposta de trabalho para o estudo dos logaritmos envolvendo a história da matemática sob uma perspectiva construtivista.

1.1.1 Objetivos Específicos

- Analisar os processos históricos-algébricos usados na construção das tábuas de logaritmos;
- Discutir como os logaritmos apareciam nos livros didáticos antigos e atuais;
- Propor uma atividade histórica-construtivista para o estudo dos logaritmos.
- Disponibilizar uma proposta, para ser usada por professores em sala de aula, que forneça conhecimento histórico-construtivista dos logaritmos.

2. Metodologia

O presente trabalho foi motivado pela análise de um dos livros da coleção de livros didáticos da editora FTD, intitulada "ÁLGEBRA CURSO SUPERIOR: Para o ciclo Colegial e admissão às Escolas Superiores", publicado no ano de 1947 (PEDRO, 1947), que aborda a definição dos logaritmos associando-a às PAs e PGs. Inspirados por esta apresentação e realizando um levantamento bibliográfico em livros de História da Matemática, e, até mesmo, na obra original de Henry Briggs (BRUCE, 2021), um dos criadores dos logaritmos, realizamos uma releitura, até certo ponto, autoral, para trazer a conceitualização dos logaritmos, para professores e alunos, sob uma nova perspectiva.

Adicionalmente ao nosso trabalho, analisamos livros didáticos atuais, (IEZZI et al., 2016), (SOUZA; GARCIA, 2016), para verificar como a relação entre logaritmos e PAs e PGs é abordada no Ensino Médio, e percebemos que essa relação não era enfatizada. Pensando na sala de aula, apresentamos uma proposta de atividade para o estudo do logaritmo, partindo da associação essas sequências numéricas e o logaritmo.

3. Resultado e discussão

Interessado em desenvolver uma ferramenta capaz de simplificar os longos e exaustivos cálculos de multiplicações, divisões e extrações de raízes − cada vez mais demandados pelo desenvolvimento da Ciência em sua época − o escocês, John Napier (1550-1617), criou os logaritmos. Sua ideia surgiu da observação de que, associando-se os termos de uma progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, ..., b^m, ..., b^n, ...$$

com os termos da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, ..., m, ..., n, ...,$$

o produto $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, de dois termos da primeira progressão, está associado à soma $m + n$ dos termos correspondentes da segunda progressão(EVES, 2011). Logo, seria possível simplificar a tarefa de multiplicar por somar.

No entanto, essa abordagem, que inspirou a construção do conceito do logaritmos, não consta, ou apresenta-se de forma bem oculta nos livros didáticos. O aluno do Ensino Médio, ao se deparar com um problema sobre logaritmos, não tem a percepção de que este conteúdo está associado às progressões aritméticas e geométricas.

Para a construção da definição dos logaritmos a partir da associação entre as PAs e as PGs, abordamos as definições destas sequências com algumas peculiaridades inerentes aos nossos objetivos, como apresentaremos a seguir.

Definição: *Uma **progressão aritmética (PA)** é uma sequência infinita da forma* $(PA)_r = (..., -3r, -2r, -r, 0, r, 2r, 3r, ...)$, *onde* $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ *e a diferença entre cada termo da sequência e o termo anterior é constante, chamada de **razão**. Uma **progressão geométrica (PG)** é uma sequência infinita da forma* $(PG)_q = (..., q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q^1, q^2, q^3, ...)$, *onde* $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, $q \neq 1$ *e o quociente entre cada termo e o termo anterior é constante, chamado de **razão**.*

Exemplo: *A sequência infinita* $(..., -3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, ...)$ *é uma PA de razão* $\sqrt{2}$.
A sequência infinita $\left(..., \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, 1, \left(\frac{1}{3}\right)^{1}, \left(\frac{1}{3}\right)^{2}, \left(\frac{1}{3}\right)^{3}, ...\right)$ *é uma PG de razão* $\frac{1}{3}$.

Baseando-se no contexto histórico, associamos cada q^n da $(PG)_q$, para $n \in \mathbb{Z}$, a um único termo nr da $(PA)_r$, por exemplo, a $(PG)_{\frac{1}{3}}$ está associada a $(PA)_{\sqrt{2}}$, como mostra a tabela abaixo:

Tabela 1: $(PG)_{\frac{1}{3}}$ associada à $(PA)_{\sqrt{2}}$

...	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	...	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$	...
...	$-n\sqrt{2}$	...	$-2\sqrt{2}$	$-1\sqrt{2}$	0	$1\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	...	$n\sqrt{2}$	...

Definimos que o logaritmo do termo $q^n \in (PG)_q$ é o seu correspondente na $nr \in (PA)_r$, com $q, r \in \mathbb{R}^*_+$ e $q \neq 1$, ou seja, $log(q^n) = nr$. Mas, como determinar o logaritmo de um número que não pertence à $(PG)_q$? A ideia natural seria inserir termos entre cada dois termos consecutivos e gerar novas PGs, e, com isso, encontrar uma PG que contivesse esse número. Com esses questionamentos, pensamos e chegamos a ideia de *refinamento* para PAs e PGs:

Definição: *Sejam os números reais positivos* r *e* r'. *A* $\boldsymbol{(PA)_{r'}}$ ***é um refinamento da*** $\boldsymbol{(PA)_r}$, *se* $(PA)_r \subset (PA)_{r'}$. *Sejam os números reais positivos* q, q', *com* $q, q' \neq 1$. *A* $\boldsymbol{(PG)_{q'}}$ ***é um refinamento da*** $\boldsymbol{(PG)_q}$, *se* $(PG)_q \subset (PG)_{q'}$.

Quando os respectivos refinamentos existem temos $r' = \dfrac{r}{m}$ e $q' = q^{\frac{1}{k}}$, para certos $m, k \in \mathbb{N}$.

3.1 Uma importante pergunta sobre refinamentos das PAs e das PGs

Diante da definição acima, ficam as perguntas:

Dados $x \in \mathbb{R}$ e uma $(PA)_r$, com $r \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, tal que $x \notin (PA)_r$, é possível encontrar um refinamento

$(PA)_{r'}$ de $(PA)_r$ de modo que $x \in (PA)_{r'}$?

Dados $x \in \mathbb{R}$ e uma $(PG)_q$ com $q \in \mathbb{R}$, tal que $q > 0$ e $q \neq 1$, é possível encontrar um refinamento $(PG)_{q'}$ de $(PG)_q$ de modo que $x \in (PG)_{q'}$?

As respostas estão nas Tabelas 2 e 3, encontradas mais adiante. Os resultados apresentados nas tabelas nos mostraram que nem sempre é possível determinar um refinamento dessas sequências, tal que todo número real positivo x pertença a algum refinamento.

Tabela 2: Respostas às perguntas sobre refinamentos de PAs

x	r	Resposta
$x \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}$	Sim
$x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{Q}$	Não
$x \in \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	Não
$x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	$r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	Nem sempre

Fonte: Elaborada pelos autores

Tabela 3: Resposta às perguntas sobre refinamentos de PGs

x	q	Resposta
$x \in \mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{Q}$	Não
$x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{Q}$	Nem sempre
$x \in \mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	Nem sempre
$x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	$q \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$	Nem sempre

Fonte: Elaborada pelos autores

3.2 Definição formal dos logaritmos

Até este ponto relacionamos os termos de uma $(PG)_q$ aos termos de uma $(PA)_r$ para definir logaritmo de um número que está na $(PG)_q$ ou em algum refinamento de $(PG)_q$. Na seção anterior, mesmo com refinamentos de PAs e PGs, vimos nem sempre ser possível determinar o logaritmo de um número positivo qualquer, mesmo inserindo uma quantidade tão grande, quanto se queira, de termos entre termos da PGs.

Então, como determinar o logaritmo de um número que não pertence ao refinamento? Para responder a essa pergunta, montamos um resultado de suma importância nessa construção, que culminou na definição formal dos logaritmos

Teorema: *Dados uma progressão geométrica de razão q, com $q > 0$ e $q \neq 1$, e um número real positivo b, existe um único número real c, tal que $q^c = b$.*

Para demonstração deste Teorema, utilizamos resultados muito importantes na formação de um professor de Matemática, como o Teorema dos Intervalos Encaixantes (OLIVEIRA, 2017), o Axioma de Dedekind (NETO, 2015) e o Teorema de Bolzano-Weierstrass (LIMA, 2006). Isso comprova a grande contribuição da Análise Matemática para compreender em profundidade ideias de temas do Ensino Médio.

Posteriormente vimos que nossas ideias de refinamento de progressões coincidem com as ideias do matemático Henry Briggs(1561-1631), que calculou o logaritmo apenas com sucessivas raízes quadradas, ou seja, a média geométrica, que equivale ao refinamento para $m = 2$. Com o resultado anterior, formalizamos a definição dos logaritmos:

Definição *Dados os números reais positivos q e b, com $q \neq 1$. Chamamos de logaritmo de b na base q, o número real c tal que $q^c = b$, ou seja,*

$$\log_q b = c \Leftrightarrow q^c = b.$$

4. Conclusões

Partindo da necessidade histórica da engenhosa criação dos logaritmos, até o ponto de conceituá-los, resgatamos o elo perdido dessa criação, partindo de PAs, PGs, bem como de seus refinamentos, para a definição forma de logaritmo. Tentamos convencer de que, para obter o logaritmo de qualquer número positivo, necessita-se de uma argumentação mais elaborada, fundamentada na Análise Real.

Agradecimentos

A CAPES por oferecer esse curso para uma melhor qualificação dos professores. A todo corpo docente da UFCG, pelo compromisso e dedicação com a formação profissional dos seus discentes, de modo especial ao meu orientador, Daniel Cordeiro de Morais Filho, por todos as horas de estudos, ideias e ensinamentos para construção deste trabalho.

Referências

BECKER, F. *A epistemologia do professor: O cotidiano da escola.* [S.l.]: Vozes, 2012a. Citado na página 1.

BRUCE, I. *Briggs' ARITHMETICA LOGARITHMICA*. 2021. Disponível em: ⟨http://www.17centurymaths.com/contents/albriggs.html⟩. Citado na página 2.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática; tradução Hygino H. Domingues.* 5ª. ed. [S.l.]: Unicamp, 2011. Citado na página 3.

IEZZI, G. et al. *MATEMÁTICA: ciência e aplicações.* [S.l.]: Saraiva, 2016. Citado na página 2.

LIMA, E. L. *Análise Real.* [S.l.]: IMPA, 2006. v. 1. Citado na página 4.

NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo.* [S.l.]: Coleção PROFMAT, 2015. Citado na página 4.

OLIVEIRA, M. M. de. *Conceitos de Análise na Reta para bem compreender os Números Reais no Ensino Médio.* [S.l.]: Dissertação (Mestrado) — PROFMAT/UFCG, 2017. Citado na página 4.

PEDRO, I. I. *ÁLGEBRA: CURSO SUPERIOR.* [S.l.]: Paulo de Azevedo LTDA, 1947. Citado na página 2.

SOUZA, J.; GARCIA, J. *Contato Matemática.* 1º. ed. [S.l.]: FTD, 2016. Citado na página 2.