PROFMAT

IV Encontro Campinense do PROFMAT
21 de outubro de 2022
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba
ISSN 2764-2631

CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA 10 DE APOLÔNIO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Carlos Gonzaga da Silva Júnior[1] - carlosgonzaga72@gmail.com
José de Arimatéia Fernandes[1] - arimat.ufcg@gmail.com

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Este presente trabalho tem por objetivo apresentar uma construção do problema 10 de Apolônio. Para tanto, faremos uso das propriedades básicas da Geometria Inversiva. As figuras foram construídas usando o software de Geometria dinâmica: o Geogebra.*
Palavras-chave: *Geometria Inversiva; Problema de Apolônio; Geogebra.*

1. Introdução

De acordo com (BOYER; MERZBACH, 2019), Apolônio foi um brilhante matemático que nasceu em Perga por volta de 262 a.C e morreu por volta de 190 a.C. Durante sua existência, Apolônio desenvolveu diversos trabalhos no ramo da Matemática, em particular, na Geometria. Dentre esses trabalhos, há um que é considerado, por diversos matemáticos, o mais famoso e influente: o tratado das Cônicas.

Embora seja notável a relevância dos trabalhos desenvolvidos por Apolônio, sabe-se que muitos destes trabalhos foram perdidos e, o conhecimento acerca destes, deu-se devido a Pappus, outro grande matemático que viveu por volta do século IV d.C.

No meio destes trabalhos perdidos, destacamos aqui o tratado das *Tangências* em que consta o *problema de Apolônio*, descrito por Pappus, o qual podemos enuncia-lo da seguinte forma:

Dados três objetos, cada um dos quais pode ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, trace todas as circunferências tangentes aos três simultaneamente.

Observação: é importante ressaltar que a tangência a um ponto, nesse contexto, significa que a circunferência passa pelo ponto.

Conforme (SOUSA et al., 2014), denotando P para o ponto, R para a reta e C para a circunferência, podemos verificar que há dez situações possíveis para o problema de Apolônio a partir da disposição destes três objetos no plano:

Tabela 1: Problema de Apolônio

Situação	Disposição dos objetos no plano
1ª	PPP
2ª	RRR
3ª	PPR
4ª	PPC
5ª	PRR
6ª	PCC
7ª	CRR
8ª	PRC
9ª	RCC
10ª	CCC

Fonte: O autor.

Na Grécia antiga, os gregos acreditavam que as trajetórias dos corpos celestes eram circulares. Assim, o problema de saber se duas trajetórias de corpos celestes poderiam se intersectar está intrinsecamente relacionado a problemas que envolvem tangências de circunferências. Em particular, Apolônio como Matemático e

ISSN 2764-2631

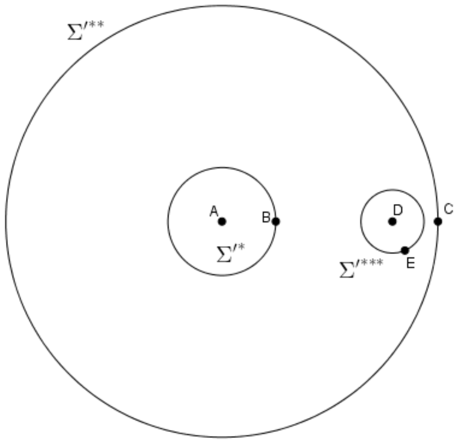
Astrônomo, tinha interesse em questões relacionadas a problemas de tangência. Diante disso, escolhemos resolver a última situação, ou seja, o problema 10 de Apolônio. Além disso, consideraremos as três circunferências disjuntas e externas duas a duas.

Observe que resolver o problema de Apolônio considerando três circunferências disjuntas e externas duas a duas, não é uma tarefa fácil usando a geometria plana, uma vez que esse problema admite oito soluções, isto é, há oito circunferências tangentes a estas três circunferências dadas. De fato, se tomarmos um ponto em uma circunferência, há dois tipos de circunferências tangentes a ela: uma interna e a outra externa. Como são três circunferências, logo, pelo princípio multiplicativo, existem, no máximo, $2^3 = 8$ circunferências tangentes a estas três circunferências dadas.

Agora, fazendo uso das propriedades da inversão, podemos reduzir este problema a um problema um pouco mais simples o qual segue-se:

Problema 10 de Apolônio: *Dadas as circunferências concêntricas $\Sigma'^{*}(A, AB)$ e $\Sigma'^{**}(A, AC)$ e a circunferência $\Sigma'^{***}(D, DE)$ no interior de Σ'^{**} e no exterior de Σ'^{*}, construir oito circunferências tangentes simultaneamente a Σ'^{*}, Σ'^{**} e Σ'^{***}.*

Figura 1: esboço do Problema de Apolônio, parte 1.



Fonte: O autor.

Antes de resolver o problema anterior que é o principal objetivo deste trabalho, apresentaremos definições e propriedades, tratados como resultados, que serão importantes para a compreensão da solução do referido problema na seção que trata de **Resultado e discussão.**

Definição 1: *Fixemos no plano uma circunferência Σ de centro O e raio r. Para cada ponto P distinto de O, o ponto inverso de P em relação a Σ é o ponto P' da reta OP que satisfaz a relação $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$. Nos referimos a Σ como a circunferência de inversão e dizemos que o ponto O é o centro de inversão.*

Resultado 1: *Se uma circunferência Σ_1 não passa pelo centro O da circunferência de inversão Σ, então a sua inversa Σ_1' é uma circunferência que não passa pelo centro de inversão.*

Resultado 2: *Se Σ_1 e Σ_2 são duas circunferências que não se intersectam, então as suas inversas Σ_1' e Σ_2' são concêntricas.*

2. Metodologia

Quanto a metodologia, este trabalho foi desenvolvido a partir de pesquisas bibliográficas. Inicialmente, trouxemos uma contextualização histórica do Problema de Apolônio. Em seguida, apresentamos a definição e alguns resultados relevantes da Geometria Inversiva para resolver o problema 10 de Apolônio. Por fim, descrevemos o passo a passo para a construção da solução do problema 10 de Apolônio usando o software Geogebra e apresentamos as conclusões.

3. Resultado e discussão

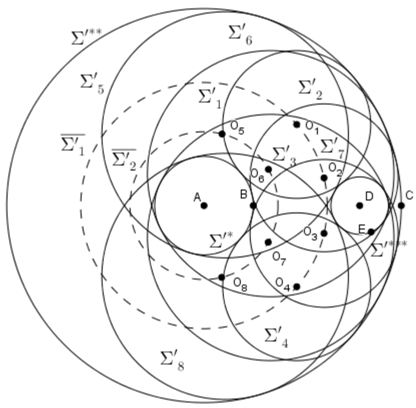
Nesta seção apresentamos o passo a passo para a construção do problema 10 de Apolônio usando o software Geogebra. Aqui cabe ressaltar que (LINARES, 2021) e (LINARES, 2022) tiveram uma relevante contribuição em relação às construções das figuras.

Solução: Inicialmente, construiremos oito circunferências Σ'_1, Σ'_2, Σ'_3 e Σ'_4, Σ'_5, Σ'_6, Σ'_7 e Σ'_8 de tal forma que:

- Σ'_1 seja tangente internamente a Σ'^{**} e externamente a Σ'^{*} e Σ'^{***}.
- Σ'_2 seja tangente internamente a Σ'^{**} e Σ'^{***} e externamente a Σ'^{*}.
- Σ'_3 seja tangente internamente a Σ'^{**} e Σ'^{***} e externamente a Σ'^{*}.
- Σ'_4 seja tangente internamente a Σ'^{**} e externamente a Σ'^{*} e Σ'^{***}.
- Σ'_5 seja tangente internamente à Σ'^{*} e Σ'^{**} e externamente à Σ'^{***}.
- Σ'_6 seja tangente internamente à Σ'^{*} e Σ'^{**} e Σ'^{***}.
- Σ'_7 seja tangente internamente à Σ'^{*} e Σ'^{**} e Σ'^{***}.
- Σ'_8 seja tangente internamente à Σ'^{*} Σ'^{**} e externamente à Σ'^{***}.

A figura a seguir ilustra a situação descrita acima.

Figura 2: esboço do Problema de Apolônio, parte 2.



Fonte: O autor.

Denotando por O_1, O_2, O_3 e O_4, os centros das circunferências, Σ'_1, Σ'_2, Σ'_3 e Σ'_4, respectivamente, note que todos esses centros estão em uma circunferência que denotamos por $\overline{\Sigma'_1}$ de centro A e raio $\overline{AB} + \dfrac{\overline{BC}}{2}$. Além disso, perceba que as circunferências Σ'_1, Σ'_2, Σ'_3 e Σ'_4 têm o mesmo raio de medida $\dfrac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$. Descreveremos agora os passos para construir essas quatro circunferências e, em seguida, os passos para construir as outras quatro circunferências Σ'_5, Σ'_6, Σ'_7 e Σ'_8 utilizando o software de Geometria Dinâmica: Geogebra.

- Com centro no ponto D, construa uma circunferência de raio $\overline{DE} + \dfrac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$;
- Marque os pontos O_1 e O_4 de interseção entre a circunferência construída e $\overline{\Sigma'_1}$;
- Agora, com centro em O_1 e O_4, construa as circunferências Σ'_1 e Σ'_4 de raio $\dfrac{\overline{AC} - \overline{AB}}{2}$;

ISSN 2764-2631

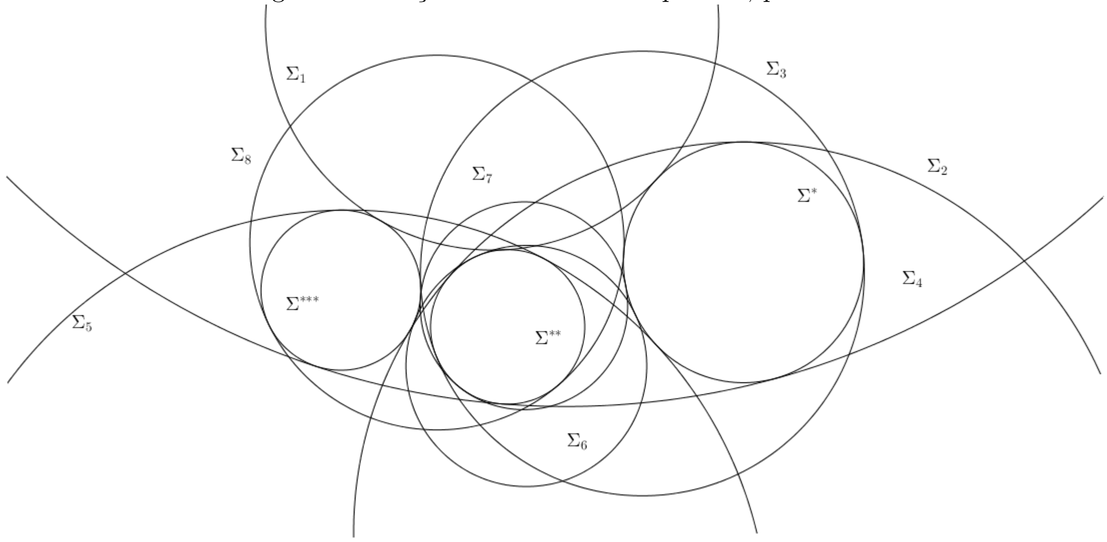
- Com centro no ponto D, construa uma circunferência de raio $\dfrac{\overline{AC}-\overline{AB}}{2}-\overline{DE}$;
- Marque os pontos O_2 e O_3 de interseção entre a circunferência construída e $\overline{\Sigma_1'}$;
- Por fim, com centro em O_2 e O_3, construa as circunferências Σ_2' e Σ_3' de raio $\dfrac{\overline{AC}-\overline{AB}}{2}$.

Agora, denotando por O_5, O_6, O_7 e O_8, os centros das circunferências, Σ_5', Σ_6', Σ_7' e Σ_8', respectivamente, note que todos esses centros estão em uma circunferência que denotamos por $\overline{\Sigma_2'}$ de centro A e raio $\dfrac{\overline{AC}-\overline{AB}}{2}$. Além disso, perceba que as circunferências Σ_5', Σ_6', Σ_7' e Σ_8' têm o mesmo raio de medida $\dfrac{\overline{AC}+\overline{AB}}{2}$. Descreveremos agora os passos para construir essas quatro circunferências utilizando o software de Geometria Dinâmica: Geogebra.

- Com centro no ponto D, construa uma circunferência de raio $\overline{DE}+\dfrac{\overline{AC}+\overline{AB}}{2}$;
- Marque os pontos O_5 e O_8 de interseção entre a circunferência construída e $\overline{\Sigma_2'}$;
- Agora, com centro em O_5 e O_8, construa as circunferências Σ_5' e Σ_8' de raio $\dfrac{\overline{AC}+\overline{AB}}{2}$;
- Com centro no ponto D, construa uma circunferência de raio $\dfrac{\overline{AC}+\overline{AB}}{2}-\overline{DE}$;
- Marque os pontos O_6 e O_7 de interseção entre a circunferência construída e $\overline{\Sigma_2'}$;
- Por fim, com centro em O_6 e O_7, construa as circunferências Σ_6' e Σ_7' de raio $\dfrac{\overline{AC}+\overline{AB}}{2}$.

Agora, para obtermos a solução desejada para o problema de Apolônio, basta "desinvertermos" as circunferências Σ'^{*}, Σ'^{**}, Σ'^{***}, Σ_1', Σ_2', Σ_3', Σ_4', Σ_5', Σ_6', Σ_7' e Σ_8', obtendo assim as circunferências Σ^{*}, Σ^{**}, Σ^{***}, Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5, Σ_6, Σ_7 e Σ_8, conforme consta na figura a seguir.

Figura 3: esboço do Problema de Apolônio, parte 3.



Fonte: O autor.

ISSN 2764-2631

4. Conclusões

De maneira reflexiva, entende-se que a Matemática está presente na existência humana desde a percepção da abstração na mente até a compreensão da aplicação em descrever movimentos de corpos celestes, por exemplo. A potencialidade e abrangência, promovidas por essa importante ciência, e os mistério que a cercam, talvez, tenham contribuído para que os matemáticos buscassem soluções para alguns questionamentos os quais envolvessem determinados padrões. Essa perseguição por soluções de problemas, algumas vezes, levam a caminhos divergentes, mas que ampliam os horizontes para uma nova descoberta, um "novo mundo", digamos assim. Nesse contexto, destaca-se as"geometrias não euclidianas", em particular, a Geometria Inversiva, o principal objeto desta pesquisa.

Fizemos uso das propriedades básicas da Inversão Geométrica e descrevemos o passo a passo da construção, utilizando o software Geogebra, do problema 10 de Apolônio o qual consiste em construir oito circunferências tangentes a três circunferências dadas no plano disjuntas duas a duas. É importante ressaltar que o Geogebra, software dinâmico de matemática, foi extremamente fundamental na construção das figuras deste trabalho, principalmente por possuir a ferramenta padrão de inversão.

Direcionando o olhar em relação ao espectro acadêmico, desenvolvemos este trabalho com o principal objetivo de mostrar as potencialidades da geometria inversiva e, possivelmente, propiciar ao professor leitor deste trabalho uma visão sobre problemas de tangência utilizando o Software Geogebra, podendo ser explorado como forma de abordagem, com os estudantes do Ensino Médio, na perspectiva de preparação para as diversas olimpíadas de matemática, uma vez que os resultados de geometria inversiva, permite-nos, em determinadas situações, transformar problemas difíceis envolvendo tangências de circunferências, por exemplo, em problemas mais simples de resolver.

Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. *História da matemática.* [S.l.]: Editora Blucher, 2019. Citado na página 1.

LINARES, J. L. *Trasnformação de Inversão. Definição, propriedades e aplicações. Problemas de Apolônio.* 2021. Disponível em: ⟨https://youtu.be/3HxCPcurGsE⟩. Acesso em: 04 sep 2022. Citado na página 3.

LINARES, J. L. Transformação de inversão: Teoria, exercícios de construção geométrica, problemas olímpicos e aplicações. 2022. Citado na página 3.

SOUSA, C. B. d. et al. Inversão geométrica aplicada à resolução dos problemas de apolônio. Universidade Federal da Paraíba, 2014. Citado na página 1.