PROFMAT
IV Encontro Campinense do PROFMAT
21 de outubro de 2022
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba
ISSN 2764-2631

REPRESENTAÇÕES DECIMAIS DE NÚMEROS REAIS E SUAS APLICAÇÕES NO COTIDIANO E EM SALA DE AULA

José Cláudio da Silva Teodista[1] - jclaudiost20@gmail.com
Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho[2] - daniel@mat.ufcg.edu.br

[1] Aluno do PROFMAT, Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil
[2] Orientador, Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo:
Apresentaremos nesse trabalho um estudo a fim de destacar a importância das expressões decimais dos números reais. Analisaremos algumas coleções de livros didáticos do ensino básico e sites da internet para vermos a importância que é dada a esse tema e como ele é apresentado ao aluno do ensino básico. Daremos uma atenção especial àqueles números que possuem representação decimal infinita (dízimas), de modo que possamos compreender como as pessoas lidam com elas, tanto no cotidiano, quanto na sala de aula. A respeito dos números racionais, faremos um estudo sobre o uso da forma fracionária e de sua expressão decimal, analisando em que situações é mais conveniente usar uma em detrimento da outra e qual é mais usada no dia a dia das pessoas.
Palavras-chave*: Frações; Expressões decimais infinitas; Dízimas periódicas*

1. Introdução

Segundo BOYER (1974) as frações são utilizadas desde o Antigo Egito, na época da idade do bronze. Os gregos, por exemplos, também as usavam, mas não entendiam frações como números e sim como razões entre números, como afirma FERREIRA (2013). Já os números no formato decimal foram popularizados muito tempo depois, apenas no século XVI com o tratado sobre frações decimais de Simon Stevin (1548-1620) que estabelecia regras para operar com números nesse formato. Apesar da importância de Stevin para sistematização das frações decimais, não podemos lhe atribuir o mérito de ter sido o inventor delas, pois elas já eram usadas desde a China antiga, Árabia Medieval e Europa na época do renascimento, como afirma BOYER (1974).

De acordo com a BNCC (BRASIL (2018)), nas escolas brasileiras, desde as séries iniciais do ensino fundamental devem ser apresentados os conjuntos numéricos, números naturais, frações e números decimais. Apenas no 6º ano começam as formalizações dos conjuntos numéricos, iniciando pelo conjunto dos números naturais, dando sequências com as apresentações das frações e dos números decimais finitos. No 8˚ ano são apresentadas dízimas periódicas e finalmente no 9˚ ano, as dízimas não periódicas, onde daremos mais atenção.

Atualmente, no dia a dia das pessoas, as frações quase sempre são substituídas por suas representações decimais. Principalmente com o advento e popularização das calculadoras, se tornou muito mais fácil operar com números decimais do que com frações, levando até com que as pessoas deixassem de aprender os algoritmos de operar frações, pois elas tendem a não se interessar por aquilo que tem pouca utilidade em seu cotidiano. Nessa perspectiva, a necessidade prática de se operar com frações vem praticamente desaparecendo do dia-a-dia das pessoas, restringindo-se apenas às atividades escolares e acadêmicas, nas maioria das vezes.

Mas é inegável a importância das frações ainda nos dias atuais, em diversas ocasiões ainda nos deparamos com números nesse formato. Por exemplo, na política brasileira, para aprovação de uma Proposta de Emenda à Constituição (PEC) é necessário que a ela seja votada na Câmara dos Deputados e no Senado Federal obtendo em cada uma das casas um mínimo de 3/5 (três quintos) dos votos dos deputados e 3/5 (três quintos) dos votos dos senadores, como podem conferir em Senado (2022). Ainda no mundo jurídico, quando se trata de progressões penais também se faz uso das frações. Outro uso muito comum das frações é na culinária quando se pretende fazer uma determinada receita, quase sempre se usa frações para indicar a quantidade necessária de cada ingrediente, como podem conferir em Globo (2022).

Nesse trabalho vamos destacar a importância da representação decimal dos números reais. Como sabemos,

ISSN 2764-2631

eles possuem uma representação decimal, no caso dos racionais ela é finita ou infinita e periódica e no caso dos irracionais é infinita e não periódica. Vamos analisar como os livros didáticos lidam com essas representações e no caso dos racionais, como eles abordam a importância tanto da forma fracionária quanto da forma decimal. Para tanto fizemos a análise de quatro coleções de livros adotados no ensino fundamental para entendermos como eles trabalham com as diferentes representações dos números.

2. Metodologia

Para este trabalho fizemos uma minuciosa pesquisa na internet para entendermos como as pessoas lidam com as diferentes formas de representações dos números e em que situações do dia a dia preferem a decimal em detrimento da fracionária e vice-versa. Em uma segunda etapa da pesquisa fizemos uma análise de quatros coleções de livros didáticos (de 6° a 9° ano) adotados no ensino fundamental, a fim de avaliarmos como esse tema é abordado. Na terceira etapa entramos na parte mais emblemática, a representação decimal infinita dos números. Estudamos as dízimas periódicas e não periódicas e como as pessoas lidam com elas no dia a dia. Analisamos exemplos do cotidiano, a atitude das pessoas diante dos decimais infinitos e também como os livros didáticos e os professores tratam das dízimas.

3. Resultado e discussão

Os livros didáticos apresentam muitos exemplos de números em sua representação fracionária e decimal, mas não deixam claro a importância de cada um nos diferentes contextos e algumas coleções não explicam como transformar de fração em decimal, por exemplo. Quando se trata das dízimas periódicas os autores falam que toda fração pode ser representado como um número decimal finito ou infinito e periódico, mas não demonstram ou dão alguma explicação para este fato.

Percebemos também que os números mistos, aqueles compostos de parte inteira e outra parte fracionária, por exemplo, $3\frac{1}{2}$ (lê-se: três inteiros e um meio), são frequentemente abordados nos livros didáticos e sites de matemática básica, mas no dia a dia das pessoas, aqui no Brasil, praticamente não é usado. Todavia, nos Estados Unidos é comum o uso desse tipo de número, por exemplo, em placas de trânsito com distâncias medidas em milhas, como podem ver na figura 1 abaixo (Transportation (2009)).

Figura 1: Placa de trânsito dos Estado Unidos

Fonte: Departamento de Transporte dos Estados Unidos

3.1 Onde as Dízimas são importantes?

Percebe-se nos livros didáticos que o formato decimal dos números irracionais é muito pouco utilizado e algumas das vezes em que é usado percebemos não ser feito de uma maneira adequada. Não raramente, nos livros didáticos, por exemplo, são apresentadas algumas casas decimais de um número e se conclui erradamente que o número não tem uma representação decimal periódica, sendo que nem sempre é possível saber disso apenas observando algumas casas decimais. Em umas das coleções analisadas o autor apresenta o número

$$0,123321456789...$$

alegando que não é periódico, portanto não é possível transformá-lo em formato de fração. Mas essa afirmação não pode ser dada como verdadeira apenas analisando doze casas decimais de um número, pois o que garante que a partir da 13° casa decimal não ocorre o período da dízima?

ISSN 2764-2631

Em um dos sites da internet pesquisados há a afirmação de que um número é racional quando conseguimos prever qual o próximo dígito de sua representação decimal. Mas isso também não é verdade, se pensarmos, por exemplos, no número

$$0,101001000100001...$$

notamos que existe um padrão de formação desse número e é perfeitamente possível sabermos os dígitos de sua formação, apesar de ser um número irracional. Exemplos como esse, de um número decimal infinito que tem uma lei de formação, mas não é periódico é muito pouco explorado em sala de aula. Os livros didáticos e sites da internet (principais fontes de pesquisa do professor) não exploram de forma eficiente a representação decimal dos números reais. Quase sempre se restringem a dar exemplos envolvendo raízes e os irracionais mais famosos, tais como π, o número de Euler e a constante de ouro. Podemos apresentar os números racionais e irracionais

Figura 2: Exemplo de dízima não-periódica de um site

- **Dízimas não periódicas**

Ao resolver-se essas raízes, a resposta sempre vai ser uma aproximação, o que chamamos de dízimas não periódicas.

$$\sqrt{2} = 1,414213562...$$
$$\sqrt{3} = 1,7320508075...$$

Note que a parte decimal é infinita e que não existe um período, ou seja, uma sequência que faça com que a gente consiga prever o próximo número da parte decimal, e é por isso que chamamos esse número de dízima não periódica. Não só as dízimas geradas por raízes não exatas, mas qualquer dízima não periódica é um número irracional.

Fonte: internet

por meio de suas representações decimais e julgamos que esse resultado é importante para o professor no ensino fundamental e médio. Não demonstraremos tal resultado, por falta de espaço.

Teorema 3.1. *Um número é racional se, e somente se, tem uma representação decimal finita ou infinita e periódica.*

O professor do ensino básico poderia ter uma fonte de consulta mais ampla para preparar suas aulas, pois ele acaba reproduzindo os mesmos exemplos dos livros didáticos. É muito comum, ao pedirmos exemplos de dois números irracionais cuja soma seja racional, recebermos como resposta algo como

$$(\sqrt{2}+1)+(1-\sqrt{2}).$$

Dificilmente as pessoas pensariam em números irracionais na forma decimal. Mas poderíamos pensar em

$$1,010010001...+2,101101110...=3,11111...$$

que tem uma representação decimal infinita e periódica, logo, é racional. Ainda usando as expressões decimais diversos exemplos de números irracionais poderiam ser apresentados aos alunos sem maiores dificuldades.

Mas qual a importância dos decimais infinitos? Onde eles são usados no cotidiano? Na verdade, praticamente não são utilizados, apesar deles aparecerem em diversas situações, como por exemplo, na divisão de 100 em três partes iguais, obtemos $33,333...$, mas na prática as pessoas vão arrendondar e fazer as operações como se fosse um número decimal finito. O mesmo ocorre com as dízimas não periódicas, por exemplo, ao se calcular o volume de um recipiente em formato cilíndrico, obviamente as pessoas não usarão infinitas casas decimais para π, também arredondarão para um número racional com algumas casas decimais. Mas pensando no caráter abstrato da matemática, o professor pode usar desses subterfúgios para se livrar dos decimais infinitos? Ele deve ter habilidades para poder lidar com as dízimas e apresentar exemplos enriquecedores aos seus alunos, a fim de que eles possam entender as diferentes representações.

ISSN 2764-2631

3.1.1 Uma demonstração diferente para irracionalidade de $\sqrt{2}$

De acordo com Roque e Pitombeira (2012), os pitagóricos desde a Grécia Antiga já conheciam o fato de que $\sqrt{2}$ não era racional, uma dessas demonstrações pode ser vista em FILHO (2016, p. 191 - 193). Nesta seção iremos apresentar uma demonstração desse fato, que nos parece não ser conhecida, usando a representação decimal de $\sqrt{2}$ inspirada em KLAZAR (2009). Como constatação da importância de se usar a representação decimal dos números reais, vamos provar que

$$\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242096 98\ldots$$

não tem uma representação decimal finita, tampouco é dízima periódica. Vamos supor, por absurdo, duas situações.

1. $\sqrt{2}$ é um número decimal finito.

   Assim, $\sqrt{2} = 1, a_1a_2\cdots a_n$, com dígitos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9\}$ e $a_n \neq 0$. Logo,

   $$(10^n\sqrt{2})^2 = 2\cdot 10^{2n} = (1a_1a_2\cdots a_n)^2.$$

   Note que $2\cdot 10^{2n}$ sempre termina em zero para todo n natural, no entanto, $(1a_1a_2a_3\ldots a_n)^2$ não pode terminar em zero, pois $a_n \neq 0$. Uma contradição, donde concluímos que $\sqrt{2}$ não pode ser um decimal finito.

2. $\sqrt{2}$ é uma dízima periódica. Analisaremos os dois casos:

   i) $\sqrt{2}$ é uma dízima periódica simples.

   Assim, $\sqrt{2} = 1, a_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots a_na_1a_2\cdots a_n\cdots$, de período $a_1a_2\cdots a_n$, com dígitos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ 9\}$. Daí, aplicando a soma de uma P.G. infinita,

   $$\sqrt{2} \;=\; 1 + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n} + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^{2n}} + \cdots = 1 + \frac{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}}{\frac{10^n-1}{10^n}} = 1 + \frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n-1}$$

   $$\Rightarrow \sqrt{2}(10^n-1) = (10^n-1) + a_1a_2\cdots a_n \Rightarrow 2\cdot(99\cdots 9)^2 = ((10^n-1) + a_1a_2\cdots a_n)^2$$

   Note que 2 é o dígito das unidades de $2\cdot(99\cdots 9)^2$, mas por outro lado, 2 não pode ser o dígito das unidades de $((10^n-1)+a_1a_2\cdots a_n)^2$, pois o quadrado de um número inteiro nunca terá 2 como dígito das unidades. Chegamos a uma contradição, portanto $\sqrt{2}$ não pode ser uma dízima periódica simples.

   ii) $\sqrt{2}$ é uma dízima periódica composta.

   Assim, $\sqrt{2} = 1, a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_m...$ de período $b_1b_2\cdots b_m$. Vamos supor $n < m$, os demais casos são análogos. Daí,

   $$\begin{aligned}
   \sqrt{2} &= 1, a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_m...\\
   \Rightarrow 10^n\cdot\sqrt{2} &= 1a_1a_2\cdots a_n + 0, b_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_mb_1b_2\cdots b_m\ldots\\
   &= 1a_1a_2\cdots a_n + \frac{b_1b_2\cdots b_m}{10^m}\left(1 + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{2m}} + \frac{1}{10^{3m}} + \cdots\right)\\
   &= 1a_1a_2\cdots a_n + \frac{b_1b_2\cdots b_m}{10^m}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10^m}}\right]\\
   &= 1a_1a_2\cdots a_n + b_1b_2\cdots b_m\left[\frac{1}{10^m-1}\right]\\
   \Rightarrow (99\cdots 9)^2\cdot 10^{2n}\cdot 2 &= (1a_1a_2\cdots a_n\cdot(10^m-1) + b_1b_2\cdots b_m)^2\\
   &= (1a_1a_2\cdots a_n\cdot 10^m - 1a_1a_2\cdots a_n + b_1b_2\cdots b_m)^2
   \end{aligned}$$

ISSN 2764-2631

$$\begin{aligned} &= (1a_1a_2\cdots a_n\cdot 10^m - 10^n - 10^{n-1}a_1 - 10^{n-2}a_2 - \cdots - a_n + 10^{m-1}b_1 + \\ &\quad 10^{m-2}b_2 + \cdots + b_m)^2 \\ &= 1a_1a_2\cdots a_n\cdot 10^m - 10^n + (b_m - a_n) + (b_{m-1} - a_{n-1})10 + (b_{m-2} - \\ &\quad a_{n-2})10^2 + \cdots + (b_{m-n+1} - a_1)10^{n-1} + b_{m-n}10^n + \cdots + b_1 10^m. \end{aligned}$$

Por um lado, $99\cdots 9^2\cdot 10^{2n}\cdot 2$ termina em $2n$ zeros. Por outro lado, para que $(1a_1a_2\cdots a_n\cdot 10^m - 10^n + (b_m - a_n) + (b_{m-1} - a_{n-1})10 + (b_{m-2} - a_{n-2})10^2 + \cdots + (b_{m-n+1} - a_1)10^{n-1} + b_{m-n}10^n + \cdots + b_1 10^m)^2$ termine em $2n$ zeros devemos ter, necessariamente, $b_m = a_n$, $b_{m-1} = a_{n-1}$, $b_{m-2} = a_{n-2}$, ..., $b_{m-n+2} = a_2, b_{m-n+1} = a_1$. Mas se isso ocorrer, $\sqrt{2}$ será uma dízima periódica de período $a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_{m-n}$.. Vejamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1, a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_{m-n}b_{m-n+1}\cdots b_mb_1b_2\cdots b_{m-n}b_{m-n+1}\cdots b_m\cdots \\ &= 1, a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_{m-n}a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_{m-n}a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_{m-n}\cdots \end{aligned}$$

que é uma dízima periódica simples, recaindo no caso i), já provado que não pode ocorrer.

4. Conclusões

Em nossa pesquisa, constatamos que as pessoas tem mais facilidade de usar a representação decimal dos números, pois no dia a dia elas podem arrendondar e usar as calculadoras nas operações. Os livros didáticos e sites da internet não apresentam de forma satisfatória os decimais infinitos, principalmente os não periódicos, além de não conseguirem deixar claro a importância das expressões decimais infinitas, o que pode levar ao desinteresse dos alunos. Em virtude disso, sugerimos ao professor buscar novas fontes de pesquisas, principalmente em sites de instituições confiáveis, a fim de que possa enriquecer seus conhecimentos a respeito do tema.

É primordial que o aluno saiba lidar com as diferentes representações dos números reais, fazendo a conversão, quando necessário e, o mais importante, que ele saiba discernir em que situações é mais conveniente usar a representação decimal ou a forma fracionária (se existir). Para tanto, o professor precisa estimular esse senso crítico sobre os assuntos abordados na disciplina de matemática e só fará isso se tiver domínio do tema e fontes confiáveis de consultas.

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Bluscher LTDA., 1974. Citado na página 1.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf⟩. Citado na página 1.

FERREIRA, J. *A Construção dos Números*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. Citado na página 1.

FILHO, D. C. D. M. *Um Convite à Matemática*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. Citado na página 4.

GLOBO, R. *Bisteca com manteiga aromatizada*. 2022. Disponível em: ⟨https://anamariabraga.globo.com/receita/bisteca-com-manteiga-aromatizada/⟩. Citado na página 1.

KLAZAR, M. *Real numbers as infinite decimals and irrationlity of square root of two*. 2009. Disponível em: ⟨https://arxiv.org/pdf/0910.5870.pdf⟩. Citado na página 4.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. de. *Tópicos de história da matemática*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado na página 4.

SENADO, A. *Emenda Constitucional*. 2022. Disponível em: ⟨https://www12.senado.leg.br/noticias/glossario-legislativo/emenda-constitucional⟩. Citado na página 1.

TRANSPORTATION, U. D. *Manual on Uniform Traffic Control Devices*. 2009. Disponível em: ⟨https://mutcd.fhwa.dot.gov/htm/2009r1r2/part2/part2e.htm⟩. Citado na página 2.