ISSN 2764-2631

APROXIMAÇÕES POR FRAÇÕES CONTÍNUAS E PROPOSTA DIDÁTICA

André Macedo Costa.[1] - andremacedo57@gmail.com
Marcelo Carvalho Ferreira.[1] - marcelo.carvalho@professor.ufcg.edu.br

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *As frações contínuas desempenham um papel fundamental no que se refere às aproximações racionais de números reais. Nesse contexto, os objetivos deste trabalho são, a exposição dos principais resultados sobre as melhores aproximações e a descrição de uma proposta didática do tema na educação básica. A metodologia do trabalho consistiu em uma revisão bibliográfica de livros, artigos, periódicos e documentos oficiais. Os resultados sobre as chamadas melhores aproximações de números reais, garantem que estas são convergentes ou intermediárias das frações contínuas. Além disso, é exposta uma sequência didática introduzindo as frações contínuas no ensino fundamental, tomando por base o algoritmo de Euclides e contemplando diversas habilidades dessa etapa de ensino, relacionando, em particular, elementos algébricos e geométricos com o auxílio do software Geogebra.*
Palavras-chave: *Convergentes; Melhores Aproximações; Algoritmo de Euclides.*

1. Introdução

De acordo com Brezinski (1991), existiram diversos algoritmos equivalentes às frações contínuas, muitos séculos antes de sua descoberta e estudo. Conforme ressaltam Vargas (2011), o algoritmo de Euclides, apresentado no livro VII dos Elementos, e alguns métodos de aproximações de raízes, podem ser considerados como ancestrais das frações contínuas, sendo inclusive o Algoritmo de Euclides utilizado em algumas abordagens do tema atualmente, no ensino superior e na educação básica.

As frações contínuas representam qualquer número real, sendo essa representação finita para números racionais e infinita para números irracionais, pode-se obter essa representação a partir de quocientes do algoritmo de Euclides aplicado sucessivas vezes. A cada novo quociente podemos obter uma fração como aproximação, estas recebem o nome de convergentes.

As convergentes de uma fração contínua e suas intermediárias, se notabilizam por fornecerem as melhores aproximações de números reais por racionais, sendo essas melhores aproximações definidas como a fração com denominador menor ou igual que $q \in \mathbb{N}$, que mais se aproxima do número dado. Reciprocamente, toda melhor aproximação de um número real é um convergente ou uma intermediária.

Não obstante, além de fornecer as melhores aproximações, é possível majorar o erro cometido em uma aproximação do tipo, o teorema de Hurwitz Markov, garante que, o erro cometido por pelo menos $1/3$ das convergentes é sempre menor que $1/\sqrt{5}q^2$ onde q é o denominador da convergente.

Além disso, as frações contínuas possuem forte relação com conceitos expostos nas grades curriculares, tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio. Levando em consideração a base nacional comum curricular(BNCC), foi proposta uma sequência didática sobre as frações contínuas no ensino fundamental, que além de apresentar uma forte relação entre elementos algébricos e geométricos a partir do uso de tecnologias, contempla as seguintes habilidades presentes em Brasil (2018), (EF06MA22), (EF07MA04), (EF07MA05), (EF07MA06), (EF07MA07), (EF07MA11), (EF07MA12), (EF08MA15), (EF09MA01), (EF09MA02) e (EF09MA16).

Além disso, conforme Waldschmidt (2015), as frações contínuas possuem diversas aplicações tanto dentro da matemática, quanto em outras áreas do conhecimento. Podem-se destacar as aplicações a resolução de equações diofantinas, problemas envolvendo circuitos elétricos, sua relação com as famosas equações de Pell ou ainda sobre o estudo de funções analíticas.

Os objetivos do presente trabalho são apresentar resultados sobre frações contínuas e suas utilidades, em especial com relação aos conceitos de melhores aproximações racionais, e também expor uma proposta de inserção do estudo das frações contínuas no ensino fundamental, levando em consideração seus aspectos teóricos

ISSN 2764-2631

e metodológicos.

2. Metodologia

A metodologia deste trabalho consiste em uma revisão bibliográfica de livros, artigos e periódicos sobre as frações contínuas, além de documentos norteadores sobre o currículo escolar do ensino fundamental.

3. Resultado e discussão

3.1 Frações contínuas e boas aproximações

É possível encontrar na literatura definições diversas de frações contínuas, neste trabalho, usaremos a definição a seguir, que restringe todos os numeradores das frações a serem iguais a 1. Apresentaremos a seguir definições e resultados sobre frações contínuas, que foram obtidos de Moreira (2011) e Khinchin (1964).

Definição: Dado um número $x \in \mathbb{R}$, denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ a parte inteira do número x e $\{x\}$ como a parte decimal ou fracionária. Dado $x \in \mathbb{R}$, seja $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Se $x \notin \mathbb{Z}$, ponha $\alpha_1 = \dfrac{1}{\{x\}} = \dfrac{1}{x - a_0}$. Observe que

$$x = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Seja $a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$. Se $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ tome $\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - a_1}$ e observe que

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}.$$

Continuando assim o processo, para $n \in \mathbb{N}$, considera-se $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ e, se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, define-se $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$. Há duas possibilidades:

i. Para algum $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\alpha_n = a_n$ e chega-se à:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}} := [a_0; a_1, ..., a_{n-1}, a_n].$$

ii. Caso contrário, $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq a_n$ e chega-se à:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}} := [a_0; a_1, ..., a_n, ...].$$

Qualquer uma das expressões acima é denominada uma representação em fração contínua do número x.

Teorema Todo número racional pode ser expresso como uma fração contínua finita.

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{Q}$, então $x = \dfrac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$, existe a fração contínua de α. O algoritmo de Euclides garante que: $\dfrac{p}{q} = a_0 + \dfrac{r_0}{q}$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_0 < q \implies 0 \leq \dfrac{r_0}{q} < 1$.

Repetindo o processo temos, $\dfrac{q}{r_0} > 1$, $q = a_1 \cdot r_0 + r_1$, e assim por diante, o algoritmo de Euclides garante que o processo se finaliza, uma vez que, $r_0 > r_1 > r_2 > ... > r_n = 0$. $\square$

Teorema Uma fração contínua finita representa um número racional.

Demonstração: Se

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}},$$

como $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ e na expressão acima só temos as operações de adição e inversão, então as propriedades de fechamento do conjunto dos racionais garantem que $x \in \mathbb{Q}$. $\square$

Dos teoremas acima é possível concluir a proposição a seguir.
Proposição: Um número é irracional se, e só se, sua fração contínua é infinita.

De um modo geral, as frações contínuas possuem como utilidade a aproximação de números irracionais por racionais, com o menor erro possível, para frações com denominador menor ou igual ao obtido em cada convergente.
Definição: Considere $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Sejam $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^*$ tais que, $(p_n, q_n) = 1$ e

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, ..., a_n], n > 0.$$

A fração $\frac{p_n}{q_n}$ é chamada n-ésima reduzida ou convergente da fração contínua de x.
Seja x irracional. Fixado $n \in \mathbb{N}$, é possível mostrar que

$$|x - p_n/q_n| < 1/q_n^2,$$

ou seja, qualquer convergente de uma fração contínua, possui erro menor que o quadrado do inverso do denominador. Logo, do Teorema do Confronto, é possível concluir que $\frac{p_n}{q_n} \to x$, quando $n \to \infty$. Desse modo, doravante escreveremos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}}}$$

quando x é irracional.
Além disso, tem-se

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \text{ ou } \left| x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Ainda mais: O Teorema de Hurwitz-Markov afirma que, para todo x irracional,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

para pelo menos um racional

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right\},$$

sendo $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a constante ótima.

Khinchin (1964) define uma melhor aproximação racional do 1° tipo de um número $x \in \mathbb{R}$ como uma fração a/b tal que para

$$|x - a/b| < |x - c/d|, \text{ para toda fração } c/d \neq a/b \text{ com } d < b.$$

ISSN 2764-2631

Sobre as aproximações desse tipo, é possível afirmar que cada aproximação é uma convergente ou intermediária da fração contínua de x.

As chamadas intermediárias, são frações do tipo:

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}, \frac{p_{k-2}+p_{k-1}}{q_{k-2}+q_{k-1}}, \frac{p_{k-2}+2p_{k-1}}{q_{k-2}+2q_{k-1}}, ..., \frac{p_{k-2}+a_k p_{k-1}}{q_{k-2}+a_k q_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k},$$

para cada $k \geq 2$.Por outro lado, Khinchin (1964) define uma melhor aproximação do 2° tipo aquela fração a/b em que, dado $x \in \mathbb{R}$, para $c/d \neq a/b$ com $d < b$ tem-se $|dx - c| > |bx - a|$.

Sobre as melhores aproximações do segundo tipo, temos o seguinte resultado, toda melhor aproximação do segundo tipo é uma convergente.

3.2 Proposta didática ensino fundamental

A proposta tem como público alvo alunos do 9° ano do ensino fundamental, os objetivos são expor uma aplicação do algoritmo da divisão, escrita de frações contínuas, utilização de software Geo gebra em representações geométricas, e ainda a escrita de números racionais e irracionais. A metodologia utilizada será de aula expositiva e dialogada, uso de tecnologias e resolução de problemas. Tomando como referência Paixão (2011), Moreira (2011) e Brasil (2018). Descreveremos a seguir as aulas que descrevem a proposta.

- **Aula 01 - Algoritmo de Euclides**

Escrevendo divisões do tipo $9 \div 2$ na forma $9 = 4 \cdot 2 + 1$. Em seguida, sera realizada a discussão sobre qual unidade divide dois números e deixa resto zero, exemplificando com números 12 e 18, 17 e 30 e 1,2 e 3,5. Aqui introduziremos o algoritmo de Euclides para solucionar tais problemas de forma prática.

Em seguida será proposto aos estudantes exercícios e problemas do tema, em especial o questionamento se existem 2 números, em que, não é possível encontrar uma unidade que divide ambos resultando em um número inteiro.

- **Aula 02 - Interpretação geométrica do algoritmo e segmentos comensuráveis**

Com auxílio do software Geogebra, determinaremos uma interpretação geométrica do processo do Algoritmo de Euclides, e definiremos os chamados segmentos comensuráveis.

O objetivo nesse ponto é, que os alunos realizem o processo do algoritmo de Euclides geometricamente com o auxilio do software Geogebra, após a apresentação de um tutorial rápido, os estudantes determinarão a maior unidade que mede 1,2 e 1,8. Seguindo os passos descritos: construir um retângulo de lados 1,2 e 1,8; construir continuamente quadrados com maior tamanho possível até preencher o retângulo; determinar o lado do menor quadrado utilizado; essa é a medida procurada, nesse caso 0,6.

- **Aula 03 - Frações contínuas**

Nesse ponto associaremos o processo geométrico da construção de quadrados máximos, com o algoritmo de Euclides, e a partir daqui escreveremos as frações contínuas. Por exemplo:

$$\frac{3,5}{1,2} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{11}} = \frac{35}{12}.$$

A expressão acima é uma fração contínua, definida como uma expressão do tipo $a + \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\ddots}}}$, com $a, b, c, ... \in \mathbb{Z}$ cada número real x possui uma fração contínua associada que é finita quando $x \in \mathbb{Q}$ e infinita quando $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.

Para determinar a fração contínua de um número, devemos aplicar o algoritmo com a unidade. Veja como determinamos a fração contínua de 3,15:

Exemplo: Use o algoritmo de Euclides nos números 1 e 3,15.
$3,15 = 1 \cdot 3 + 0,15$; $1 = 0,15 \cdot 6 + 0,10$; $0,15 = 0,10 \cdot 1 + 0,05$ e $0,10 = 0,05 \cdot 2$. Portanto, 3,15 tem a seguinte fração contínua: $3,15 = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$.

Nesse ponto, a partir das operações de inversão e adição de racionais, os estudantes conseguem determinar cada fração convergente de um número qualquer.

- **Aula 04 - Números irracionais(segmentos incomensuráveis)**

Questionados sobre a construção de um segmento com medida irracional e definindo a incomensurabilidade, o algoritmo de Euclides será aplicado com 1 e $\sqrt{2}$, com auxílio do software Geo gebra visando construções rigorosamente precisas, buscando que os alunos sugiram que o processo é infinito.

Por outro lado, nesse ponto é estabelecido um critério para racionalidade ou irracionalidade de um número, em geral os estudantes devem se perguntar como garantimos que essas frações serão realmente infinitas.

Usaremos então a fração contínua do número de ouro $\phi = 1.61803399...$, que decorre da sequência de Fibonacci e que possui a propriedade de que $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$, dessa forma, podemos escrever então:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

veja que o processo se repete indefinidamente, sendo assim justifica-se aos estudantes que o número $\phi = 1.61803399...$ é irracional.

4. Conclusões

A partir dos resultados expostos, é possível entender as frações contínuas como uma forma de representar números irracionais e racionais, mas, principalmente como uma teoria capaz de determinar melhores aproximações racionais de um número irracional, sendo assim, utilizado em pesquisas de algumas áreas da matemática.

Por outro lado, é notável a relação entre diversos conceitos da matemática que esse tema pode engajar na educação básica, fornecendo ainda uma oportunidade para o uso de novas tecnologias e auxiliando o desenvolvimento de diversas habilidades simultaneamente.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Mínistério da Educação, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 4.

BREZINSKI, C. *History of Continued Fractions and Padé Approximants*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1991. (Springer Series in Computational Mathematics). ISBN 3540152865. Citado na página 1.

KHINCHIN, A. Y. *Continued Fractions*. [S.l.]: University of Chicago Press, 1964. (Phoenix Science). Citado 3 vezes nas páginas 2, 3 e 4.

MOREIRA, C. G. T. d. A. *Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas*. [S.l.]: IMPA, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 4.

PAIXÃO, J. C. *Fracções contínuas no ensino pré-universitário*. Tese (Doutorado), 2011. Citado na página 4.

VARGAS, V. Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales. *U. d. Valle, Ed*, 2011. Citado na página 1.

WALDSCHMIDT, M. Continued fractions: Introduction and applications. *Institute de Jussieu University Pierre et Marie Curie Paris, TU Kirtipur Kathmandu, Nepal November*, v. 2, 2015. Citado na página 1.