V Encontro Campinense do PROFMAT
27 de outubro de 2023
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

DUALIDADE: CONSTRUÇÃO DO DODECAEDRO RÔMBICO A PARTIR DO CUBOCTAEDRO VIA MEDIATRIZES

Állisson Henrique Leite Cabral[1] - madagascar_kof@hotmail.com
Gustavo da Silva Araújo[2] - gdasaraujo@gmail.com
Luciana Roze de Freitas[3] - lucianarfreitas@hotmail.com
Maxwell Aires da Silva[4] - maxwellaires@servidor.uepb.edu.br

[1] E.E.E.F.M. Poetisa Vicentina Figueiredo Vital do Rêgo - Campina Grande, PB, Brasil
[2,3,4] Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste trabalho, apresentaremos um método analítico-geométrico que nos permite construir o dual de um poliedro, o qual se mostra uma solução alternativa do princípio de inversão com relação a uma esfera, que estabelece um algoritmo que nos possibilita construir o dual de um poliedro a partir de uma esfera que tangencia os pontos médios de suas arestas. O procedimento que adotaremos consiste na tomada de mediatrizes convenientes das arestas do poliedro, cuja interseção origina os vértices do seu poliedro dual. Mais precisamente, aplicaremos esse método na tentativa de obtermos o sólido catalaniense dodecaedro rômbico a partir do sólido arquimediano cuboctaedro. Veremos que esses sólidos têm propriedades bastante interessantes e que eles se relacionam de maneira peculiar.*
Palavras-chave: *Poliedros; Dualidade; Mediatrizes*

1. Introdução

É indiscutível a importância da geometria no espaço físico em que vivemos, sobretudo para nos orientar na interpretação das formas que estão ao nosso redor e nos ajudar, por exemplo, a entender o porquê de determinado produto ter aquele formato específico. Esse entendimento nos instiga a pensar acerca de perguntas como: Quais são as suas vantagens? Qual foi a finalidade estética almejada? Alterar seu formato traria algum aumento no custo de produção e/ou transporte e acondicionamento? Procurar respostas para essas perguntas nos desperta o interesse pelo estudo dos poliedros e de seus elementos, levando-nos a tentar descobrir alguma relação entre eles.
No século III a.C., **Arquimedes de Siracusa** (287 a.C. - 212 a.C.), a partir dos cinco poliedros regulares convexos, promoveu a construção de treze poliedros semirregulares (cujas faces são polígonos regulares de mais de uma natureza). Séculos mais tarde, **Eugène Charles Catalan** (1814 - 1894) foi responsável pela construção de treze novos poliedros observando qual deveria ser o formato dos respectivos duais dos poliedros arquimedianos.
Neste trabalho, teremos a preocupação de mostrar como se dá a dualidade entre o sólido arquimediano cuboctaedro e o sólido catalaniense dodecaedro rômbico, utilizando um método alternativo, o qual dispensa o conceito de inversão com relação a uma esfera. Esse método consiste basicamente em traçar mediatrizes específicas das arestas do poliedro e considerar a interseção delas duas a duas. Com isso, teremos dado origem às faces do poliedro desejado, que satisfaz as condições de dualidade a qual apresentaremos mais à frente.
O conceito de dualidade de poliedros estabelece uma relação entre a quantidade de vértices e de faces de cada um deles, de modo que suas arestas se dispõem perpendicularmente, promovendo uma inscrição (ou pelo menos uma semi-inscrição) entre os poliedros. O matemático **Johannes Kepler** (1571 – 1630) ainda em 1619, na sua obra *A Harmonia dos Mundos*, publicou um estudo sobre a dualidade envolvendo os poliedros regulares, o qual se estendia a algumas classes particulares de poliedros, como a dos antiprismas, cujos duais correspondem aos trapezoedros. A teoria desenvolvida por ele consiste em tomar os centros das faces do poliedro primal a fim de determinar biunivocamente os vértices do seu dual. Infelizmente, essa receita não se aplica à classe dos poliedros arquimedianos. Por exemplo, ao seguirmos o manual traçado por Kepler na tentativa de construirmos o dual do cuboctaedro, acabamos obtendo uma figura espacial que sequer é poliedro.
A seguir, vamos definir, tendo como base (GRÜNBAUM; SHEPHARD, 1988), analiticamente como acontece a dualidade entre dois poliedros. Trata-se de uma generalização da definição estabelecida por Kepler, pois não se

ISSN 2764-2631

faz mais necessário que os vértices de um dos poliedros coincidam com os centros das faces do outro.

Definição 1 (Poliedros duais). *Diz-se que dois poliedros convexos P e Q são duais um do outro se existe uma bijeção φ da família de vértices e faces de P na família de vértices e faces de Q, que possui as seguintes propriedades:*
(1) *Se V é um vértice de P, então $\varphi(V)$ é uma face de Q;*
(2) *Se F é uma face de P, então $\varphi(F)$ é um vértice de Q;*
(3) *V é vértice da face F de P se, e somente se, $\varphi(F)$ é vértice da face $\varphi(V)$ de Q.*

Preteritamente, precisamos deixar claro quais propriedades têm os sólidos que iremos considerar na construção proposta.

Definição 2 (Sólidos de Arquimedes). *Chama-se sólidos de Arquimedes aos poliedros convexos que satisfazem as seguintes condições:*
(1) *Todas as suas faces são formadas por polígonos regulares de mais de uma natureza;*
(2) *O número de arestas que concorrem em cada vértice do poliedro é sempre o mesmo.*

Observação 1. *Existem apenas treze sólidos arquimedianos.*

Veremos que diferentemente do que acontece com os poliedros de Arquimedes, os de Catalan não têm vértices uniformes, isto é, o arranjo de faces em torno de um vértice não se mantém constante em todo o poliedro.

Definição 3 (Sólidos de Catalan). *Chama-se sólidos de Catalan aos poliedros convexos que satisfazem as seguintes condições:*
(1) *As suas faces não são formadas por polígonos regulares, mas são todas congruentes entre si;*
(2) *Os ângulos determinados por duas faces adjacentes são sempre congruentes.*

Observação 2. *Existem apenas treze sólidos catalanienses.*

2. Metodologia

Antes de iniciarmos a construção do poliedro dual do cuboctaedro utilizando o método das mediatrizes, precisamos realizar uma operação denominada de truncatura sobre o hexaedro regular.
Considere um hexaedro regular (cubo) de aresta medindo $\sqrt{2}$ unidades de comprimento e tome o ponto médio de cada uma de suas arestas. Unindo consecutivamente esses pontos, fomentamos as arestas de um poliedro arquimediano, chamado cuboctaedro. Observe que esse procedimento consiste exatamente em truncar o hexaedro regular com planos que contêm os pontos médios de arestas que concorrem em um mesmo vértice. Dessa forma, construímos um sólido constituído de seis faces quadrangulares e oito faces triangulares, todos polígonos regulares cujo lado mede 1 unidade de comprimento, conforme ilustra as figuras 1 e 2 a seguir:

Figura 1: Hexaedro regular

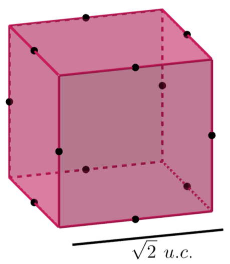
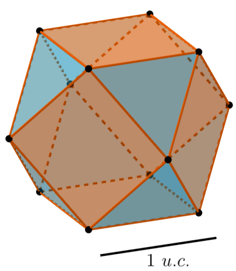


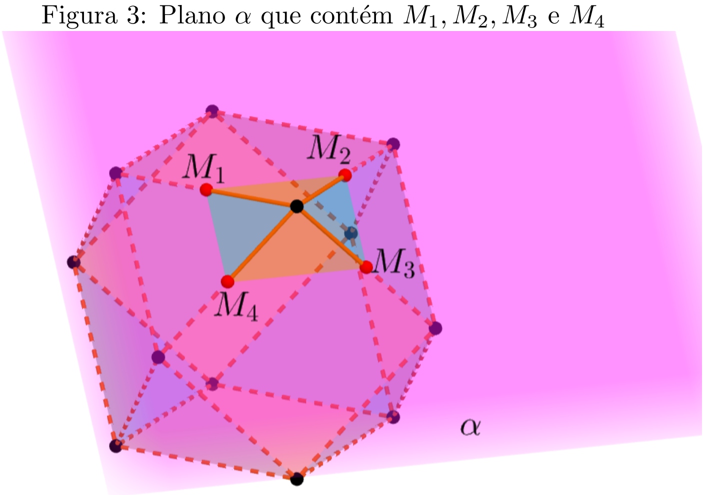
Figura 2: Cuboctaedro



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

De posse do cuboctaedro fomentado, tome os pontos médios M_1, M_2, M_3 e M_4 de quatro arestas que concorrem em um mesmo vértice. Pela regularidade das faces do cuboctaedro, inferimos que tais pontos médios são coplanares. Seja α o plano que os contém. Ver figura 3.

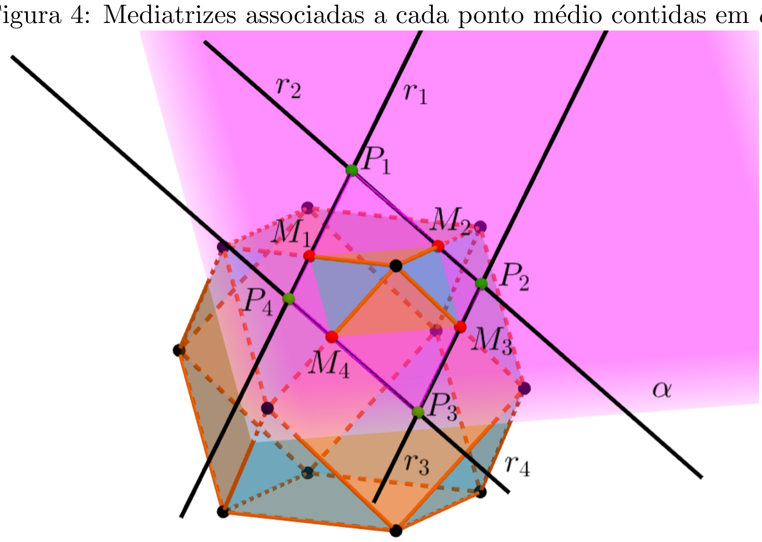
Figura 3: Plano α que contém M_1, M_2, M_3 e M_4



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Prosseguimos traçando a reta r_1 que está contida no plano α, passa pelo ponto M_1 e é perpendicular à aresta que contém esse ponto. Repetindo esse processo para as demais arestas destacadas na figura 4, obtemos as retas r_2, r_3 e r_4, as quais cumprem o papel de serem mediatrizes relativas a essas arestas. Como tais retas são concorrentes, então existem pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 que são as interseções dessas retas, duas a duas, como se pode observar a diante:

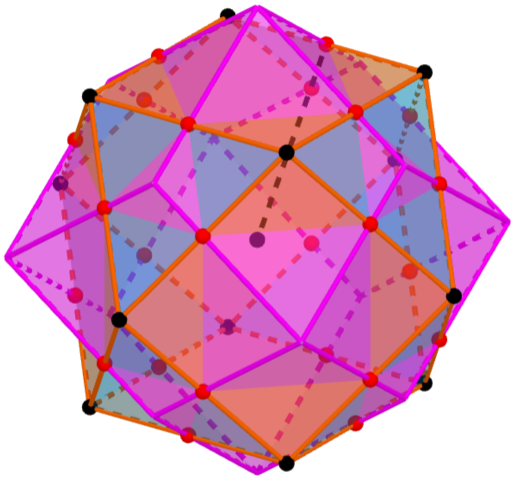
Figura 4: Mediatrizes associadas a cada ponto médio contidas em α



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Observe que acabamos de originar a primeira face do suposto sólido arquimediano dodecaedro rômbico; e trata-se de um polígono em formato de losango. Finalmente, para obtermos efetivamente o poliedro desejado, basta realizar novamente o passo a passo descrito com as demais arestas do cuboctaedro. Ver figura 5.

Figura 5: Dodecaedro rômbico



Fonte: Elaborada pelo autor no GeoGebra

Como almejado, conseguimos construir o dual do cuboctaedro utilizando apenas o traçado de mediatrizes convenientes. É importante destacarmos que de fato esse poliedro resultante é o sólido catalaniense dodecaedro rômbico, pois todas as faces são polígonos congruentes entre si e o ângulo formado entre duas faces adjacentes quaisquer é sempre o mesmo. A demonstração dessas duas propriedades pode ser encontrada na íntegra do trabalho AIRES DA SILVA, M.; ARAÚJO, G.; CABRAL, A. Dualidade: construção do tetraedro triakis a partir do tetraedro truncado via mediatrizes, aceito para publicação na PMO.

3. Resultado e discussão

Como pudemos constatar, o procedimento utilizado na construção dos poliedros que verificam uma dualidade é de fácil compreensão e não requer o uso de traçados geométricos mais rebuscados. Diante disso, surge a seguinte pergunta: Por que esse tema (dualidade de poliedros) não é abordado em livros didáticos voltados para o ensino básico? Nem mesmo na graduação costuma-se abordar esse conceito nas aulas de tópicos de geometria. Trata-se de uma temática que nos desperta bastante a curiosidade e que nos possibilita diferentes abordagens. Além disso, até onde pesquisamos, não encontramos nenhum trabalho que forneça o passo a passo de maneira clara e objetiva, de como se obter o dual de um poliedro convexo qualquer. Há apenas textos que se limitam a exibir a dualidade existente entre os sólidos regulares, em consonância com a definição apresentada por Kepler. Mas quando a gente pensa em poliedros mais gerais, aquela definição perde todo seu efeito construtivo. Sendo assim, não poderíamos deixar de citar a referência (BORTOLOSSI; ADJI,), que se intitula “Uma pletora de poliedros” e apresenta o conceito de inversão com relação a uma esfera, inclusive fornecendo o algoritmo que nos auxilia na escolha da esfera que gera particularmente o poliedro dual desejado. Mais do que isso, ainda é disponibilizado um software que fornece uma animação da dualidade entre os poliedros de diferentes classes.

4. Conclusões

A beleza na dualidade aplicada a essas classes específicas de poliedros se dá pela disposição espacial dos mesmos, de modo que suas arestas se mostram ordenadamente perpendiculares entre si, estabelecendo a relação biunívoca entre cada face e um vértice do seu dual. Nesse sentido, as mediatrizes se mostraram fortes aliadas no processo de obtenção do dual de um poliedro convexo.

Referências

BORTOLOSSI, H. J.; ADJI, V. I. S. E. *Uma pletora de Poliedros*. [S.l.]. Disponível em: ⟨http://www.cdme.im-uff.mat.br/html5/pdp/pdp-html/pdp-br.html⟩. Citado na página 4.

GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. Shaping space - a polyhedral approach. In: *Duality of Polyhedra*. [S.l.]: Burkhouse, 1988. Citado na página 1.