ISSN 2764-2631

APROXIMANDO π NUMERICAMENTE E DOS ALUNOS: UMA PROPOSTA DE INVESTIGAÇÃO

Allyson Medeiros Gabriel[1] - allysonmgabriel@gmail.com
Emanuela Régia de Sousa Coelho[2] - emanuelacoelho@servidor.uepb.edu.br
Arlandson Matheus Silva Oliveira[3] - arlandsonm@servidor.uepb.edu.br

[1]Rede Municipal de Educação - Patos, PB, Brasil
[2]Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil
[3]Universidade Estadual da Paraíba, Curso de Matemática - Patos, PB, Brasil

Resumo: *Constatando a escassez na literatura de pesquisa nacional sobre a temática aqui abordada, a carência de textos normativos que tratem das possibilidades de ensino de números reais no ensino fundamental e a necessidade de materiais sobre como convencer os alunos de que números como π são irracionais, propomos neste trabalho um roteiro de atividade investigativa, baseada no método arquimediano, que os professores podem adotar para estimar e aproximar com seus alunos o numero π através do comprimento da circunferência.*
Palavras-chave*:* *Número π; Atividade investigativa em sala de aula; Método arquimediano*

1. Introdução

A ideia de tratar da irracionalidade de π veio de inquietações com respeito às justificativas de que esse número é irracional e às formas como isso é tratado no ensino fundamental. Por ser um número transcendente[1], não há uma prova simples da irracionalidade de π, embora esse fato seja apresentado como verdadeiro em todas as etapas do ensino, sem a preocupação de qualquer justificativa.

Neste contexto, a busca que originalmente motivou Gabriel (2023) era por uma apresentação possível da irracionalidade de π na sala de aula do ensino básico. Contudo, constatamos que mesmo a demonstração mais simples que fomos capazes de encontrar, devida a Breusch (1954), faz uso de elementos inacessíveis nesse nível de ensino: prova por contradição, séries de Taylor, estimativas para séries e limites. Apesar disso, deparamo-nos com questões mais gerais sobre o tratamento dos números irracionais na educação básica, abarcando também questões sobre os números racionais e sobre a reta real como um todo. Constatamos que, no Brasil, ainda há pouca literatura sobre o tema, merecendo destaque as contribuições de Broetto (2016), Broetto e Santos-Wagner (2019), Soares, Ferreira e Moreira (1999).

À escassez na literatura de pesquisa, soma-se uma carência de textos normativos que tratem das possibilidades de ensino de números reais no ensino fundamental, desde a apresentação dos números racionais até seu completamento com os números irracionais. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca que,

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. (BRASIL, 2018), p.269)

Entretanto, os números irracionais só aparecem em uma única habilidade a ser desenvolvida nos anos finais do ensino fundamental e somente no 9º ano, ou seja, último dessa etapa de ensino. Quando buscamos esse direcionamento na Proposta Curricular do Estado da Paraíba (PCPB) BRASIL (2019), deparamo-nos com uma situação curiosa no que se refere ao currículo da área de Matemática: há comentários ou sugestões metodológicas para abordagem de cada uma das habilidades a serem fomentadas nos anos iniciais do ensino fundamental;

[1]Um número transcendente é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Uma prova da transcendência de π é dada em Jones (2017).

quando se trata dos anos finais, o currículo se resume a associar cada habilidade aos conteúdos que devem ser trabalhados.

Diante isso, neste trabalho propomos um roteiro de atividade investigativa que os professores podem adotar para estimar e aproximar com seus alunos o numero π através do comprimento da circunferência, tentando minimamente dirimir o ciclo indicado por Broetto e Santos-Wagner (2019) e desenvolver o potencial das habilidades contidas na BNCC e da PCPB.

2. Uma proposta de investigação em sala de aula

Ano: Esta atividade deverá ser preferencialmente desenvolvida no 8º ano (mas pode ser feita no 9º) e compreende a Habilidade EF08MA19 da BNCC.

Conteúdo: Estimativa e aproximação para o número π através do comprimento da circunferência.

Pré-requisitos: Os alunos devem compreender o Teorema de Pitágoras, propriedades básicas sobre triângulos (soma dos ângulos internos, triângulos equiláteros e equiângulos).

Objetivos:
I. Entender como funciona um processo de aproximação de um número irracional por racionais;
II. Estimar valores para π a partir de construções manuais dos alunos, antes de mostrar como o processo funciona computacionalmente.

Motivação:
Sabemos que o comprimento da circunferência de um círculo de raio R é dado por $C = 2\pi R$. Nesta aplicação, recriamos o processo de Arquimedes com polígonos regulares inscritos em um círculo com raio pré fixado. Construímos uma aproximação para π por sucessões de números racionais, obtendo assim aproximações por falta para este número irracional.

A ideia é usar hexágonos inscritos ao círculo e ir duplicando o número de lados dos polígonos. Utilizando o GeoGebra, um aplicativo de geometria dinâmica, podemos mostrar que quando os polígonos tem 96 lados se verifica a aproximação $223/71 < \pi < 22/7$ (considerando, na última desigualdade, também o processo com os polígonos circunscritos, o qual não iremos tratar aqui), que foi realizada por Arquimedes (287 - 212 a.E.C). Para mais detalhes sobre o processo arquimediano, sugerimos consultar Heath (1921).

Etapas:
i) Primeiramente temos um círculo de raio 1. Nesse círculo construímos um hexágono regular inscrito. Pelas propriedades do hexágono sabemos que seu lado l_1 mede 1.

Como a figura mostra (Figura 1), o hexágono é formado por 6 triângulos equiláteros. E daí temos a primeira aproximação para para o comprimento da circunferência. Sendo 6 o perímetro do hexágono e o comprimento da circunferência dado por $2\pi R = 2\pi$, então $6 < 2\pi \Rightarrow 3 < \pi$.

ii) Agora, iremos refinar esse processo dobrando o número de lados do hexágono inscrito, isto é, tomando um polígono de 12 lados. Para isso, basta construirmos um triângulo isósceles usando como base o lado do hexágono anterior. Veja a Figura 2.

Para calcular o perímetro do dodecágono precisamos descobrir quanto mede seu lado l_2. Descobrindo a altura a_1 do triângulo equilátero do hexágono anterior, podemos encontrar a diferença $b_1 = 1 - a_1$ e, assim, calculando por Pitágoras, o lado l_2 do dodecágono.

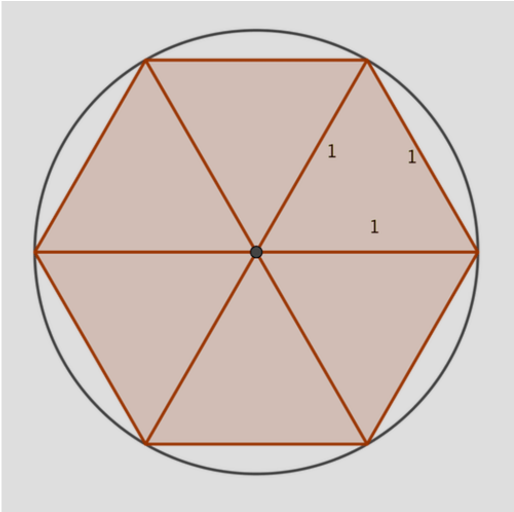
$$a_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{l_1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow b_1 = 1 - a_1 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

e, por Pitágoras, temos

$$l_2 = \sqrt{\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + b_1^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

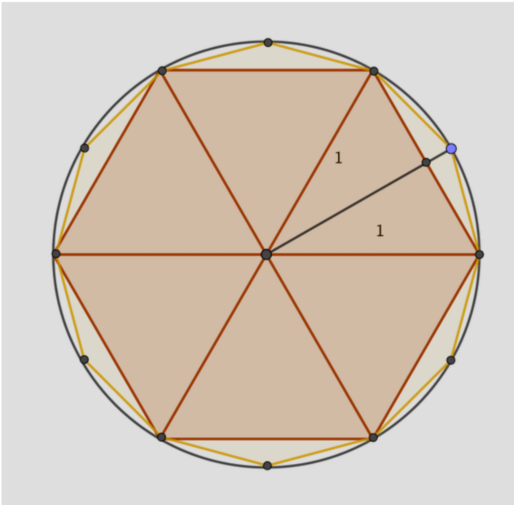
ISSN 2764-2631

Figura 1: Hexágono regular inscrito na circunferência



Fonte: GABRIEL (2023)

Figura 2: Dobrando os lados do hexágono



Fonte: GABRIEL (2023)

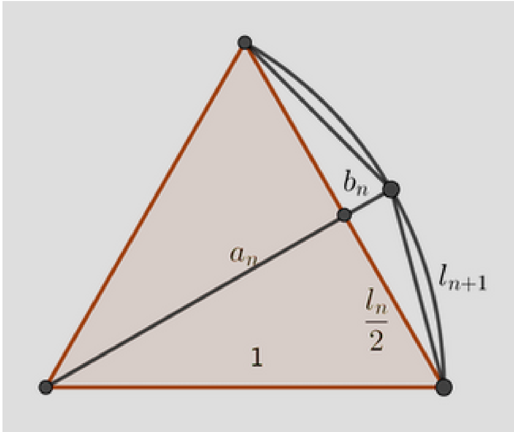
Isso nos dá que o perímetro do hexágono é $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$, o que nos dá a aproximação $\pi > 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,10583$.
iii) Agora, prosseguimos o processo indutivamente, dobrando em cada etapa o número de lados do polígono, isto é, 24, 48, 96, etc. O método para obter o lado do próximo polígono é o mesmo e pode ser generalizado da seguinte forma (Figura 3).

Temos:

$$a_n = \sqrt{1-\left(\frac{l_n}{2}\right)^2}, \quad b_n = 1 - a_n \quad \text{e} \quad l_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + b_n^2}.$$

Arquimedes conseguiu realizar esse procedimento manualmente até um polígono de 96 lados, obtendo a incrível aproximação $\pi > 3,1394$. Obviamente não iremos realizar o mesmo cálculo em sala de aula, mas a ideia é entender e mostrar aos alunos como esse procedimento pode ser pensado em infinitas etapas, cada uma delas se aproximando mais do comprimento da circunferência.

Figura 3: Generalização do processo de obtenção do lado dos polígonos subsequentes



Fonte: GABRIEL (2023)

Recomendações metodológicas: A ideia primordial aqui é que os alunos experienciem essa atividade no caráter mais investigativo possível, isto é, que eles desenvolvam ideias sobre como medir um comprimento, antes de aplicarmos fórmulas. Esse guia acima serve mais ao professor como uma maneira mais rápida de chegar aos resultados, mas em sala isso deve partir da experiência dos alunos com o problema. Inclusive, o fato surpreendente aqui, é que esse processo deve funcionar para quaisquer círculos, já que parte da investigação é o alunos perceberem que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro é constante, e aproxima-se do valor que acabamos de estimar. Essa parte da atividade deve ser experienciada pelos alunos como uma forma deles se convencerem que esse número existe, mas que só podemos obter aproximações finitas para ele, utilizando números racionais.

3. Conclusões

Na atividade proposta, partimos do pressuposto de que o aluno deve protagonizar a investigação matemática, inclusive em temas concepcionalmente difíceis como trabalhar com o número π.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), as atividades de natureza investigativa têm ganhado crescente visibilidade nos currículos escolares, pois, ainda segundo eles, estudos em educação têm mostrado que investigar constitui uma importante forma de construir conhecimento. Braumnn (2002) também ressalta a importância das atividades investigativas na construção do saber quando diz que "Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino)".

Ainda carecemos de bons materiais sobre como convencer os estudantes de que números como π ou e são irracionais. Mais pesquisas sobre o ensino desses números se fazem necessária, e é o que objetivamos, já que esses são alguns dos irracionais mais importantes na formação escolar. Acreditamos que há métodos viáveis ainda por desenvolver ou não explorados para que os alunos do ensino básico não tenham de se contentar apenas com o fato bastante conhecido, mas sem sentido e justificativa, de que certos números são irracionais. A atividade aqui proposta pode não dar conta da irracionalidade de π, mas ajuda a tornar esse número mais acessível e familiar para os alunos os quais, se apresentados a outras propostas de investigação (inclusive para fomentar uma boa compreensão sobre racionais e dízimas) podem tirar conclusões satisfatórias e interessantes no que tange à irracionalidade.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro para realização de sua pesquisa de mestrado.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Brasília: Ministério da Educação, 2018. Citado na página 1.

BRASIL. *Proposta Curricular do Estado da Paraíba: Educação Infantil e Ensino Fundamental.* [S.l.]: Secretaria do Estado da Educação e da Ciência e Tecnologia da Paraíba, 2019. Citado na página 1.

BRAUMNN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matemática. In: PONTE, J. P. et al. (Ed.). *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Lisboa: SEM-SPCE, 2002. Citado na página 4.

BREUSCH, R. A proof of the irrationality of π. *The American Mathematical Monthly, 61(9), 631-2*, 1954. Citado na página 1.

BROETTO, G. *O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016. Citado na página 1.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. O ensino de números irracionais na educação básica e na licenciatura em matemática: um círculo vicioso está em curso? *Bolema, v. 33, n.64, p. 728-747. Rio Claro (SP)*, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

GABRIEL, A. M. *Completando a reta: números reais em sala de aula numa perspectiva investigativa.* [S.l.]: Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2023. Citado na página 1.

HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon, 1921. Citado na página 2.

JONES, T. W. The squared case of π^n is irrational gives π is transcendental. 2017. Acesso em 06 out. 2023. Disponível em: ⟨https://vixra.org/abs/1711.0258⟩. Citado na página 1.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. Citado na página 4.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. *Zetetiké - CEMPEM - FE/UNICAMP, v. 7, n. 12, p. 95-117. Campinas*, 1999. Citado na página 1.