ISSN 2764-2631

O PORISMA DE STEINER

Carlos Gonzaga da Silva Júnior[1] **- carlosgonzaga72@gmail.com**
José de Arimatéia Fernandes[1] **- arimat.ufcg@gmail.com**

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Este presente trabalho tem por objetivo apresentar uma construção do Porisma de Steiner. Para tanto, faremos uso das propriedades básicas da Geometria Inversiva. As figuras foram construídas usando o software de Geometria dinâmica: o GeoGebra.*
Palavras-chave*: Geometria Inversiva; Porisma de Steiner; GeoGebra*

1. Introdução

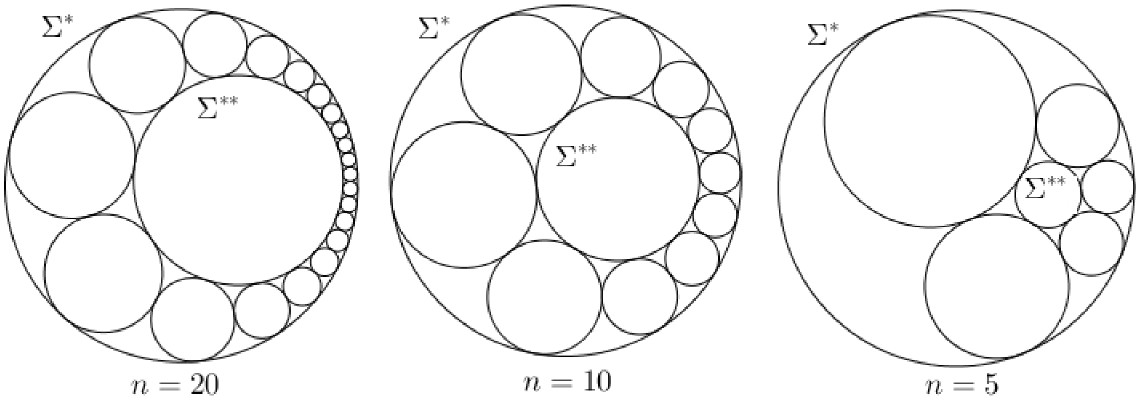
Um problema interessante da Geometria Inversiva é o Porisma ou Cadeia de Steiner, proposto pelo matemático suiço Jacob Steiner (1796 - 1863). Este problema nos diz que: dadas duas circunferências não concêntricas, uma interior a outra, queremos saber se existe uma cadeia de circunferências, cada uma delas tangente à anterior e à posterior, e todas elas tangentes às duas circunferências dadas. (TARRIDA, 2003)

A seguir, apresentaremos uma definição formal e ilustraremos a situação.

Definição: Seja Σ^* e Σ^{**} duas circunferências não concêntricas, consideremos circunferências Σ_1, Σ_2, Σ_3,... de tal maneira que cada Σ_k, com $k \geq 2$, sejam tangentes a Σ^*, Σ^{**} e Σ_{k-1}. Se existe um número natural n nessas condições, então dizemos que $\{\Sigma_k\}_{k=1}^{n}$ é um porisma de Steiner para Σ^* e Σ^{**}.

Na Figura 1 a seguir, ilustramos exemplos de porisma de Steiner para $n = 20$, 10 e 5.

Figura 1: Porisma de Steiner.

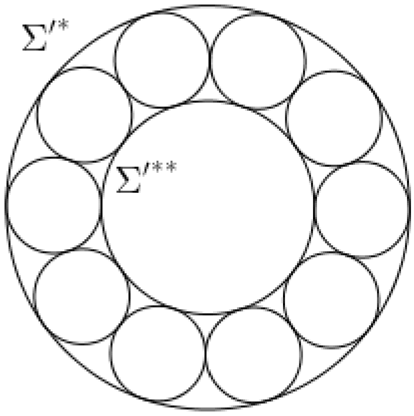


Fonte: O autor.

Embora nos limitemos a construir uma quantidade finita de circunferências, este problema tem infinitas soluções, isto é, há uma infinidade de circunferências que podem ser postas em forma de porisma. Observe que não é uma tarefa simples construir essas circunferências como na Figura 1 utilizando o conhecimento de geometria plana. Porém, podemos transformar o problema em um outro um tanto quanto mais simples, o qual consideramos as duas circunferências concêntricas e n circunferências tangentes, em que cada uma delas é tangente à anterior, à posterior e as duas circunferências dadas, como ilustra a Figura 2 e, a partir disso, usamos o conhecimento da inversão geométrica para construir o porisma.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Figura 2: circunferências concêntricas.



Fonte: O autor.

Antes de justificarmos matematicamente como dispor tais circunferências e com o intuito de facilitar a compreensão do leitor deste resumo, organizamos, em forma de tabela, as propriedades da inversão geométrica, as quais podem ser encontradas, com mais detalhes, em (JUNIOR, 2022, p.49-56).

Tabela 1: Propriedades da Inversão

Propriedades	Inversão
Distância entre os pontos inversos de A e B	$\overline{A'B'} = \dfrac{\overline{AB} \cdot r^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$
Reta que passa pelo centro de inversão	Transforma-se nela mesma
Reta que não passa pelo centro de inversão	Transforma-se em uma circunferência que passa pelo centro de inversão
Circunferência que não passa pelo centro de inversão	Transforma-se em uma circunferência que não passa pelo centro de inversão
Circunferências que não se intersectam	Transformam-se em circunferências concêntricas
Circunferências ortogonais	Transformam-se nelas mesmas
Ângulos formados pelas tangentes entre curvas	A transformação mantém os ângulos

O objetivo do nosso trabalho é mostrar uma construção do Porisma de Steiner utilizando o software GeoGebra, a qual será descrita na seção que trata sobre **Resultado e discussão**.

2. Metodologia

Quanto a metodologia, este trabalho foi desenvolvido a partir de pesquisas bibliográficas. Inicialmente, trouxemos uma definição sobre o Porisma de Steiner. Em seguida ilustramos, através de uma tabela, as principais propriedades da inversão geométrica. Por fim, descrevemos o passo a passo e a justificativa para a construção do Porisma de Steiner usando o software GeoGebra e apresentamos as conclusões.

3. Resultado e discussão

Nesta seção apresentamos a construção do porisma de Steiner, bem como a sua justificativa. Agora, vamos descrever os passos para a construção de n circunferências, conforme Figura 2, utilizando o Software de Geometria Dinâmica: o GeoGebra.

1. Escolha o seu polígono selecionando a opção de *polígono regular* no GeoGebra;
2. Use a ferramenta *ponto médio* para encontrar o ponto médio de cada lado;

3. Use a ferramenta *círculos dado centro e um de seus pontos* para construir uma circunferência centrada em cada vértice e tendo uma distância radial do vértice a um ponto adjacente;
4. Se o polígono tiver número ímpar de lados, trace uma semirreta partindo do um ponto médio ao vértice oposto. Faça isso novamente com outro ponto médio e vértice.
5. Se o polígono tiver um número par de lados, trace uma semirreta partindo de um vértice ao vértice oposto. Faça isso novamente com outros dois vértices.
6. Coloque um ponto onde as semirretas se intersectam e este é o centro do polígono.
7. Coloque um ponto na parte superior e inferior da circunferência onde a semirreta intersecta a circunferência.
8. Desenhe duas circunferências: uma com um raio do centro ao ponto do círculo interno e a outra com um raio do centro ao outro ponto.
9. Limpe todos os pontos, semirretas, raios e o polígono, deixando apenas as circunferências.

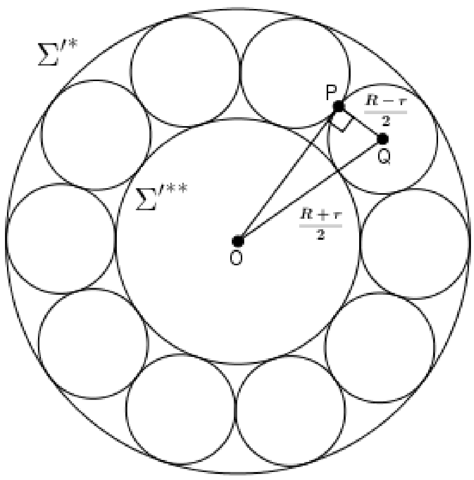
A proposição a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para que seja possível realizar tal construção.

Proposição: Duas circunferências concêntricas $\Sigma'^{*}(O;R)$ e $\Sigma'^{**}(O;r)$ admitem uma cadeia de n circunferências tangentes entre si e tangentes à elas se, e somente, se

$$\frac{R}{r} = \frac{1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}.$$

Demonstração:

Figura 3: cadeia de n circunferências tangentes entre si e tangentes às duas circunferências dadas.



Fonte: O autor.

Nas notações da Figura 3, suponha que seja possível inscrever, conforme as condições do enunciado, n circunferências entre essas duas circunferências concêntricas. Por simetria, todas essas circunferências são congruentes. Assim, se tomarmos o ponto P como o ponto de tangência entre duas dessas circunferências e o ponto Q como o centro de uma delas, o triângulo OPQ é retângulo em P, pois o raio é perpendicular no ponto de tangência.

Além disso, se PQ é o raio de uma dessas circunferências, então $2\overline{PQ} = R - r$, isto é,

$$\overline{PQ} = \frac{R-r}{2}$$

ISSN 2764-2631

e

$$\overline{OQ} = R - \left(\frac{R-r}{2}\right) \tag{1}$$
$$= \frac{2R - R + r}{2} \tag{2}$$
$$= \frac{R+r}{2}. \tag{3}$$

Agora, observe que o ângulo $P\widehat{O}Q = \dfrac{\pi}{n}$, uma vez $P\widehat{O}Q$ é ângulo central, que as circunferências estão igualmente espaçadas e são congruentes. Com isso, temos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{R-r}{2} \cdot \frac{2}{R+r} = \frac{R-r}{R+r}. \tag{4}$$

Dividindo o numerador e o denominador do lado direito de 4 por r, obtemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{\frac{R}{r} - 1}{\frac{R}{r} + 1}, \tag{5}$$

ou seja,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \cdot \frac{R}{r} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} - \frac{R}{r} + 1 = 0, \tag{6}$$

isto é,

$$\frac{R}{r} \cdot \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} - 1\right) = -\left(1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right), \tag{7}$$

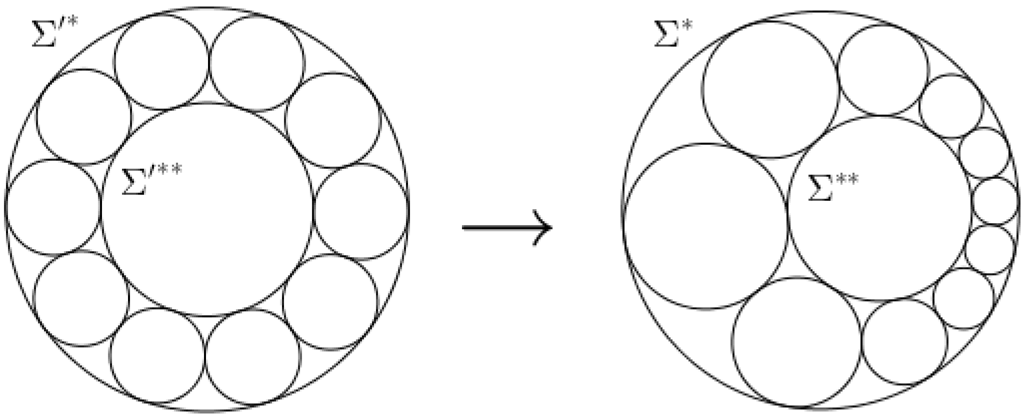
logo,

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}. \tag{8}$$

Para a recíproca, basta usar o argumento desenvolvido anteriormente partindo da igualdade acima. □

Como a inversão é uma transformação involutiva, isto é, quando se aplica a transformação de inversão em um elemento já transformado, retorna-se ao elemento original, podemos inverter as circunferências da Figura 3 e obter o resultado desejado. Ver Figura 4 a seguir.

Figura 4: inversão na cadeia de n circunferências.



Fonte: O autor.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

4. Conclusões

Fizemos uso das propriedades básicas da Inversão Geométrica e descrevemos o passo a passo da construção, utilizando o software GeoGebra, do Porisma de Steiner, que consiste em: dadas duas circunferências não concêntricas, uma interior a outra, queremos saber se existe uma cadeia de circunferências, cada uma delas tangente à anterior e à posterior, e todas elas tangentes às duas circunferências dadas.

Esperamos que este trabalho sirva como referência para possíveis pesquisas futuras, uma vez que a geometria inversiva é uma potencial ferramenta para resolver determinados problemas e, especifamente, problemas que envolvem tangência.

Referências

JUNIOR, C. G. S. Geometria inversiva: a transformação de mutualidade entre retas e circunferências. *Dissertação de Mestrado*, p. 49–56, 2022. Citado na página 2.

TARRIDA, A. R. Geometria inversiva. *LA GACETA DE LA RSME*, v. 6, p. 39–79, 2003. Citado na página 1.