V Encontro Campinense do PROFMAT
27 de outubro de 2023
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Um problema e o uso de Recorrência Linear de 2ª ordem Homogênea

Geovane Tavares Nogueira[1] - geovanetavares050119@gmail.com
Luiz Antônio da Silva Medeiros[2] - luiz.silva@professor.ufcg.edu.br

[1]Universidade Federal de Campina Grande - UFCG - Campina Grande, PB, Brasil.
[2]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil.

Resumo: *Neste trabalho é abordado o conteúdo de recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas, visto no Programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT na Universidade Federal de Campina Grande-UFCG. Nosso objetivo foi despertar a curiosidade e o interesse em se utilizar os resultados à respeito dessa temática em um problema aparentemente dificil, que queria determinar a quantidade de sequências com uma quantidade de termos pertencentes ao conjunto* $\{0, 1, 2\}$ *de modo a não figurar dois termos consecutivos iguais a zero nessa sequência. Para alcançar nosso objetivo, abordou-se alguns resultados sobre recorrências lineares, com enfoque, nas recorrências lineares de 2ª ordem homogênea. Abordou-se também as equações características relacionadas a essas recorrências e neste trabalho foi feito uso da que possui duas raízes reais e distintas. Por fim, foi resolvido um problema proposto utilizando relações recursivas, assim como, foi obtido outra maneira de se obter tal resultado através da fórmula fechada para a solução do problema em função apenas da quantidade de termos que a sequência venha a possuir. Nosso objetivo foi alcançado e espera-se que esse trabalho possa motivar os professores, principalmente da Educação Básica a trabalharem com seus alunos esse importante conteúdo em suas aulas, tendo em vista, que problema como esse abordado nesse trabalho, é tido como complexo por muitos alunos e até mesmo professores.*
Palavras-chave*: Equação característica; Recorrências Lineares; Sequências Recursivas.*

1. Introdução

A motivação pela escolha do tema deu-se em função da riqueza e potencial que o mesmo possui para a resolução de vários problemas em matemática que são trabalhados no ensino básico. É oportuno salientar que as disciplinas cursadas no mestrado, em especial a MA12 que trata de conteúdos da Matemática Discreta, foi de suma importância para a realização deste trabalho.

O objetivo desse trabalho foi despertar a curiosidade de resolver um problema aparentemente difícil utilizando as relações de recorrências e as equações de recorrências afim de encontrarmos uma fórmula fechada em função de n para a solução de tal problema.

Pretende-se com este trabalho contribuir para uma melhor divulgação e conhecimento deste conteúdo e despertar o interesse pelos professores, principalmente aqueles que lecionam na educação básica, à buscarem por seu estudo, bem como estimular o uso do mesmo em demonstrações no ensino.

Sendo assim, podemos observar que a resolução de problemas a partir de um pensamento recursivo vem de uma certa forma contribuir para o pensar matemático no sentido de desenvolver habilidades e incitar a criatividade para a resolução de diversos problemas no ensino básico.

2. Metodologia

A metodologia adotada neste trabalho foi a revisão bibliográfica dos materiais Steffenon e Guarnieri (2022), Carvalho e Morgado (2022), Lima et al. (1997) e Caminha (2013) à respeito da temática sobre recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas, tema estudado na disciplina de MA12 do Programa de Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT - na Universidade Federal de Campina Grande - UFCG,

3. Resultado e discussão

A relação de recorrência é uma técnica matemática que permite definir sequências, conjuntos, operações ou até mesmo algoritmo partindo de problemas particulares para problemas genéricos, ou seja, por intermédio de uma regra pode-se calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s).

As relações de recorrência são compostas por duas partes importantes: a(s) condição(ões) inicial(is) que deve(m) ser conhecida(s) e a equação de recorrência que é a regra que permitirá calcular os próximos termos em função dos antecessores. A equação de recorrência não pode definir sequências sem as condições iniciais, isto é, não é uma relação de recorrência. Muitas vezes não é possível resolver problemas de contagem diretamente combinando os princípios aditivos e multiplicativos. Para resolver esses problemas, utilizamos outros recursos: as fórmulas recursivas ou recorrências.

A ideia principal por trás das recorrências é buscar expressar uma determinada quantidade em funções de quantidades anteriores. Quando se é possível expressar um termo geral em funções de termos anteriores, esse termo é expresso na forma de uma equação de recorrência, por exemplo, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Pode-se elencar dois exemplos clássicos de equações de recorrências, que são as Progressões Aritméticas - PA ($a_n = a_{n-1} + r$) e as Progresões Geométricas - PG ($a_n = a_{n-1} \cdot q$).

Mas, não é suficiente determinar somente a recorrência, precisa-se fornecer qual é o primeiro termo da sequência que se deseja definir recursivamente. E nos casos das PA's e PG's, também é preciso dos valores das razões r e q, respectivamente.

Classificam-se os diversos tipos de sequências recorrentes, quanto a:

- **Ordem:** *a ordem de uma equação de recorrência é a diferença entre o maior e o menor índice que aparece na recorrência;*
- **Termo independente:** *são as constantes aditivas presentes nas equações de recorrências;*
- **Linearidade:** *uma recorrência é dita linear quando os valores anteriores que aparecem na definição tenham apenas a primeira potência, por exemplo, a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ é linear. Mas, a recorrência $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n^2$ é dita não linear.*

Encontra-se a solução de uma recorrência quando se consegue encontrar uma fórmula posicional explícita para o termo geral da sequência, por exemplo, a solução da sequência (X_n) dos números naturais $2, 4, 6, 8, \cdots$ pode ser definida por $X_{n+1} = X_n + 2$ com $n \geq 1$ e $X_1 = 2$. Assim, $X_n = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é a solução dessa recorrência.

Neste trabalho foi trabalhado apenas as recorrências de 2ª ordem, ou seja, àquelas do tipo:

$$Y_{n+2} + f(n)Y_{n+1} + g(n)Y_n + k(n) = 0,$$

onde f, g e k são funções cujos domínios são o conjunto dos números naturais e $g(n)$ nunca se anula. Quando $k(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea, caso contrário ela será não-homogênea.

Para que uma recorrência do tipo acima nos defina uma sequência como solução, é preciso estipular os valores dos seus dois termos iniciais.

Trataremos apenas o caso em que as sequências $f(n)$ e $g(n)$ são constantes e $k(n) = 0$, isto é, as recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas que podem ser representada da seguinte maneira:

$$Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n = 0, \qquad \text{com } q \neq 0. \tag{1}$$

Inicialmente suponha que $Y_n = r_0^n$, com $r_0 \neq 0$, seja solução da equação de recorrência (1). Então temos:

$$\begin{aligned} r_0^{n+2} + pr_0^{n+1} + qr_0^n &= 0 \\ r_0^n(r_0^2 + pr_0 + q) &= 0, \end{aligned}$$

como $r_0^n \neq 0$, deve-se ter: $r_0^2 + pr_0 + q = 0$. Isto é, r_0 é solução da equação do 2º grau $r^2 + pr + q = 0$. Esse argumento acima, mostra que a sequência $Y_n = r_o^n$ é solução da recorrência (1) se, e somente se, r_0 é raiz da equação:

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{2}$$

essa equação (2) é chamada de equação característica associada a recorrência (1). Observe que, como $q \neq 0$, a equação (2) não possui raiz nula.

ISSN 2764-2631

Lema 1. *Sejam (X_n) e (Z_n) soluções da equação de recorrência (1) e sejam c, d números reais e arbitrários. Então $T_n = cX_n + dZ_n$ também é uma solução da mesma recorrência.*

Para a demonstração do resultado anterior, basta substituir $T_n = cX_n + dZ_n$ na recorrência (1) e usar a hipótese que X_n e Z_n são soluções e assim obtemos que T_n também será solução.

Lema 2. *Se (Z_n) é solução da recorrência $Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n = 0$ e $Z_1 = Z_2 = 0$, então $Z_n = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.*

A Demonstração desse resultado é feita por indução completa. Veja que a hipótese $Z_1 = Z_2 = 0$ dá a base de indução. Agora, suponha por hipótese de indução que $Z_n = 0$, para $n \leq k$ com $k \geq 2$ e $k \in \mathbb{N}$. Então, como por hipótese $(Z_n)_n$ é solução da recorrência, temos em particular que:

$$Z_{k+1} + pZ_k + qZ_{k-1} = 0,$$

pela hipótese de indução, $Z_k = Z_{k-1} = 0$ e portanto, $Z_{k+1} + p \cdot 0 + q \cdot 0 = 0$, ou seja, $Z_{k+1} = 0$, o que completa a demonstração.

Corolário 1. *Se r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, então qualquer sequência da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, com C_1 e C_2 constantes é solução da recorrência $Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n = 0$.*

A demonstração desse resultado é aplicação imediata do (Lema 1) , para isso, considere $X_n = r_1^n$ e $Z_n = r_2^n$. Assim, $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da mesma recorrência.

A equação $r^2 + pr + q = 0$ pode ter duas raízes reais e distintas, duas raízes reais e iguais ou duas raízes complexas conjugadas. Iremos enunciar apenas o primeiro caso.

Teorema 1. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $Y_{n+2} + pY_{n+1} + qY_n = 0$ são da forma $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, onde C_1 e C_2 são constantes reais. Em particular, para cada condição inicial $Y_1 = a_1$ e $Y_2 = a_2$ há uma única solução para a recorrência.*

Diante dos resultados abordados até aqui e pensando que reformular relações de recorrências é imprescindível para a resolução de problemas combinatórios.

Assim, com essa técnica de abordar problemas por meio de recorrências,encontraremos uma solução para um problema que inicialmente parece ser muito complexo de se resolver.

Problema 1. *Quantas são as sequências de 10 termos todos pertencentes à $\{0, 1, 2\}$ que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?*

Solução: Chamando de Y_n o número de tais sequências com n termos, o valor de Y_{n+2} será a soma das seguintes quantidades:

i) O número de sequência de $n + 2$ termos que começam por 1 e não possuem dois zeros consecutivos. Isso é exatamente igual a Y_{n+1}, pois, se o primeiro termo for 1, para formar a sequência devemos determinar os termos a partir do primeiro, o que pode ser feito de Y_{n+1} modos.

ii) O número de sequência de $n + 2$ termos que começam por 2 e não possuem dois zeros consecutivos. Da mesma forma que a obtida no item anterior, é igual a Y_{n+1} modos.

iii) O número de sequência de $n + 2$ termos que começam por 0 e não possuem dois zeros consecutivos. Se o primeiro termo for zero, temos 2 modos de escolher o segundo termo (1 ou 2) e, escolhido o segundo termo, temos Y_n modos de escolher os demais. Assim, há $2Y_n$ sequências que começam com 0.

Desta forma, tem-se a recorrência $Y_{n+2} = 2Y_{n+1} + 2Y_n$ que definem o número de sequências com n termos que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero.

Como no problema queremos as sequências de 10 termos, deve-se encontrar o Y_{10} na recorrência dada anteriormente.

Assim, observe que $Y_1 = 3$ e $Y_2 = 8$, então usando a recorrência encontrada acima, tem-se os seus 10 primeiros termos, como pode-se observar na Figura (1) a seguir:

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Figura 1: Os 10 primeiros termos da recorrência $Y_{n+2} = 2Y_{n+1} + 2Y_n$

Y_1	$=$	3		Y_6	$=$	448
Y_2	$=$	8		Y_7	$=$	1224
Y_3	$=$	22		Y_8	$=$	3344
Y_4	$=$	60		Y_9	$=$	9136
Y_5	$=$	164		Y_{10}	$=$	24960

Desta forma, conclui-se que são 24960 sequências de 10 termos todos pertencentes à $\{0, 1, 2\}$ que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero.

Mas, veja que dependendo da quantidade de termos que deve figurar na sequência é muito trabalhoso obter a quantidade de sequências que podem ser obtidas sem que haja dois termos consecutivos iguais a zero.

Sendo assim, vamos encontrar uma formula fechada em função apenas de n para descobrir o número de sequências de n termos, todos pertencentes à $\{0, 1, 2\}$ que não possuem dois termos consecutivos iguais a zero.

Vimos que Y_n, satisfaz a recorrência:

$$Y_{n+2} = 2Y_{n+1} + 2Y_n,$$

ou seja,

$$Y_{n+2} - 2Y_{n+1} - 2Y_n = 0 \quad \text{com } Y_1 = 3 \text{ e } Y_2 = 8 \tag{3}$$

Note que, as raízes da equação característica $r^2 - 2r - 2 = 0$ associada a recorrência homogênea da equação (3) são $r_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{3}$, assim, segue do Teorema (1) que a solução geral para a recorrência é dada por $Y_n = C_1(1 + \sqrt{3})^n + C_2(1 - \sqrt{3})^n$. Substituindo as condições iniciais $Y_1 = 3$ e $Y_2 = 8$ na recorrência, e resolvendo o sistema de equações, encontramos

$$C_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6} \qquad \text{e} \quad C_2 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}$$

Assim, o número de sequências de n termos iguais a $0, 1$ ou 2 sem figurar dois zeros consecutivos é dado por:

$$Y_n = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^n \tag{4}$$

Como queríamos encontrar o número de sequências de 10 termos pertencentes à $\{0, 1, 2\}$ de modo a não figurar dois termos consecutivos iguais a zero, faremos $n = 10$ na equação da solução geral da recorrência (4). Assim, obtem-se:

$$Y_{10} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}(1 + \sqrt{3})^{10} + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{6}(1 - \sqrt{3})^{10} = 24960.$$

4. Conclusões

A abordagem do estudo das recorrências lineares no ensino básico é de provocar e incentivar que os alunos sejam cada vez mais intensamente desafiados a situções problemas didáticas motivadoras. Fazendo com que a sala de aula se transforme ainda mais em um laboratório para que os nossos alunos se tornem ainda mais protagonistas em elaboração de ideias e resolução de problemas fortalecendo a experiência e o ambiente em fazer matemática a partir da prática do pensar, do experimentar, do testar, do criar, do desenvolver, do demonstrar, do produzir construindo linguagem matemática a partir das situações do cotidiano.

O nosso objetivo foi alcançado, uma vez que conseguimos encontrar uma fórmula fechada para o problema proposto que fornecesse a quantidade de sequência com 10 termos pertencentes ao conjunto $\{0, 1, 2\}$ de modo a não figurar dois zeros consecutivos.

Com isso, ficou constatado que o uso de recorrências lineares é de fundamental importância, principalmente quando estamos procurando representar uma certa posição. As vezes é necessário procurarmos uma solução fechada para tal problema pois fazendo somente o uso de relações de recorrência, gastaria mais tempo para chegar no resultado procurado.

ISSN 2764-2631

Agradecimentos

- A CAPES por oferecer esse curso para uma melhor qualificação dos professores.

- A todo corpo docente da UFCG, pelo compromisso e dedicação com a formação profissional dos seus discentes, de modo especial ao meu orientador, Luiz Antônio da Silva Medeiros, por todos as horas de estudos, ideias e ensinamentos para construção deste trabalho.

- A UEPB por todo ambiente inspirador e pela oportunidade de ofertar esse encontro que é de grande importância para enriquecermos nossa aprendizagem com conteúdos que serão significativos em nossas salas de aulas.

Referências

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 1.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. d. O. Matemática discreta. *Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM*, 2022. Citado na página 1.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio.* [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 2. Citado na página 1.

STEFFENON, R.; GUARNIERI, F. *Belos Problemas de Matemática discreta.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2022. v. 1ª edição. Citado na página 1.