ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

TRAÇADOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES EM TRIÂNGULOS

Gerivaldo Bezerra da Silva[1] - gerivaldo.bezerra@ifsertao-pe.edu.br
Aldo Trajano Louredo[2] - aldo@servidor.uepb.edu.br
Israel Burití Galvão[2] - israelbg@servidor.uepb.edu.br

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus Floresta, PE, Brasil
[2]Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste trabalho, exploramos algumas técnicas de resolução de problemas de geometria plana conhecidas como "traçados auxiliares". Estas técnicas auxiliam na resolução de problemas que não são comumente resolvidos com a geometria básica presente no componente de Matemática da Educação Básica; problemas estes geralmente exploradas em olimpíadas de matemática. Discorremos aqui um recorte de uma pesquisa, em andamento, que objetiva descrever e exemplificar (construindo no software GeoGebra e material concreto em impressora 3D) sete técnicas de traçados auxiliares no triângulo do livro "Construcciones en Triágulos: Técnicas y criterios para realizar trazos auxiliares" do autor José Luis Meza Barcena (Lima, Peru). Porém, este trabalho limita-se em descrever e exemplificar duas destas técnicas de traçados auxiliares.*
Palavras-chave*: Geometria Plana; Ensino de Matemática; GeoGebra.*

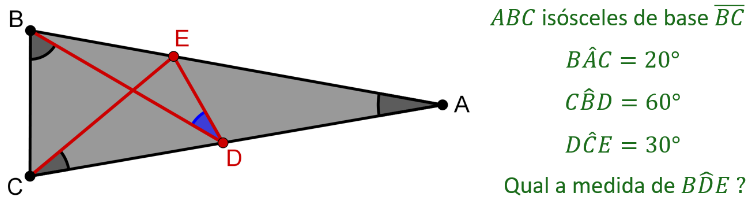
1. Introdução

Na resolução de problemas em geometria plana geralmente buscamos determinar medidas de ângulos ou segmentos em uma figura formada por polígonos. Para obter estas medidas, identificamos relações entre os elementos da figura, tais como: congruência, semelhança, paralelismo, perpendicularidade, etc; e usamos teoremas, tais como: teorema do ângulo externo, soma dos ângulos internos de um triângulo, teorema da bissetriz, etc. Além disso, em alguns exemplos faz-se necessário construções geométricas básicas de régua e compasso para obter estas relações, tais como: ponto médio, bissetriz, mediana, mediatriz, simetria em relação a uma reta, etc.

Há problemas de geometria cuja solução, por mais que busquemos usar os resultados apresentados numa literatura completa como (NETO, 2013), não é possível de obter a solução. Que exigem "traçados auxiliares" para obter a solução: técnicas para adicionar elementos (não convencionais) à figura original, modificando-a de modo a obtermos a solução. José Luis Meza Barcena descreve em seu livro "Construcciones en Triágulos: Técnicas y criterios para realizar trazos auxiliares" (BARCENA, 2004) sete técnicas de traçados auxiliares para resolver problemas geométricos envolvendo triângulos. E sugere exemplos de problemas que necessitam destes traçados para serem resolvidos. Porém, o autor não descreve estas técnicas com a linguagem e rigor matemático adequados, principalmente em relação às demonstrações de alguns resultados não tão triviais.

Estas técnicas de traçados auxiliares, assim como os exemplos propostos pelo autor, compõem uma rico material para os amantes de belos problemas de matemática elementar e também serve como fonte para preparação olímpica. A exemplo, o "problema de Langley" (triângulo russo), na figura abaixo, que não conseguimos resolver usando os conhecimentos de geometria comum, mas apenas com ajuda de alguns traçados auxiliares específicos:

Figura 1: Problema de Langley



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

Amilton Junior é um autor brasileiro que atualmente explora os traçados auxiliares presentes na literatura matemática peruana buscando compreender e reorganizar em linguagem matemática mais formal. Recentemente ele compilou suas ideias de cinco anos de estudo no livro (JUNIOR, 2023), incluindo o problema de Langley.

O objetivo deste trabalho é descrever com mais clareza e exemplificar duas destas sete técnicas de traçados auxiliares por meio de proposições nas quais a hipótese da proposição trata-se das condições iniciais para aplicar a técnica, e a tese da proposição trata-se dos traçados auxiliares que podemos construir e demonstrar.

Este trabalho trata-se de um recorte da pesquisa de dissertação de mestrado do PROFMAT (UEPB) que descreve todas as sete técnicas como proposições e exemplifica, reorganizando algumas ideias do autor para melhor escrita e compreensão, além de ter o cuidado em tornar o material o mais didático possível para os discentes da Educação Básica. Outra parte desta pesquisa faz uso do software livre GeoGebra para construir um banco de dados com figuras das proposições e exemplos que será disponibilizado no site https://www.geogebra.org. Além disso, a confecção de material concreto para laboratório de matemática em impressora 3D com material de encaixe (pontos, segmentos, ângulos, etc). Material este também que buscar-se-à disponibilizar como ferramenta de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

2. Metodologia

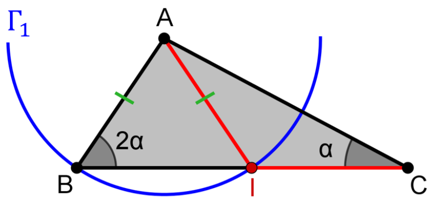
Nesta seção apresentaremos alguns resultados e provas de maneira formal.

Proposição 1. *Seja o triângulo agudo ABC com ângulos internos $A\widehat{B}C = 2\alpha$ e $A\widehat{C}B = \alpha$. Se traçarmos as cevianas interna $\overline{AI}$ e externa $\overline{AE}$ (estando E e I sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$) de modo que $\overline{AI} = \overline{AB}$ e $\overline{AE} = \overline{AC}$, então obteremos os triângulos isósceles ABI, AEC, AEB e ACI de base $\overline{BI}$, $\overline{EC}$, $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.*

Demonstração.

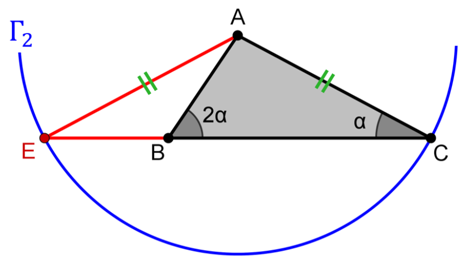
Para construir a ceviana interna, de acordo com o enunciado da proposição 1, centramos o compasso em A e com raio $\overline{AB}$ traçamos o círculo Γ_1. Depois tomamos $I = \overline{BC} \cap \Gamma_1$. Já para construir a ceviana externa, de acordo com o enunciado da proposição, centramos o compasso em A e com raio $\overline{AC}$ traçamos o círculo Γ_2. Depois tomamos $E = \overrightarrow{CB} \cap \Gamma_2$.

Figura 2: Traçado da ceviana interna



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

Figura 3: Traçado da ceviana externa



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

Pela construção da ceviana interna temos $\overline{AI} = \overline{AB}$ e assim segue que ABI é isósceles de base $\overline{BI}$. Logo, $A\widehat{I}B = A\widehat{B}I = 2\alpha$.

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo AIC, a medida do ângulo externo $A\widehat{I}B$ vale a soma das medidas dos ângulos internos $I\widehat{A}C$ e $I\widehat{C}A$, de modo que:

$$A\widehat{I}B = I\widehat{A}C + I\widehat{C}A \implies 2\alpha = I\widehat{A}C + \alpha \implies \alpha = I\widehat{A}C$$

Provado que $I\widehat{A}C = I\widehat{C}A = \alpha$, concluímos que AIC é isósceles de base $\overline{AC}$. E segue que $\overline{AI} = \overline{IC}$.

Pela construção da ceviana externa temos $\overline{AE} = \overline{AC}$ e assim segue que AEC é isósceles de base $\overline{EC}$. Logo, $A\widehat{E}C = A\widehat{C}E = \alpha$.

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo ABE, a medida do ângulo externo $A\widehat{B}C$ vale a soma das medidas dos ângulos internos $B\widehat{A}E$ e $B\widehat{E}A$, de modo que:

$$A\widehat{B}C = B\widehat{A}E + B\widehat{E}A \implies 2\alpha = B\widehat{A}E + \alpha \implies \alpha = B\widehat{A}E$$

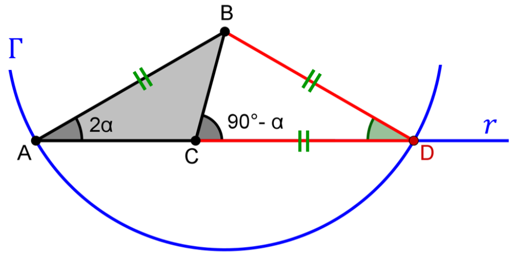
ISSN 2764-2631

Provado que $B\widehat{A}E = B\widehat{E}A = \alpha$, concluímos que ABE é isósceles de base $\overline{AE}$ e segue que $\overline{BA} = \overline{BE}$. ■

Proposição 2. *Seja ABC um triângulo com $B\widehat{A}C = 2\alpha$ e ângulo externo em C, $\beta = 90° - \alpha$. Se tomarmos o ponto $D = \overrightarrow{AC} \cap \Gamma$, onde Γ é a circunferência de centro em B e raio $\overline{AB}$, então ABD e DBC são isósceles de base $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, de modo que temos $\overline{AB} = \overline{DB} = \overline{DC}$, $B\widehat{A}C = B\widehat{D}C = 2\alpha$ e $D\widehat{B}C = D\widehat{C}B = 90° - \alpha$.*

Demonstração.
Traçando o ponto D, conforme indicado na proposição 2, temos que $\overline{AB} = \overline{BD}$ já que são raios de Γ. Assim, ABD é isósceles de base $\overline{AD}$ e segue que $B\widehat{D}C = B\widehat{A}C = 2\alpha$.

Figura 4: Traçado de triângulo isósceles a partir de um triângulo qualquer



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

Pela soma dos ângulos internos de DBC temos:

$$D\widehat{B}C + D\widehat{C}B + B\widehat{D}C = 180° \implies D\widehat{B}C + 90° - \alpha + 2\alpha = 180° \implies D\widehat{B}C = 90° - \alpha$$

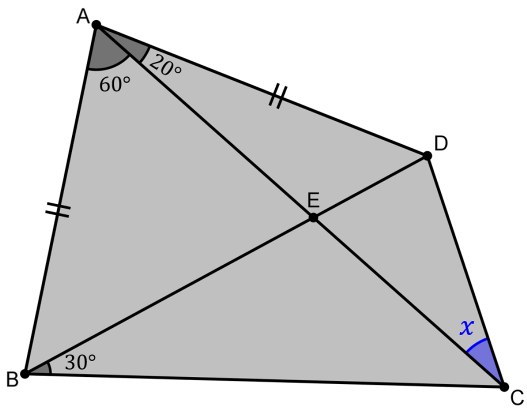
Assim, $D\widehat{B}C = D\widehat{C}B$ e segue que DBC é isósceles de base $\overline{BC}$. Logo, $\overline{DC} = \overline{DB} = \overline{AB}$ ■

3. Resultado e discussão

No que segue, usaremos as teóricas apresentadas para resolver dois problemas cujas soluções não são triviais.

Exemplo 1. Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ tal que E é o ponto de interseção entre suas diagonais ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$), $\overline{AB} = \overline{AD}$ e as medidas dos ângulos: $C\widehat{A}B = 60°$, $C\widehat{A}D = 20°$ e $C\widehat{B}D = 30°$. Determine $x = A\widehat{C}D$:

Figura 5: Representação geométrica do enunciado do exemplo 1



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

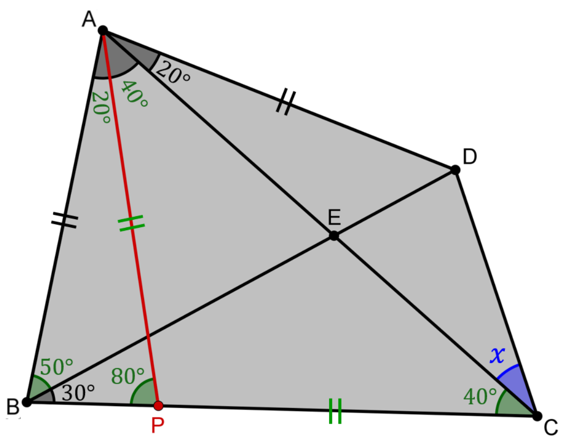
ISSN 2764-2631

Solução:

Como o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$, com $B\widehat{A}D = 60°+20° = 80°$. Então, $A\widehat{B}D = (180° - 80°)/2 = 50°$. Daí, segue que $A\widehat{B}C = 50° + 30° = 80°$ e no triângulo ABC temos $A\widehat{C}B = 180° - 60° - 80° = 40°$.

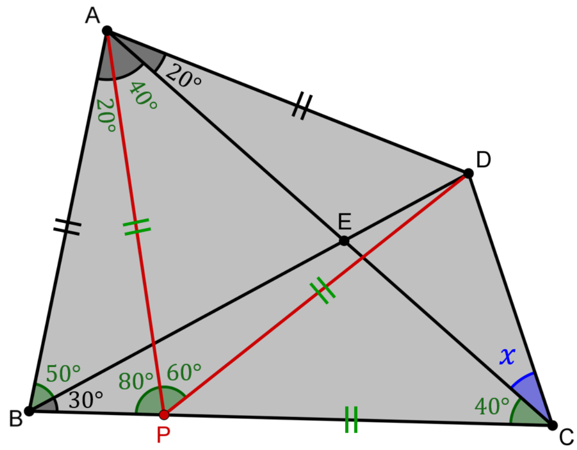
Note que o triângulo ABC tem ângulos na proporção $1 : 2$ $\left(A\widehat{B}C = 80° \text{ e } A\widehat{C}B = 40°\right)$. Assim, aplicamos o resultado da proposição 1 para realizar o traçado auxiliar da ceviana interna no triângulo ABC que é o segmento $\overline{AP}$ com $P \in \overline{BC}$ e $A\widehat{P}B = 80°$. Deste traçado auxiliar segue, pelo resultado da proposição 1, $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{AB}$, $B\widehat{A}P = 20°$ e $P\widehat{A}C = 40°$.

Figura 6: Ceviana interna, $\overline{AP}$, de ABC



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

Figura 7: Triângulos APD e PCD isósceles



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

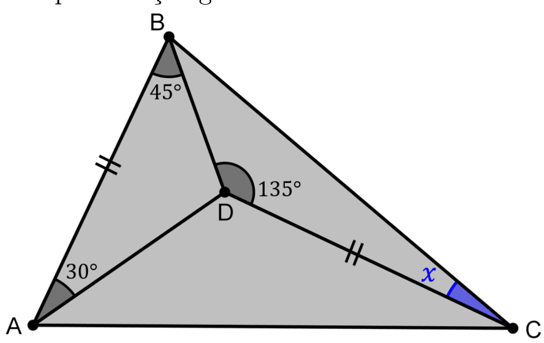
Traçando o segmento $\overline{PD}$, note que o triângulo APD é isósceles de base $\overline{PD}$ com $P\widehat{A}D = 20° + 40° = 60°$. Assim, APD é equilátero. Logo, $A\widehat{P}D = 60°$ e $\overline{PD} = \overline{AP} = \overline{PC}$, e isso implica que o triângulo PCD é isósceles de base $\overline{CD}$.

Mostrado que PCD é isósceles de base $\overline{CD}$ e sendo $B\widehat{P}D = 80° + 60° = 140°$ seu ângulo externo em P, concluímos pelo teorema do ângulo externo que:

$$B\widehat{P}D = P\widehat{C}D + P\widehat{D}C \implies 140° = (x + 40°) + (x + 40°) \implies 70° = x + 40° \implies x = 30°.$$

Exemplo 2. Seja o triângulo ABC e D um ponto em seu interior tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e temos as medidas dos ângulos: $B\widehat{A}D = 30°$, $A\widehat{B}D = 45°$ e $B\widehat{D}C = 135°$. Determine o valor de $x = B\widehat{C}D$:

Figura 8: Representação geométrica do enunciado do exemplo 2



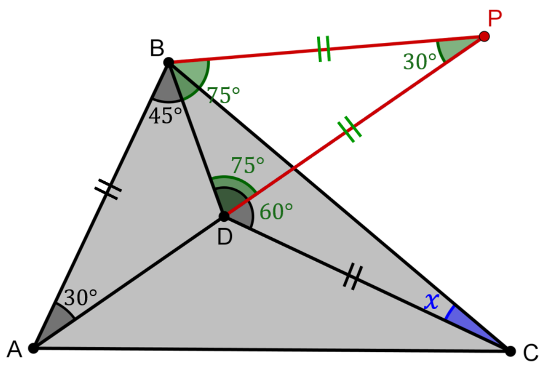
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

ISSN 2764-2631

Solução:

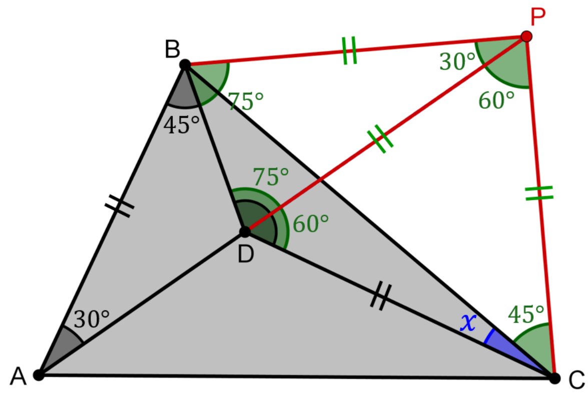
Note que o ângulo externo de ABD, em D, mede $75°$. Assim, podemos aplicar o resultado da proposição 2 para obtermos os triângulos isósceles ABP e PBD com $P \in \overrightarrow{AD}$, de modo que temos: $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{PD}$, $B\widehat{A}D = B\widehat{P}D = 30°$ e $P\widehat{B}D = P\widehat{D}B = 75°$.

Figura 9: Triângulo ABP isósceles



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

Figura 10: Triângulo PCD isósceles



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra

O triângulo PCD é isósceles de base $\overline{PC}$, pois $\overline{PD} = \overline{CD}$. E como $P\widehat{D}C = 135° - 75° = 60°$, então o triângulo PCD é equilátero.

Temos $B\widehat{P}C = B\widehat{P}D + D\widehat{P}C = 30° + 60° = 90°$ o que implica que BPC é um triângulo retângulo em P. E como $\overline{PC} = \overline{PD} = \overline{PB}$, então BPC é um triângulo retângulo e isósceles de base $\overline{BC}$. Assim, $P\widehat{B}C = P\widehat{C}B = 45°$.

Sendo $P\widehat{C}D = 60°$, já que é um dos ângulos do triângulo equilátero PCD, concluímos que:

$$x + 45° = 60° \quad \Longrightarrow \quad x = 15°.$$

4. Conclusões

Há pouco material brasileiro para o estudo de geometria com traçados auxiliares, sendo o (JUNIOR, 2023) um dos primeiros autores a se enveredar por esta área. Diante disso, buscamos desenvolver material para o processo de ensino e aprendizagem desta geometria na educação básica de forma a desenvolver o pensamento crítico do estudante nos problemas abordados. Partindo do estudo e análise destes traçados auxiliares em triângulos, seguiremos a produzir material pedagógico: material escrito com demonstrações e exemplos, material digital no software GeoGebra e material concreto confeccionado em impressora 3D.

Referências

BARCENA, J. L. M. *Construcciones en Triágulos: Técnicas y criterios para realizar trazos auxiliares.* [S.l.]: Impecus, 2004. 134 p. Citado na página 1.

JUNIOR, A. *Livro negro - traçados auxiliares.* [S.l.]: Azimute, 2023. 400 p. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 5.

NETO, A. C. M. *Geometria - Coleção PROFMAT.* [S.l.]: Rio de Janeiro: SBM, 2013. 471 p. Citado na página 1.