ISSN 2764-2631

Geometrização do Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Pólya

Me. Idalice Maria Santiago Oliveira[1] **- idalice56@email.com**
Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho[2] **- daniel@mat.ufcg.edu.br**
Profa. Dra. Carmen Vieira Mathias[3] **- carmen@ufsm.br**

[1]Secretaria de Estado de Educação, Ciência e Tecnologia-PB, Brasil
[2]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil
[3]Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática - Santa Maria, RS, Brasil

Resumo: *O Teorema de Pitágoras é considerado um dos mais importantes e conhecidos teoremas da Matemática, devido a sua ampla aplicação na resolução de problemas ligados à Geometria e ciências afins, principalmente para calcular distâncias. Atualmente percebemos que o Teorema de Pitágoras está sendo apresentado aos estudantes, em especial na Educação Básica, essencialmente no seu formato algébrico, com pouca ênfase em Geometria e às vezes, os estudantes não entendem do seu significado geométrico. Nesta pesquisa, abordamos o Teorema de Pitágoras no formato totalmente geométrico, utilizando áreas de figuras semelhantes. Além disso, apresentaremos o Teorema de Pólya, numa versão mais formal que comumente encontramos, como uma das generalizações do Teorema de Pitágoras.*
Palavras-chave: *Teorema de Pitágoras; Áreas ; Teorema de Pólya.*

1. Introdução

Esse trabalho é uma parte do que estudamos no TCC do PROFMAT-UAMAT (OLIVEIRA, 2023) com título homônimo do resumo, onde, além do que vamos expor, também apresentamos sugestões de sequências didáticas para serem aplicadas em turmas de 9° ano e 1° ano do Ensino Básico e desenvolvemos atividades dinâmicas usando o software GeoGebra para mostrar, através de áreas, os teoremas de Pólya e de Pitágoras. A primeira autora foi orientanda dos dois outros autores.

A Matemática, principalmente a Geometria, sempre provocou um fascínio na humanidade, seja pela sua utilidade, necessidade ou beleza. Percebemos que atualmente há uma maior ênfase na parte algébrica de alguns teoremas que poderiam ter um tratamento essencialmente geométrico e que, de fato, tratam de objetos geométricos. Daí resta aos estudantes memorizarem fórmulas que muitas vezes não têm significado para eles. Por isso, a nossa pesquisa refere-se a geometrização[1] do Teorema de Pitágoras que facilita a apresentação de uma de suas belas generalizações que é o Teorema de Pólya.

Serão apresentadas as versões geométricas desses teoremas, pois, considerando a enorme importância deles para a Matemática, é necessário fazer um elo entre a Geometria e esses teoremas para facilitar, a aprendizagem dos estudantes e ressaltar o forte apelo geométrico deles, impactando diretamente na formação dos alunos.

A BNCC recomenda que o Teorema de Pitágoras seja estudado por verificações experimentais e demonstrações, promovendo a habilidade aos educandos, como se refere o descritor: "(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes". BNCC (BRASIL, 2018, p.319).

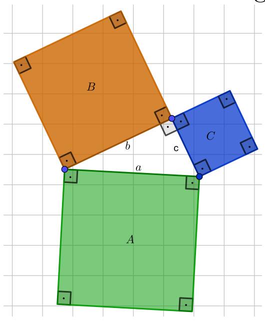
É importante que os educandos conheçam a relação entre Álgebra e Geometria para ter uma melhor compreensão dos teoremas, em particular o Teorema de Pitágoras. Ou seja identificar que a^2, b^2 e c^2 são expressões que representam áreas de regiões quadrangulares que possuem lados com medidas a, b e c, respectivamente. (ver Figura 1).

O Teorema de Pólya é uma generalização do Teorema de Pitágoras, envolvendo quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo, ou seja, $A = B + C$ onde A é a área da figura construída sobre a hipotenusa e B e C são as áreas das figuras construídas sobre os catetos.

[1] ***Geometrização*** é um termo utilizado por nós para darmos ênfase aos aspectos geométricos do Teorema de Pitágoras (569 a.C - 480 a.C) e do Teorema de Pólya (1887 - 1985), usando áreas de figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo.

ISSN 2764-2631

Figura 1: Teorema de Pitágoras.



Fonte: Os autores.

2. Metodologia

A realização da nossa pesquisa seguiu as seguintes etapas:

- O nosso trabalho foi iniciado com uma pesquisa bibliográfica em sites e livros de autores que tratam desse tema, tais como: (MUNIZ NETO, 2013), (LIMA et al., 1991), (LIMA, 2011), (LIMA, 2013), (MORAIS FILHO, 2015), (MATHIAS; SILVA; LEIVAS, 2019) e outros.
- Apresentamos a definição de semelhança e de figuras semelhantes.
- Apresentamos e demonstramos o teorema que relaciona a área de figuras semelhantes.
- Apresentamos e demonstramos o Teorema de Pólya geometricamente.

3. Resultado e discussão

Para trabalharmos com figuras semelhantes precisamos de uma definição de figura, mas sentimos falta na literatura de uma definição matemática do que se entende por “figura”, noção amplamente usada em todos os níveis escolares, principalmente quando trabalhamos com Geometria. Daí apresentamos a seguinte definição de figura.

Definição 1. *Uma **figura** (para nós) é a parte interior de uma curva de Jordan, juntamente com essa curva (bordo da figura).*

Com essa definição, são figuras: parte interior e o bordo de polígonos, elipses, círculos e qualquer curva fechada e simples, que comumente usamos.

Sabemos que o Teorema de Pitágoras refere-se à área de quadrados construídos sobre os lados do triângulo retângulo. Sabemos também, pelas proposições já demonstradas na nossa pesquisa que quadrados são figuras semelhantes. Vejamos, a seguir as definições de semelhanças e figuras semelhantes.

Definição 2. *Seja r um número real positivo. Uma **semelhança** de razão r, no plano, é uma transformação $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que multiplica por r a distância entre dois pontos quaisquer do plano, ou seja, f satisfaz $d(f(P), f(Q)) = r \cdot d(P,Q)$. Onde $d(P,Q)$ é uma distância entre os pontos P e Q.*

Definição 3. *Duas **figuras** F **e** F', contidas no plano $\mathbb{R}^2$ **são semelhantes** quando existe uma função de semelhança $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(F) = F'$.*

Apresentamos exemplos de semelhança e figuras semelhantes no TCC (OLIVEIRA, 2023).

Como o Teorema de Pólya refere-se à área de quaisquer figuras semelhantes construídas sobre os lados do triângulo retângulo foi necessário apresentarmos um teorema que relacione essas áreas. Esse teorema é comumente apresentado para polígonos semelhantes, quando dito valer para figuras semelhantes quaisquer. Fizemos uma demonstração desse caso geral que apresentamos abaixo.

Para darmos embasamento matemático a nossa demonstração foi preciso demonstrar alguns resultados sobre semelhança e figuras semelhantes, tais como:

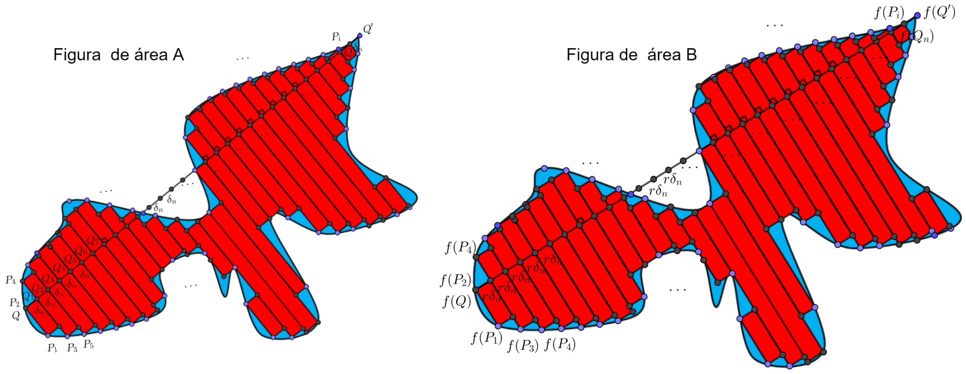
ISSN 2764-2631

1. Seja $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma semelhança de razão $r > 0$ e P, Q pontos distintos do $\mathbb{R}^2$. Se $f(P) = P'$ e $f(Q) = Q'$, então f transforma todo ponto R do segmento PQ, no ponto $f(R) = R'$ do segmento $P'Q'$.
2. Toda semelhança $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de razão de semelhança $r > 0$, preserva qualquer ângulo.
3. Toda semelhança transforma uma reta em outra reta.
4. Toda semelhança $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.
5. Toda semelhança $f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma retas paralelas em retas paralelas.

Todos esses resultados foram demonstrados no TCC (OLIVEIRA, 2023).

Teorema 1. *Se duas figuras, de áreas A e B, são semelhantes com razão de semelhança $r > 0$, então* $\dfrac{B}{A} = r^2$.

Figura 2: Figuras semelhantes.



Fonte: Os autores.

Demonstração.
Sejam A e B duas figuras semelhantes com a função de semelhança $f : A \to B$, se $Q,\ Q' \in A$, então $d(f(Q), f(Q')) = rd(Q, Q')$. Denotaremos a figura e sua área pela mesma letra a fim de simplificarmos a notação.

Na figura A (ver Figura 2):

- Considere Q e Q' tal que $d(Q, Q') = di\hat{a}m(A)$, onde $di\hat{a}m(A)$ é o diâmetro da figura A;
- Logo $di\hat{a}m(B) = d(f(Q), f(Q'))$, onde $di\hat{a}m(B)$ é o diâmetro da figura B;
- Divida $d(Q, Q')$ em n partes iguais de comprimento δ_n. Logo $d(f(Q), f(Q'))$ será dividida em n partes iguais de comprimento $r \cdot \delta_n$;
- Trace perpendiculares por cada Q_i, temos perpendiculares em B passando por cada $f(Q_i)$;
- Considere todos os pontos P_i da intersecção das perpendiculares ao segmento QQ' que passam por Q_i com o bordo da figura A;
- Considere todas as retas paralelas ao segmento QQ' que passam por cada P_i;
- Considere todos os retângulos R_i de largura δ_n e altura dadas por pontos P_n que estejam contidos em A;
- Considere todos os pontos $f(P_i)$ da intersecção das perpendiculares ao segmento $f(Q)f(Q')$ que passam por $f(Q_i)$ com o bordo da figura B;

ISSN 2764-2631

- Considere as retas paralelas ao segmento $f(Q)f(Q')$ que passam por cada $f(P_i)$;
- Considere todos os retângulos R_i' de largura $r \cdot \delta_n$ e altura formada por pontos $f(P_i)$ que estejam contidos em B.
- Considere um desses retângulos em A, por exemplo, o retângulo de base δ_n e altura $\overline{P_3P_4}$. Sua área é dada por,

$$R = \overline{P_3P_4} \cdot \delta_n$$

  Daí, temos o retângulo de área R' correspondente em B, tal que :

$$R' = \overline{f(P_3)f(P_4)} \cdot r\delta_n = r \cdot \overline{P_3P_4} \cdot r\delta_n = r^2 \cdot \overline{P_3P_4} \cdot \delta_n = r^2 R.$$

  Logo,

$$\frac{R'}{R} = r^2.$$

  Isso vale para todos os retângulos contidos em A.

Para uma quantidade finita de retângulos temos: $\displaystyle\sum_{R_j' \subset B} R_j' = \sum_{R_j \subset A} r^2 R_j.$

Como a área de uma figura é a soma das áreas dos polígonos inscritos, então:

$$B = \lim_{n\to\infty} \sum_{R_j' \subset B} R_j' = \lim_{n\to\infty} \sum_{R_j \subset A} r^2 R_j = r^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{R_j \subset A} R_j = r^2 A.$$

Portanto, $\dfrac{B}{A} = r^2$. □

De posse desse teorema apresentamos e demonstramos o Teorema de Pólya.

Teorema 2 (Teorema de Pólya)**.** *Sejam A, B e C figuras semelhantes construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa a e os catetos b e c de um triângulo retângulo, então a área de A é a soma das áreas de B e C, ou seja, $A = B + C$.*

Demonstração.

Denotaremos por A, B e C as áreas das figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa a e os catetos, b e c, do triângulo retângulo (ver Figura 3) com as seguintes razões de semelhanças:

1. Entre B e A : $\dfrac{b}{a}$;
2. Entre C e A : $\dfrac{c}{a}$.

   Pelo Teorema 1, temos: $B + C = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 A + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 A = A\left(\dfrac{b^2 + c^2}{a^2}\right) = A$. Portanto $B + C = A$.

□

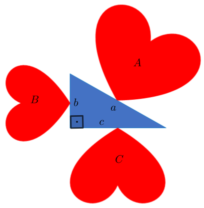
Note que, se A, B e C, forem quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo essa relação recai no Teorema de Pitágoras. Logo, o Teorema de Pólya é uma generalização do Teorema de Pitágoras.

A forma geométrica do Teorema de Pitágoras despertou nos alunos o gosto pela Geometria, principalmente no cálculo de áreas. Isso ficou comprovado na sequência didática que propusemos aos professores e aplicamos em nossa turma, que está no TCC (OLIVEIRA, 2023).

A geometrização de teoremas, no nosso caso os teoremas de Pitágoras e de Pólya, os tornam mais atrativos aos olhos dos estudantes. Pois, a Geometria dá um aspecto visual aos teoremas, possibilitando uma aprendizagem mais significativa. No nosso caso, os alunos ao lembrarem dos teoremas de Pitágoras e de Pólya terão em mente a imagem que os representam. Segundo eles mesmo relataram nos depoimentos que estão no TCC.

ISSN 2764-2631

Figura 3: Figuras semelhantes quaisquer construídas sobre os lados do triângulo retângulo.



Fonte: Os autores.

4. Conclusões

Concluímos que as formas geométricas dos teoremas de Pitágoras e de Pólya possibilitam uma aprendizagem mais significativa para os estudantes. Pois, a Geometria favorece a compreensão desses teoremas e desenvolve o pensamento dos estudantes, principalmente relacionado a áreas. Os estudantes passam a compreender que a fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ está relacionada a áreas e não é apenas a uma equação sem sentido envolvendo letras. Com a Geometria é possível trazer os teoremas para o mundo real, dando formas e visibilidades a esses teoremas.

A apresentação do Teorema de Pólya como uma generalização do Teorema de Pitágoras foi uma novidade no Ensino Básico e proporcionou aos estudantes uma noção mais geral do Teorema de Pitágoras.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2018. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/⟩. Acesso em: 09 jan 2023. Citado na página 1.

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2011. Citado na página 2.

LIMA, E. L. *Coordenadas no Plano*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 2.

LIMA, E. L. et al. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado na página 2.

MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A. da; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e geogebra. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, v. 8, n. 2, p. 62–77, 2019. Citado na página 2.

MORAIS FILHO, D. C. d. *Dez ou Onze Temas Interessantes de Matemática Elementar*. Campina Grande: EDUFCG, 2015. Citado na página 2.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado na página 2.

OLIVEIRA, I. M. S. *Geometrização do Teorema de Pitágoras e sua generalização como o Teorema de Pólya*. 2023. Disponível em: ⟨http://http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2023/09/Disserta%C3%A7%C3%A3o-vers%C3%A3o-final-Idalice.pdf⟩. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 3 e 4.