V Encontro Campinense do PROFMAT
27 de outubro de 2023
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

EXPRESSÕES DECIMAIS INFINITAS E A IMPORTÂNCIA DE CERTAS DEMONSTRAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho[1] - daniel@dme.ufcg.edu.br
Me. José Cláudio da Silva Teodista[2] - jclaudiost20@gmail.com

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil
[2]Secretaria de Estado de Educação, Ciência e Tecnologia-PB, Brasil

***Resumo**: Esse trabalho é um recorte da nossa dissertação de mestrado, a qual podem conferir em TEODISTA (2023). Nele iremos fazer uma discussão sobre a importância de se demonstrar em matemática, para que os resultados não pareçam que são tidos como verdadeiros, meramente pela observação de padrões. Veremos também o que Base Nacional Comum Curricular (BNCC), BRASIL (2018), sugere sobre a observação dos padrões e levantamento de conjecturas. Apresentaremos e demonstraremos alguns resultados sobre expressões decimais infinitas e sua abordagem no Ensino Básico, além disso, desincentivaremos o uso de métodos meramente memorizáveis, pois isso tira todo poder de criatividade do aluno.*
***Palavras-chave**: Importância das demonstrações; Expressões decimais; Ensino Básico*

1. Introdução

A palavra *demonstração*[1] ainda causa muito medo e insegurança em muitos professores de matemática, principalmente, naqueles do Ensino Básico. Provavelmente, esse medo tem origem na dificuldade de compreender o rigor das demonstrações e ainda torná-las inteligíveis aos alunos. Sem contar que, no Ensino Fundamental e Médio, devido a enorme ementa de conteúdos, muitas vezes o professor não tem tempo de parar um pouco para refletir sobre o porquê da validade dos resultados, quase sempre apresentando fórmulas prontas, que mais se assemelham a receitas de bolo.

Mas essas dificuldades não podem se tornar uma barreira para aquilo que é essencial na matemática. LIMA (2001) lamenta que a maioria dos alunos brasileiros saiam do Ensino Básico sem sequer terem visto uma única demonstração, mesmo depois de onze anos de matemática no currículo. Evidentemente, nem todas as demonstrações são pertinentes de serem feitas para os alunos do Ensino Fundamental e Médio. Cabe o professor selecioná-las de acordo com seus educandos. Vejamos o que o professor Elon Lages Lima diz sobre o assunto:

> A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade. Por este motivo, não se deve demonstrar o que é intuitivamente evidente, o que todos aceitam sem hesitação. (Exemplo: uma reta tem no máximo dois pontos em comum com uma circunferência dada.) Se demonstrar é uma forma de convencer por meio da razão, para que perder tempo provando algo do qual todos já estão convencidos? Também não se devem provar resultados que, embora não sejam de forma alguma óbvios, necessitam, para serem demonstrados, de argumentos técnicos e difíceis, fora do alcance dos alunos, como o Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual todo polinômio de grau n possui n raízes complexas. Por outro lado, certos fatos matemáticos importantes não são intuitivamente evidentes mas possuem demonstrações fáceis e elegantes. Sem dúvidas, o exemplo mais conhecido é o Teorema de Pitágoras, do qual devem ser dadas pelo menos duas das inúmeras demonstrações conhecidas. (LIMA, 2001, p. 155-156)

A ausência das demonstrações podem causar no aluno a falsa ideia de que os resultados matemáticos são estabelecidos por meio de meras observações de padrões ou mesmo da autoridade peremptória do professor. Mas sabemos que a observação dos padrões servem apenas para formulação de conjecturas, para se tornarem verdades matemáticas os resultados precisam ser demonstrados com todo rigor da lógica matemática.

> Como já dissemos, é preciso ir além do ato de observar e aceitar que certos fatos valem, é preciso demonstrá-los para acreditarmos neles. Isso faz a matemática diferente de outras ciências, como

[1]Para estudar técnicas de demonstração sugerimos a leitura de FILHO (2016).

> Química, Biologia ou Economia, cujos resultados são geralmente estabelecidos e aceitos por meio da observação, experimentação e da análise de dados. (FILHO, 2016, p.146)

A BNCC também menciona a importância das conjeturas e suas respectivas demonstrações, como aponta a competência 5 de matemática:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 532)

Neste trabalho demonstraremos certos resultados ligados às expressões decimais que muitas vezes são ensinados por meio de métodos totalmente memorizáveis, tirando toda criatividade do aluno, como por exemplo, o método da obtenção da fração geratriz. Com isso pretendemos propor uma abordagem que seja muito mais significativa ao aluno, uma vez que ela possa compreender o porquê das coisas, fazendo conexões com outros conteúdos da matemática. Para mais detalhes, consultem nossa dissertação de mestrado TEODISTA (2023).

1.1 Objetivo geral

O objetivo geral desse trabalho é apresentar uma reflexão sobre a importância de se justificar ou demonstrar os resultados matemáticos abordados no Ensino Básico, com foco nas expressões decimais e nas frações geratrizes.

1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar um método sem memorização para obtenção de fração geratriz de uma expressão decimal finita, ou infinita e periódica;
- Justificar o porquê de quando se divide dois inteiros, como denominador diferente de zero, resulta sempre em uma expressão decimal finita ou infinita e periódica;
- Apresentar as condições para que a divisão de dois inteiros resulte em uma expressão decimal finita;

2. Metodologia

Faremos uma revisão bibliográfica e em artigos científicos a fim de fundamentarmos nossa pesquisa em autores renomados. Apresentaremos algumas demonstrações a respeitos das frações geratrizes e expressões decimais, mas precedidas de exemplos particulares para melhor compreensão dos leitores, só depois apresentarmos os resultados generalizados e suas respectivas demonstrações.

3. Resultado e discussão

Provavelmente, o leitor já se deparou com algum método meramente memorizável para obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica, pois é algo muito comum em sites da internet e até mesmo livros didáticos. Vejamos um método, que mais se parece uma receita de bolo:

A fração geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período.

Como exemplo, podemos elencar,

a) $0,77777\cdots = \dfrac{7}{9}$. b) $0,353535\cdots = \dfrac{35}{99}$

Há também um método meramente memorizável para obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica composta, ou seja, aquela que depois da vírgula há uma parte que não se repete seguida que uma parte periódica.

A fração geratriz de uma dízima periódica composta é uma fração cujo numerador é igual à parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica e cujo denominador é formado por tantos noves *quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica após a vírgula.*

Como exemplos, podemos apresentar

a) $0,12345345345\cdots = \dfrac{12345-12}{99900} = \dfrac{12333}{99900}$.   b) $13,4232323\cdots = \dfrac{13423-134}{990} = \dfrac{13289}{990}$.

Estudar matemática assim, por meio de receitas, é como fazer um bolo, mas com a diferença de não poder saboreá-lo ao final. Isso torna a aprendizagem desinteressante e tira toda parte criativa. A seguir vamos apresentar métodos muitos mais eficazes e que tornam a aprendizagem muito mais significativa.

Vamos determinar a fração geratriz de $0,353535\cdots$, mas sem usar fórmula memorizada. Seja,

$$x = 0,353535\cdots. \tag{1}$$

Vamos multiplicar a equação 1 por 100, pois trata-se de uma dízima periódica simples, de período contendo duas casas decimais, nesses casos multiplicamos sempre por 10^n, onde n é o número de casas decimais do período. Daí, teremos

$$100x = 35,353535\cdots \Rightarrow 90x = 35 \Rightarrow x = \frac{35}{90}.$$

De modo análogo procedemos quando se trata de uma dízima periódica composta. Vamos determinar a fração geratriz de $13,4232323\cdots$. Seja,

$$x = 13,4232323\cdots.$$

Daí, vamos multiplicar por 10, pois tem uma casa decimal não periódica após a vírgula, depois por 100, pois o período tem duas casas demais.

$$10x = 134,232323\cdots \Rightarrow 1000x = 13423,232323\cdots \Rightarrow 990x = 13289 \Rightarrow x = \frac{13289}{990}.$$

Obtivemos os mesmos resultados daqueles feitos por meio do método memorizável, mas conseguirmos compreender o porquê, além de termos feitos conexões com o assunto de equações de primeiro grau. No que se segue, vamos generalizar esse resultado, por meio de um teorema.

Teorema 1. *Um número é racional se, e somente se, tem uma representação decimal finita ou infinita e periódica.*

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que o número seja racional, daí ele pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$.

Sem perda de generalidade, podemos tomar $a > 0$ e $b > 0$, pois os casos em que $a < 0$ e $b < 0$, $a < 0$ e $b > 0$ e $a > 0$ e $b < 0$ são análogos e o caso em que $a = 0$ é trivial. Pelo Teorema da Divisão de Euclides (TDE), o qual podemos conferir em VIEIRA (2020), existem dois únicos números inteiros q e r tais que $a = bq + r_0,\ \ 0 \leq r_0 < b$.

Se $r_0 = 0$, então $\frac{a}{b} = q$, que é um número inteiro e possui uma representação decimal finita.

Se $r_0 \neq 0$, então, pelo TDE, existem únicos q_1 *e* r_1 inteiros tais que, $10r_0 = bq_1 + r_1,\ \ 0 \leq r_1 < b$.

Se $r_1 = 0$, então $\frac{a}{b} = q,q_1$, que possui representação decimal finita.

Se $r_1 = r_0$, então $\frac{a}{b} = q,q_1q_1q_1\cdots$, que é uma dízima periódica de período q_1.

Se $r_i \neq 0,\ r_i \neq r_j,\ i \neq j,\ i$ e $j \in \{0,1\}$ então pelo TDE, existem únicos q_2 e r_2 inteiros tais que, $10r_1 = bq_2 + r_2,\ \ 0 \leq r_2 < b$.

Se $r_2 = 0$, então $\frac{a}{b} = q,q_1q_2$, que possui representação decimal finita.

Se $r_2 = r_1$, então $\frac{a}{b} = q,q_1q_2q_2q_2\cdots$, que é um dizima periódica composta de período q_2.

Se $r_2 = r_0$, então $\frac{a}{b} = q,q_1q_2q_1q_2\cdots$, que é uma dízima periódica de período q_1q_2.

Se $r_i \neq 0,\ r_i \neq r_j,\ i \neq j,\ i$ e $j \in \{0,1,2\}$ então, pelo TDE, existem únicos q_3 e r_3 inteiros tais que, $10r_2 = bq_3 + r_3,\ \ 0 \leq r_3 < b$. Se $r_3 = 0$, então $\frac{a}{b} = q,q_1q_2q_3$, que possui representação decimal finita.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Se $r_3 = r_2$, então $\dfrac{a}{b} = q_1q_2q_3q_3q_3\cdots$, que é uma dízima periódica composta de período q_3.
Se $r_3 = r_1$, então $\dfrac{a}{b} = q, q_1q_2q_3q_2q_3\cdots$, que é uma dízima periódica composta de período q_2q_3.
Se $r_3 = r_0$, então $\dfrac{a}{b} = q, q_1q_2q_3q_1q_2q_3\cdots$, que é uma dízima periódica de período $q_1q_2q_3$.

$\vdots$

E assim por diante: se $r_i \neq 0$, $r_i \neq r_j$, $i \neq j$, i e $j \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, n-1\}$, então, pelo TDE, existem únicos b_q e r_q inteiros tais que

$$10r_{b-1} = bq_b + r_b, \qquad 0 \leq r_b < b.$$

Mas, note que existem apenas b possíveis restos distintos, pois $r_i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ b-1\}$, assim pelo princípio das gavetas de Dirichlet, que podemos conferir em MORGADO (1991), r_b deve ser igual a algum r_{j_o} e, portanto,

$$\frac{a}{b} = q, q_1q_2q_3\cdots q_{j\,0}q_{j_0+1}q_{j_0+2}\cdots q_bq_{j_0+1}q_{j_0+2}\cdots q_b\cdots$$

que é uma dízima periódica de período $q_{j_0+1}q_{j_0+2}\cdots q_b$.

Reciprocamente, suponhamos que o número a tem uma representação decimal finita ou infinita periódica. Ou seja,

$$a = a_0, a_1a_2\cdots a_n \quad \text{ou} \quad a = a_0, b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots$$

com $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 9\}$ e $b_1, b_2, \cdots, b_k \in \{0,\ 1,\ 2, \ldots, 9\}$.

No caso em que $a = a_0, a_1a_2\cdots a_n$, isto é, um número decimal finito, basta fazer

$$a = a_0, a_1a_2\cdots a_n = \frac{a_0a_1a_2\cdots a_n}{10^n},$$

como $a_0a_1a_2\cdots a_n \in \mathbb{Z}$ e $10^n \in \mathbb{Z}$, concluímos que a é um número racional.

No caso em que a é uma dízima periódica, isto é, $a = a_0, b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots$, temos

$$\begin{aligned}
a &= a_0, b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots \\
\Leftrightarrow 10^sa &= a_0b_1b_2\cdots b_s, a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots \\
\Leftrightarrow 10^{s+k}a &= a_0b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_k, a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots \\
10^{s+k}a - 10^sa &= a_0b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_k, a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots - a_0b_1b_2\cdots b_s, a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots \\
\Leftrightarrow 10^{s+k}a - 10^sa &= a_0b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_k - a_0b_1b_2\cdots b_s \\
\Leftrightarrow a\left(10^{s+k} - 10^s\right) &= a_0b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_k - a_0b_1b_2\cdots b_s \Leftrightarrow a = \frac{a_0b_1b_2\cdots b_sa_1a_2\cdots a_k - a_0b_1b_2\cdots b_s}{10^{s+k} - 10^s}.
\end{aligned}$$

□

Note que essa expressão deduzida condiz exatamente com aquele método meramente memorizável que apresentamos anteriormente, pois $a_0b_1b_2b_3\cdots b_s$ é a parte não periódica e $a_1a_2a_3\cdots a_k$ é a parte periódica. No denominador temos $10^{s+k} - 10^s$ que é um número formado por k noves seguido de s zeros. É claro que essa demonstração no caso geral nem sempre vai ser compreensível pelos alunos, mas os casos particulares podem ser perfeitamente abordados em turmas de Ensino Fundamental e Médio.

Diante desse Teorema 1 o aluno pode dar exemplos de diversos números irracionais em sua forma decimal. Basta que sua expressão decimal seja infinita e não periódica. Um bom exemplo é o número

$$1,101001000100001000001\cdots,$$

que está provado em TEODISTA (2023) que não é periódico, logo, irracional.

Quando dividimos dois inteiros a e b, $b \neq 0$, obtemos um número decimal finito ou um número decimal infinito e periódico. No teorema a seguir apresentaremos e demonstraremos condições necessárias e suficientes, para que ocorra cada caso. Sugerimos a leitura de LIMA (2016), seções 14.6, 14.7 e 14.8 para saber mais.

Teorema 2. *Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $mdc(a,b) = 1$, dessa forma o número racional $\frac{a}{b}$ tem representação decimal finita se, e somente se, os únicos fatores primos na decomposição de b são 2 ou 5.*

Demonstração. Suponhamos que b não tenha fatores primos diferentes de 2 e de 5 em sua decomposição. Logo, podemos escrever $b = 2^n \cdot 5^m, \ \ m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sem perda de generalidade podemos supor $n \geq m$. Daí,

$$\frac{a}{b} \ = \ \frac{a}{2^n \cdot 5^m} = \frac{a}{2^m \cdot 5^m \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 5^{n-m}}{(2 \cdot 5)^m \cdot 5^{n-m} \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 5^{n-m}}{10^m \cdot 10^{n-m}} = \frac{a \cdot 5^{n-m}}{10^n}.$$

Note que, $a \cdot 5^{n-m}$ é um número inteiro, visto que a é inteiro e 5^{n-m} também o é, pois $n \geq m$. Trata-se, portanto, de uma fração decimal, cuja representação decimal é finita.

Reciprocamente, suponhamos que $\frac{a}{b}$ tenha uma representação decimal finita, isto é, $\frac{a}{b} = a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$, $a_n \neq 0$, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1 a_2 \cdots a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ora,

$$\frac{a}{b} = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}{10^n} = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}{2^n \cdot 5^n}.$$

Como $a_n \neq 0$, então $mdc(a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n, 10^n) = 1$, donde concluímos que os únicos fatores primos na decomposição de b são 2 ou 5, pois $b = 2^n \cdot 5^n$. □

Com esse Teorema 2 o aluno pode, de maneira fácil, decidir se uma fração resulta em uma expressão decimal finita ou não. Vejamos alguns exemplos:

(a) $\frac{3}{14}$. Veja que $14 = 2 \cdot 7$, como apareceu o fator 7 em sua decomposição, então sua expressão decimal é infinita.

(b) $\frac{3}{500000}$. Note que $\frac{3}{500000} = \frac{3}{2^5 \cdot 5^6}$, que só possui 2 e 5 da decomposição de seu denominador. Logo, é um decimal finito.

4. Conclusões

Explicar os resultados e demonstrá-los são imprescindíveis na matemática. Quando os métodos se baseiam apenas na memorização estão deixando de lado uma excelente oportunidade de tornar a aprendizagem significa e atraente. Aprender não é memorizar fórmulas, mas sim refletir sobre os resultados obtidos, compreendendo suas origens e aplicações. De posse do Teorema 1 os alunos podem apresentar diversos exemplos de números irracionais fugindo daqueles tradicionais (π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ϕ, e, etc). E, de posse do Teorema 2, dada uma fração, eles podem decidir se sua expansão decimal é finita ou infinita e periódica sem precisar efetuar a divisão.

Referências

BRASIL. *Base Comum Curricular*. 2018. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf⟩. Acesso em: 04 jan 2023. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

FILHO, D. C. d. M. *Um Convite à Matemática: com técnicas de demonstrações e notas históricas*. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

LIMA, E. L. *Matemática e Ensino*. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2001. Citado na página 1.

LIMA, E. L. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2016. Citado na página 4.

MORGADO, A. C. d. O. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro-RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. Citado na página 4.

TEODISTA, J. C. d. S. *Uma apresentação da construção dos números reais usando sequência de Cauchy para os professores do Ensino Básico*. 2023. Disponível em: ⟨http://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2023/08/TCC_PROFMAT_Jose_Claudio_da_Silva_Teodista__2_.pdf⟩. Acesso em: 05 out 2023. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 4.

VIEIRA, V. L. *Um Curso Básico em Teoria dos Números*. São Paulo-SP: Editora Livraria da Física, 2020. Citado na página 3.