V Encontro Campinense do PROFMAT
27 de outubro de 2023
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

SISTEMAS HOMOGÊNEOS DE RELAÇÕES DE RECORRÊNCIAS LINEARES COM RAÍZES COMPLEXAS EM DUAS DIMENSÕES

Wellington Rodrigues Faustino[1] - wellboyrf@hotmail.com
Luiz Antônio da Silva Medeiros[1] - luiz.silva@professor.ufcg.edu.br

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste trabalho estabelecemos as soluções gerais dos sistemas homogêneos de relações de recorrências lineares de primeira ordem para o caso bidimensional quando a matriz dos coefientes do sistema é real e tem autovalores complexos. Ademais, apresentamos o uso dessa ferramenta para resolver problemas práticos,*
Palavras-chave*: Autovalores Complexos; Recorrências Lineares; Sistemas Homogêneos*

1. Introdução

Relações de Recorrências lineares constitui uma classe de problemas extremamente comuns em análise combinatória. A teoria dos sistemas homogêneos de relações de recorrências lineares de primeira ordem com duas dimensões e três dimensões, com autovalores reais, foi tratada em Faustino e Medeiros (2022). Esse trabalho dá uma contribuição à pesquisa realizada supracitada no sentido que estendemos os resultados para o caso complexo, apresentando a solução geral do problema bidimensional como combinação linear de duas recorrências de coeficientes reais, além de apresentar um exemplo interessante para exemplificar a teoria.

2. Resultados

Seja $A = [a_{i,j}]_{2\times 2}$ uma matriz real de ordem 2. Considere as sequências $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais. No que segue, vamos adotar a seguinte convenção $x_k(n) := x_n^k$ para representar o n-ésimo termo da sequência $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}, k = 1, 2$ e para $X_n = (x_1(n), x_2(n))'$ o vetor coluna cuja k-ésima entrada é o n-ésimo termo da sequência x^k. O apóstrofe simboliza a operação transposta.

Um sistema homogêneo de relações de recorrências lineares de $1^{\underline{a}}$ ordem na variáveis $x_1(n), x_2(n)$ é um sistema na forma

$$\begin{cases} x_1(n+1) &= a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) \\ x_2(n+1) &= a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) \end{cases}$$

ou equivalentemente, na sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix}$$

ou simplesmente,

$$X_{n+1} = A \cdot X_n. \tag{1}$$

Observe inicialmente que se A tem um autovalor (real ou complexo) λ com autovetor associado $\mathbf{u}$, isto é $A \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u}, \ \ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, então

$$X_n = C \cdot \lambda^{n-1} \cdot \mathbf{u}, \ \ n \geq 1$$

é uma solução de (1). Para o caso em que a matriz dos coeficientes do sistema A é real e só possui raízes reais, a solução geral de (1) já foi estabelecida em Faustino e Medeiros (2022). No que segue, vamos considerar que a matriz real A admita algum autovalor complexo. Antes de apresentar a solução, necessitaremos estabelecer alguns resultados preliminares.

Teorema 1. *Seja $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ uma matriz real e $Y_n = H_n + i \cdot B_n$ uma solução complexa do sistema de relações de recorrências (1), com H_n e B_n sequências vetoriais reais. Então, H_n e B_n, $\ n \in \mathbb{N}$ são soluções reais de (1).*

ISSN 2764-2631

Demonstração.
Basta observar que:

$$X_{n+1} = A \cdot X_n \quad \Leftrightarrow \quad H_{n+1} + i \cdot B_{n+1} = A \cdot H_n + i(A \cdot B_n) \Leftrightarrow \begin{cases} H_{n+1} = A \cdot H_n \\ B_{n+1} = A \cdot B_n \end{cases}$$

o que prova o Teorema. ∎

Teorema 2. *Seja $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ uma matriz real, $\lambda = a + ib$ um autovalor de A com $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}$ sendo o autovetor associado à λ, então $\overline{\lambda} = a - i \cdot b$ também é autovalor de A com $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{u} - i \cdot \mathbf{v}$ sendo o autovetor associado à $\overline{\lambda}$.*

Demonstração.
Desde que A é uma matriz de entradas reais, temos que $\overline{A} = A$. Portanto,

$$A \cdot \mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \overline{A \cdot \mathbf{w}} = \overline{\lambda \cdot \mathbf{w}} \Rightarrow \overline{A} \cdot \overline{\mathbf{w}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\mathbf{w}} \Rightarrow A \cdot \overline{\mathbf{w}} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\mathbf{w}}$$

provando o Teorema. ∎

Teorema 3. *Seja $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ uma matriz real, $\lambda = a + ib$ um autovalor de A com $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}$ sendo o autovetor associado à λ, então*

$$X_n^1 = \lambda^{n-1} \cdot \mathbf{w} \quad e \quad X_n^2 = \overline{\lambda}^{n-1} \cdot \overline{\mathbf{w}} \tag{2}$$

são ambas soluções complexas de (1).

Demonstração.
Com efeito,

$$A \cdot X_n^1 \quad = \quad A \cdot \left(\lambda^{(n-1)} \cdot \mathbf{w}\right) = \lambda^{(n-1)} \cdot (A \cdot \mathbf{w}) = \lambda^{(n-1)} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{w}) = \lambda^n \cdot \mathbf{w} = X_{n+1}^1.$$

Portanto, X_n^1, $n \in \mathbb{N}$ é uma solução de (1). Pelo Teorema 2, segue que $\overline{\lambda}$ também é autovalor de A com autovetor associado $\overline{\mathbf{w}}$ e pela primeira parte desta demonstração segue que X_n^2 também é solução de (1). ∎

Teorema 4. *Se X_n^1 e X_n^2 são ambas soluções do sistema (1) então,*

$$X_n = C_1 \cdot X_n^1 + C_2 \cdot X_n^2,$$

com C_1, C_2 constantes reais, também é solução de (1).

Demonstração.
Sejam C_1, C_2 constantes. Considere $Z_n = C_1 \cdot X_n^1 \cdot + C_2 \cdot X_n^2$. Tem-se:

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= C_1 \cdot X_{n+1}^1 + C_2 \cdot X_{n+1}^2 = C_1 \cdot \left(A \cdot X_n^1\right) + C_2 \cdot \left(A \cdot X_n^2\right) \\ &= A\left(C_1 \cdot X_n^1 + C_2 \cdot X_n^2\right) = A \cdot Z_n, \end{aligned}$$

o que prova a asserção. ∎

Teorema 5. *Se $\rho \cdot [cos(\theta) + isen(\theta)]$ é a forma polar do autovalor $\lambda = a + i \cdot b$ de A com $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}$ sendo um autovetor associado, então*

$$\xi_n = C_1 \cdot \xi_n^1 + C_2 \cdot \xi_n^2,$$

é uma solução de (1), onde C_1, C_2 são constante reais e ξ_n^1 e ξ_n^2 são recorrências reais definidas por

$$\xi_n^1 = \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{u} \cdot cos[(n-1) \cdot \theta] - \mathbf{v} \cdot sen[(n-1) \cdot \theta]\} \tag{3}$$

e

$$\xi_n^2 = \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{v} \cdot cos[(n-1) \cdot \theta] + \mathbf{v} \cdot sen[(n-1) \cdot \theta]\}. \tag{4}$$

ISSN 2764-2631

Demonstração.
Com efeito, pelo Teorema 3, tem-se que $\xi_n = \lambda^{n-1} \cdot \mathbf{w}$ é uma solução de (1). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \xi_n &= \lambda^{n-1} \cdot \mathbf{w} = (a + i \cdot b)^{n-1} \cdot (\mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}) = \{\rho \cdot [cos(\theta) + isen(\theta)]\}^{n-1} \cdot (\mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}) \\ &= \rho^{n-1} \cdot \{cos[(n-1)\theta] + isen[(n-1)\theta)]\} \cdot (\mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}) \\ &= \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{u} \cdot cos[(n-1)\theta] - \mathbf{v} \cdot sen[(n-1)\theta]\} + i \cdot \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{v} \cdot cos[(n-1)\theta] + \mathbf{u} \cdot sen[(n-1)\theta]\}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1 segue que

$$\xi_n^1 = \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{u} \cdot cos[(n-1) \cdot \theta] - \mathbf{v} \cdot sen[(n-1) \cdot \theta]\}$$

e

$$\xi_n^2 = \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{v} \cdot cos[(n-1) \cdot \theta] + \mathbf{v} \cdot sen[(n-1) \cdot \theta]\}$$

são ambas soluções reais de (1). O resultado segue do Teorema 4 ■

Teorema 6. *Seja $A = [a_{ij}]_{2\times2}$ uma matriz real, $\lambda = a+ib$, $b \neq 0$ um autovalor complexo de A com $\mathbf{w} = \mathbf{u}+i\cdot\mathbf{v}$ sendo o autovetor associado à λ, então o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é linearmente independente.*

Demonstração.
Do Teorema 2, $\overline{\lambda} = a - ib$ também é autovalor de A com $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{u} - i \cdot \mathbf{v}$ sendo o autovetor associado à $\overline{\lambda}$. Assim,

$$A \cdot \mathbf{w} = \lambda \cdot \mathbf{w} \quad \Leftrightarrow \quad A \cdot (\mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}) = (a + i \cdot b) \cdot (\mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}).$$

Comparando as partes reais e as partes imaginárias de cada lado na última igualdade, obtemos

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{u} &= a \cdot \mathbf{u} - b \cdot \mathbf{v} \\ A \cdot \mathbf{v} &= a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{5}$$

Se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ fosse linearmente dependente, existiria um escalar real t tal que $\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{u}$ ou $\mathbf{u} = t \cdot \mathbf{v}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{v} = t \cdot \mathbf{u}$. Então, de (5), tem-se

$$A \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} - b \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{u} - b \cdot (t \cdot \mathbf{u}) = (a - bt) \cdot \mathbf{u}$$

e

$$A \cdot \mathbf{v} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{u} = a(t \cdot \cdot \mathbf{u}) + b \cdot \mathbf{u} = (at + b) \cdot \mathbf{u}.$$

Consequentemente,

$$t \cdot (a - b \cdot t) \cdot \mathbf{u} = t \cdot (A \cdot \mathbf{u}) = A \cdot (t \cdot \mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{v} = (at + b) \cdot \mathbf{u},$$

que implica,

$$-b \cdot \left(t^2 + 1\right) \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Como $b \neq 0$ e $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v} = (1 + i) \cdot \mathbf{u}$ é autovetor, portanto, não nulo, resta que $t^2 + 1 = 0$, um absurdo! ■

O próximo resultado mostra que a expressão dada em (6) é a solução geral do sistema (1) quando as raízes são complexas conjugadas, no sentido de que qualquer outra solução **real** do sistema (1) é combinação linear das funções vetoriais ξ_n^1, ξ_n^2 definidas em (3) e (4).

Teorema 7. *Considere o sistema (1). Seja $\rho \cdot [cos(\theta) + isen(\theta)]$ a forma polar do autovalor $\lambda = a + i \cdot b$ de A com $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i \cdot \mathbf{v}$ sendo um autovetor associado, então qualquer outra solução real Y_n de (1) é da forma*

$$C_1 \cdot \xi_n^1 + C_2 \cdot \xi_n^2, \tag{6}$$

Demonstração.
Seja Y_n um solução qualquer de (1). Peo Teorema 5,

$$\xi_n^1 = \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{u} \cdot cos[(n-1) \cdot \theta] - \mathbf{v} \cdot sen[(n-1) \cdot \theta]\}$$

e

$$\xi_n^2 = \rho^{n-1} \cdot \{\mathbf{v} \cdot cos[(n-1) \cdot \theta] + \mathbf{v} \cdot sen[(n-1) \cdot \theta]\}.$$

são ambas soluções reais de (1). Agora, defina a seguinte relação de recorrências:

$$\mathcal{Z}_n = Y_n - \overline{C}_1 \cdot \xi_n^1 - \overline{C}_2 \cdot \xi_n^2,$$

onde $\overline{C}_1, \overline{C}_2$ são constantes escolhidas sendo soluções do sistema

$$\overline{C}_1 \cdot \mathbf{u} + \overline{C}_2 \cdot \mathbf{v} = Y_1.$$

Observe que tal sistema tem solução única uma vez que, pelo Teorema 6, o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é linearmente independente e estamos operando no espaço bidimensional. Além disso, $\mathcal{Z}_n$ é claramente solução de (1). Por outro lado, em decorrência das escolhas das constantes $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$, temos

$$\mathcal{Z}_1 = Y_1 - \overline{C}_1 \cdot \xi_1^1 - \overline{C}_2 \cdot \xi_1^2 = 0.$$

Dado que $\mathcal{Z}_{n+1} = A \cdot \mathcal{Z}_n, n \geq 1$, é fácil ver pelo Princípio de Indução Finita que $\mathcal{Z}_n \equiv 0$. Logo,

$$Y_n = \overline{C}_1 \cdot \xi_n^1 + \overline{C}_2 \cdot \xi_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

3. Aplicação

Nesta Seção, apresentamos um problema interessante envolvendo equações com soluções inteiras que podem ser resolvidom com sistemas homogêneos de relações de recorrências lineares cuja matriz dos coeficientes possuem autovalores complexos.

Exemplo. (SAMC-2015-ADAPTADA) Seja k um número inteiro positivo. Prove que, para cada k natural, existem inteiros x, y (que dependem de k) tais que $x^2 + 6y^2 = 7^k$.

Solução: Inicialmente, considere a sequências $(x_k)_{k\geq 1}$ e $(y_k)_{k\geq 1}$, definidas recursivamente por $x_1 = y_1 = 1$ e

$$\begin{cases} x_{k+1} &= x_k - 6y_k \\ y_{k+1} &= x_k + y_k \end{cases} \quad \forall\, k \geq 1.$$

Note que:

(i) O par (x_1, y_1) é solução de $x^2 + 6 \cdot y^2 = 7^1$.

(ii) Suponha que (x_k, y_k) é solução de $x^2 + 6y^2 = 7^k$, então

$$x_{k+1}^2 + 6y_{k+1}^2 = (x_k - 6y_k)^2 + 6(x_k + y_k)^2 = 7 \cdot (x_k^2 + 6y_k^2) = 7 \cdot 7^k = 7^{k+1}.$$

Pelo Princípio de Indução Finita, isso mostra que, para cada k natural, os pares (x_k, y_k) são soluções inteiras da equação $x^2 + 6y^2 = 7^k$. Agora, vamos exibir as expressões de x_k e y_k explicitamente. Para isto note que. $\lambda = 1 \pm i\sqrt{6}$ são os autovalores da matriz dos coeficientes do sistema Ademais, o autovetor de A associado ao autovalore $\lambda = 1 + i\sqrt{6}$ é da forma

ISSN 2764-2631

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6}\cdot i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 6, se θ é o argumento principal de $1 + i\sqrt{6}$, a solução geral do sistema de recorrência acima é dada por

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = C_1 \cdot (\sqrt{7})^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{6}sen((n-1)\theta) \\ cos((n-1)\theta) \end{bmatrix} + C_2 \cdot (\sqrt{7})^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{6}cos((n-1)\theta) \\ sen((n-1)\theta) \end{bmatrix}$$

Das condições iniciais $x_1 = y_1 = 1$, resulta que $C_1 = 1$ e $C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. E, após algumas manipulações trigonométricas, concluimos que

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{7})^n cos(n\cdot\theta) \\ \dfrac{(\sqrt{7})^n}{\sqrt{6}} sen(n\cdot\theta) \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$x_k = (\sqrt{7})^k cos(k\cdot\theta) \ \text{ e } \ y_k = \frac{(\sqrt{7})^k}{\sqrt{6}} sen(k\cdot\theta), \quad k \geq 1.$$

Cabe aqui uma observação: apesar das expressões acima serem bem estranhas, elas realmente definem números inteiros no caso em que θ é o argumento principal do número complexo $1 + i\sqrt{6}$. Não é uma tarefa fácil, mas deixaremos a cargo do leitor a verificação dessa observação. **Esse problema pode ser encontrado em** Andrica e Bagdasar (2020).

4. Conclusões

Apresentamos no texto uma análise completa dos sistemas homogêneos de recorrências lineares de primeira ordem com duas e três variáveis com coeficientes reais e autovalores complexos. A técnica aplicada é a mesma para sistema de equações lineares com o uso da teoria das recorrências lineares de primeira ordem. Os resultados completam o trabalho de Faustino e Medeiros (2022) e sugerem, de modo natural, que os resultados obtidos podem ser generalizados para dimensões mais altas.

Agradecimentos

Agradecemos a Sociedade Brasileira de Matemática por oportunizar a realização do Mestrado Profissional em Matemática, à CAPES pelo suporte financeiro e a todo o corpo docente do PROFMAT\UFCG pela dedicação e zelo por conduzir esse projeto essencial à formação e qualificação dos profissionais de educação em Matemática.

Referências

ANDRICA, D.; BAGDASAR, O. *RECURRENT SEQUENCES: Key Results, Applications, and Problems.* Switzerland: Springer, 2020. Citado na página 5.

FAUSTINO, W. R.; MEDEIROS, L. A. S. Sistemas de recorrências lineares homogêneos de primeira ordem com duas e três incógnitas. Anais do ECP, Campina Grande, 2022. Disponível em: ⟨http://mat.ufcg.edu.br/encontrocampinenseprofmat/wp-content/uploads/sites/24/2022/10/Trabalho-07.pdf⟩. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 5.