VI Encontro Campinense do PROFMAT
18 de outubro de 2024
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

O TEOREMA DE PTOLOMEU, DEMONSTRAÇÃO E APLICAÇÕES

Me. Antônia Fabrícia de Souza[1] - prof.antoniafab@gmail.com
Dr. José de Arimatéia Fernandes[1] - arimat.ufcg@gmail.com

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste trabalho exploramos o Teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis, que é pouco conhecido no Ensino Médio, apesar de ser relevante na Geometria Plana. Apresentamos uma demonstração para esse teorema, aplicações que revelam sua importância na compreensão de resultados conhecidos e outros menos explorados. O Teorema de Ptolomeu, relacionando lados e diagonais de quadriláteros inscritíveis, é discutido em conjunto com suas aplicações em Geometria e Trigonometria, é de grande utilidade na resolução de problemas geométricos simples ou complexos. Além disso, é destacada a utilização do software Geogebra para visualizar e compreender conceitos geométricos, com construções detalhadas. O objetivo geral é apresentar, demonstrar e incentivar o uso do Teorema de Ptolomeu, bem como inspirar uma apreciação renovada pela beleza e utilidade da geometria no ensino básico.*
Palavras-chave*: Teorema de Ptolomeu; Ensino Médio; Demonstrações matemáticas; Aplicações.*

1. Introdução

Este resumo estendido é um recorte do nosso trabalho de Dissertação, de título “OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES”, Souza (2024), o qual foi defendido em junho deste mesmo ano como trabalho final de curso para conclusão do mestrado Profmat. Os teoremas clássicos de Ptolomeu e Menelaus têm sido pouco explorados no Ensino Médio, por serem pouco conhecidos por professores da educação básica, como também por não fazerem parte do currículo, mesmo tendo aplicações em muitos resultados conhecidos da Geometria Plana. Neste trabalho, exploramos além da demonstração, algumas aplicações interessantes do Teorema de Ptolomeu para demonstrar alguns resultados da Geometria Plana.

O Teorema de Ptolomeu, atribuído ao matemático grego Cláudio Ptolomeu, é uma ferramenta que nos fornece uma importante relação entre os lados e diagonais de um quadrilátero inscritível. Suas aplicações envolvem conceitos fundamentais da geometria, como o famoso Teorema de Pitágoras, além de também podermos deduzir algumas identidades trigonométricas conhecidas, como as fórmulas de seno da soma e diferença de dois ângulos, e demonstrar outros teoremas que trazem relações métricas em um quadrilátero inscritível.

Esperamos que a pesquisa desenvolvida nesse trabalho possa mostrar ao leitor interessado no estudo da Geometria Plana, a nível de Ensino Médio, que alguns resultados, aparentemente, abstratos podem ter aplicações em resultados conhecidos e, nesse sentido, o leitor poderá ter uma compreensão que leve a desconstruir esse paradigma do abstrato como algo distante, inalcançável ou impraticável. É esperado também que este resumo não apenas enriqueça o conhecimento do leitor sobre o Teorema de Ptolomeu, mas que além disso sirva como incentivo para a propagação deste no ensino básico.

2. Metodologia

O método envolveu duas abordagens principais: demonstrações matemáticas e aplicações em teoremas geométricos. Selecionamos o Teorema de Ptolomeu pela sua relevância histórica e riqueza de aplicações na geometria. As demonstrações foram acompanhadas de outros teoremas e resultados relevantes. O software Geogebra foi usado nas construções das figuras, auxiliando visualizações e entendimento.

3. Resultado e discussão

Se $ABCD$ é um quadrilátero inscritível de diagonais AC e BD, então

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

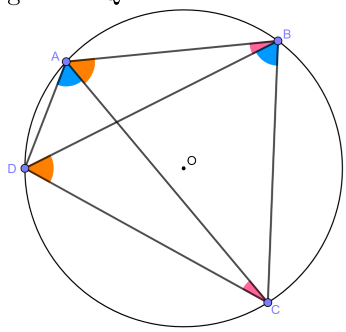
O enunciado acima se refere ao teorema, conhecido como, de Ptolomeu, apesar de que segundo Aaboe (2013) tenha sido descoberto muito antes de sua época, sendo o real propósito de Ptolomeu, em relação a este teorema, a possibilidade de aplicá-lo na construção da *Tabela de Cordas* presente na sua obra *Almagesto*. A seguir veremos a prova deste teorema por meio de semelhança de triângulos, vale ressaltar que existe outras diversas formas de demonstrar esse teorema, porém a prova por semelhança de triângulos é uma demostração que poderia ser exposta a alunos de Ensino Médio da Educação Básica, por esse motivo foi a escolhida para ser exposta.

3.1 Demonstração

Seja $ABCD$ um quadrilátero nas condições do enunciado como mostra a Figura 1.

Inicialmente observemos que,
(I) $\angle ABD = \angle ACD$ determinados pelo arco menor AD;
(II) $\angle BAC = \angle BDC$ determinados pelo arco menor BC;
(III) $\angle CAD = \angle CBD$ determinados pelo arco menor CD.

Figura 1: Quadrilátero inscritível



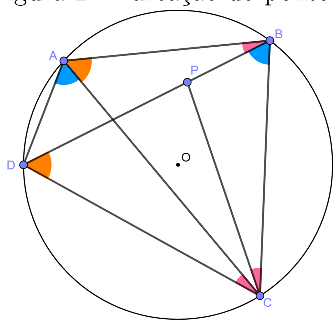
Fonte: Autora

Agora marcaremos o ponto P na diagonal BD de modo que,
(IV) $\angle BCP = \angle ACD$
(consequentemente de (I) $\angle BCP = \angle ABD$ também). Veja Figura 2.

Notemos que,
(V) $\angle ACB = \angle DCP$, pois

$$\angle ACB = \angle ACP + \angle PCB = \angle ACP + \angle ACD = \angle DCP.$$

Figura 2: Marcação do ponto P



Fonte: Autora

De (III) e (IV) temos a semelhança pelo caso AA dos triângulos ACD e BCP, segue-se que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BP} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}.$$

De (II) e (V) temos a semelhança dos triângulos ABC e DPC, também pelo caso AA, daí

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DP}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{DP} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}.$$

Somando ambos os membros das relações obtidas através das semelhanças que citamos anteriormente, obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AC} \cdot \overline{DP} &= \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \cdot (\overline{BP} + \overline{DP}) &= \overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{AB} \cdot \overline{CD} \\ \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

3.2 Aplicações

3.2.1 Teorema de Pitágoras

A conhecida relação de igualdade entre o quadrado da hipotenusa e a soma dos quadrados dos catetos, de um triângulo retângulo, que leva o nome de Pitágoras, pode ser tratado como um caso particular do Teorema de Ptolomeu aplicado a um retângulo.

Seja $ABCD$ um retângulo qualquer, sabemos que $ABCD$ é inscritível, pois

ISSN 2764-2631

$$\angle ABC + \angle ADC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

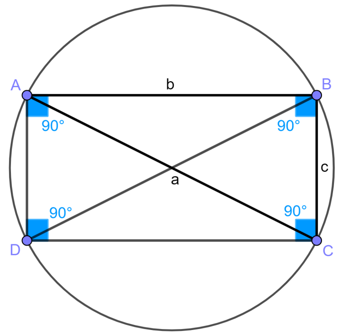
que é uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscritível. Proposição 3.39 de Muniz Neto (2013).

Consideremos, $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = c$ e a diagonal $\overline{AC} = a$, lembremos que em um retângulo os lados opostos têm a mesma medida e as diagonais também, dessa forma $\overline{AB} = \overline{CD} = b$, $\overline{BC} = \overline{AD} = c$ e $\overline{AC} = \overline{BD} = a$.

Agora aplicando o Teorema de Ptolomeu ao retângulo $ABCD$, obtemos:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC},$$
$$\Rightarrow a.a = b.b + c.c,$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2. \blacksquare$$

Figura 3: Retângulo inscrito



Fonte: Autora

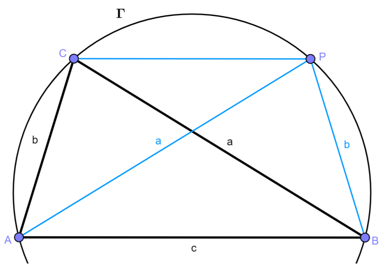
3.2.2 Lei dos Cossenos

O Teorema de Ptolomeu é uma ferramenta bem interessante para se demonstrar a lei dos cossenos para um triângulo qualquer.

Seja ABC um triângulo de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Sendo Γ o círculo circunscrito ao triângulo ABC, marcaremos em Γ o ponto P de modo que $AP = BC = a$ e $BP = AC = b$, a existência de tal ponto P esta garantida, pois o trapézio isósceles da Figura 4 é inscritível porque dois de seus ângulos opostos são suplementares. De fato:

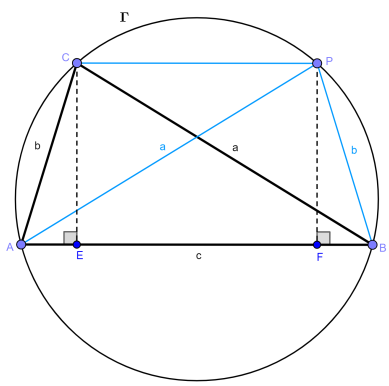
$$\angle CPB + \angle CAB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Figura 4: Círculo circunscrito ao triângulo ABC



Fonte: Autora

Figura 5: Segmentos perpendiculares a AB



Fonte: Autora

Baixemos de C e P os segmentos CE e PF, ambos perpendiculares, ao lado AB (Figura 5).

Note que, os triângulos ABC e BAP são congruentes pelo caso LLL, assim $\angle CAB = \angle PBA = \widehat{A}$. Trataremos apenas por $\widehat{A}$ em relação ao angulo interno do triângulo ABC, daí obtemos outra congruência por $LAA\circ$ (lado, ângulo, ângulo oposto) dos triângulos ACE e BPF, que nos fornece $\overline{AE} = \overline{BF}$.

No triângulo retângulo ACE temos:

$$cos\widehat{A} = \frac{\overline{AE}}{b} \Rightarrow \overline{AE} = bcos\widehat{A}.$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned} \angle CAB = \angle PBA &\Rightarrow \angle CAP + \angle PAB = \angle PBC + \angle CBA \\ &\Rightarrow \angle CAP + \angle PAB = \angle CAP + \angle CPA \\ &\Rightarrow \angle PAB = \angle CPA \end{aligned}$$

logo $CP//AB$. Corolário 2.17 de Muniz Neto (2013).

Finalmente, aplicando o Teorema de Ptolomeu ao quadrilátero $ABPC$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{BC} \cdot \overline{AP} &= \overline{AC} \cdot \overline{BP} + \overline{AB} \cdot \overline{CP} \\ \Rightarrow a \cdot a &= b \cdot b + c \cdot (c - 2bcos\widehat{A}) \\ \Rightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bccos\widehat{A}, \end{aligned}$$

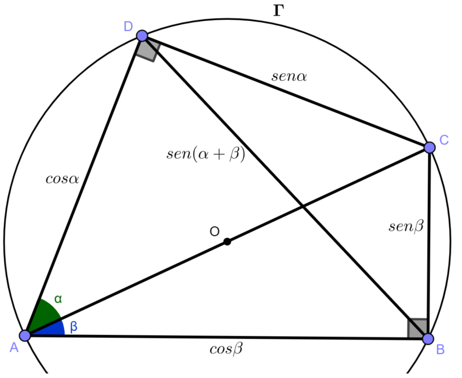
pois $\overline{CP} = \overline{EF} = \overline{AB} - 2 \cdot \overline{AE} = c - 2 \cdot bcos\widehat{A}$. $\blacksquare$

3.2.3 Seno da soma e da diferença

O Teorema de Ptolomeu é muito útil na trigonometria, assim como vimos para lei dos cossenos, conseguimos também demonstrar as fórmulas de seno da soma e diferença de dois ângulos. Para isso usaremos também a Lei dos Senos.

Seno da soma

Figura 6: Seno da soma



Fonte: Autora

Dados dois ângulos agudos α e β construímos um quadrilátero $ABCD$, tal que $\angle CAD = \alpha$ e $\angle BAC = \beta$ e $ABCD$ está inscrito em um círculo $\Gamma(O, R)$ de diâmetro $2R = \overline{AC} = 1$.

Notemos que os triângulos ABC e ADC são retângulos de hipotenusa AC, pois AC é diâmetro de Γ, proposição 3.30 (MUNIZ NETO, 2013). Segue-se, que:

- $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = cos\alpha \Rightarrow \overline{AD} = cos\alpha$
- $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AC}} = sen\alpha \Rightarrow \overline{DC} = sen\alpha$
- $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = cos\beta \Rightarrow \overline{AB} = cos\beta$
- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = sen\beta \Rightarrow \overline{BC} = sen\beta$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ABD, obtemos

$$\frac{\overline{BD}}{sen\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{sen(\alpha+\beta)} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{BD} = sen(\alpha+\beta).$$

Logo, ao utilizarmos o Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$, temos

$$\begin{aligned} \overline{AC}\cdot\overline{BD} &= \overline{AB}\cdot\overline{CD} + \overline{AD}\cdot\overline{BC} \\ \Rightarrow 1.sen(\alpha+\beta) &= cos\beta.sen\alpha + cos\alpha.sen\beta \\ \Rightarrow sen(\alpha+\beta) &= sen\alpha.cos\beta + cos\alpha.sen\beta. \ \blacksquare \end{aligned}$$

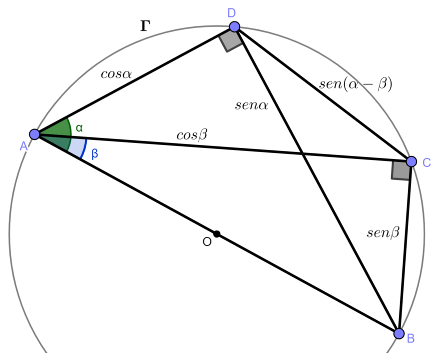
Seno da diferença

Dados dois ângulos agudos α e β, agora construímos um quadrilátero $ABCD$, inscrito em um círculo $\Gamma(O, R)$ de diâmetro $2R = \overline{AB} = 1$, de modo que $\angle BAD = \alpha$ e $\angle BAC = \beta$.

Como AB é um diâmetro, ABC e ABD são triângulos retângulos de hipotenusa AB. Daí:

- $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = cos\alpha \Rightarrow \overline{AD} = cos\alpha$
- $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = sen\alpha \Rightarrow \overline{BD} = sen\alpha$
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = cos\beta \Rightarrow \overline{AC} = cos\beta$

Figura 7: Seno da diferença



Fonte: Autora

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = sen\beta \Rightarrow \overline{BC} = sen\beta.$

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo ACD, obtemos

$$\frac{\overline{CD}}{sen(\angle DAC)} = 2R \Rightarrow \frac{\overline{CD}}{sen(\alpha - \beta)} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD} = sen(\alpha - \beta).$$

Segue-se, do emprego do Teorema de Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$, que

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \\ \Rightarrow cos\beta.sen\alpha &= 1.sen(\alpha - \beta) + cos\alpha.sen\beta \\ \Rightarrow sen(\alpha - \beta) &= sen\alpha.cos\beta - cos\alpha.sen\beta. \ \blacksquare \end{aligned}$$

4. Conclusões

Apresentamos uma demonstração matemática detalhada desse teorema, devido a Ptolomeu, exploramos algumas aplicações em diferentes outros teoremas e relações de relevante importância matemática, vale aqui citar que alem das aplicações expostas aqui, no nosso trabalho foram realizadas outras aplicações e uma coleção de problemas utilizando o Teorema de Ptolomeu, isso nos leva a crer que foram bem aproveitados. Os resultados obtidos demonstram a força e a versatilidade do Teorema de Ptolomeu, revelando uma ampla aplicabilidade.

Entretanto, apesar da diversificada pesquisa construída aqui e no trabalho completo da dissertação, ainda há muito espaço para pesquisas futuras e possíveis extensões do trabalho. Novos estudos poderiam explorar variações e generalizações dos Teoremas de Ptolomeu e Menelaus, como por exemplo a Desigualdade de Ptolomeu e o Teorema de Menelaus para triângulos esféricos, bem como investigar suas aplicações para além da geometria em áreas decorrentes da ciência e da tecnologia, astronomia, engenharia e física, assim como sua relevância em olimpíadas de matemática nacionais e internacionais. Além disso, poderia ser feita uma avaliação da eficácia da proposta de disciplina eletiva e do uso do Geogebra de maneira aprofundada após aplicação em sala de aula, buscando entender melhor seu impacto no aprendizado dos estudantes e identificar possíveis melhorias para futuras implementações.

Agradecimentos

Aos professores Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho e Dr. Leomaques Francisco Silva Bernardo, pela dedicação e pelo empenho ao avaliar meu trabalho de dissertação.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela oferta do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Finalmente, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio essencial ao longo do meu mestrado.

Referências

AABOE, A. *Episódios da historia antiga da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191 p. Citado na página 2.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria: coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 442 p. Citado na página 3.

SOUZA, A. F. de. *OS TEOREMAS DE PTOLOMEU E MENELAUS, DEMONSTRAÇÕES E APLICAÇÕES*. 2024. Disponível em: ⟨https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=7592&id2=171057306⟩. Citado na página 1.