ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

ÁREA DE QUADRILÁTEROS CONVEXOS: DEMONSTRAÇÃO GEOMÉTRICA QUE REMETE AO EGITO ANTIGO

Emanuel Carlos Albuquerque Alves[1] **- emanuel.carlos.albuquerque@aluno.uepb.edu.br**
Arlandson Matheus Silva Oliveira[1] **- arlandsonm@servidor.uepb.edu.br**

[1]Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

Resumo: *Devido às suas atividades agrícolas e à cobrança de impostos a elas associada, sabe-se que os egípcios possuíam métodos para calcular áreas e volumes. Neste contexto, eles desenvolveram uma fórmula para o cálculo da área de quadriláteros, registrada no Templo de Hórus. Este trabalho pretende explorar essa fórmula egípcia, que, apesar de não fornecer a área exata de um quadrilátero qualquer, oferece uma superestimação daquela por meio de uma desigualdade. Embora os egípcios não justificassem formalmente seus métodos, será apresentada uma demonstração geométrica para essa desigualdade. Por fim, serão comparadas a fórmula dos egípcios com a fórmula geral, do alemão Carl Anton Bretschneider (1808 – 1878), para a área de quadriláteros convexos.*
Palavras-chave*: História da Matemática, Área de quadriláteros, Geometria euclidiana.*

1. Introdução

Os egípcios se destacam como uma das civilizações antigas com notável desenvolvimento matemático. Utilizavam um sistema numérico de base decimal representado por hieróglifos, embora este não fosse posicional, como o sistema atual. Nos livros de história da Matemática, é comum encontrar registros de suas técnicas de multiplicação e divisão, uso de frações unitárias, o método da falsa posição para resolver equações de forma aritmética, além de cálculos de áreas e volumes.

A matemática egípcia, descrita por Roque (2012) como uma matemática empírica, manifestava-se na organização da agricultura, especialmente em função das alterações nas áreas de cultivo provocadas pelas enchentes anuais do rio Nilo, e na construção das icônicas pirâmides.

Em relação ao cálculo de áreas agrícolas, se uma propriedade situada às margens do Nilo fosse inundada, o proprietário mantinha o direito a uma porção de terra com a mesma área, reorganizando a distribuição da terra para preservar o total anterior. Além disso, cálculos relacionados a impostos sobre as produções agrícolas eram frequentes. Muitas dessas áreas tinham o formato de quadriláteros, principalmente retângulos, e o cálculo de suas áreas era feito utilizando a chamada fórmula do Agrimensor, conforme registrado nas inscrições do Templo de Hórus, em Edfu, Egito (TOU, 2014). Essa será a fórmula central de análise neste trabalho.

2. Metodologia

Este trabalho é fruto da revisão bibliográfica do estudo *Measuring the Accuracy of an Ancient Area Formula* de Tou (2014), que tem como objeto de análise central a fórmula do Agrimensor, utilizada pelos egípcios para calcular a área de quadriláteros. Complementa-se com a revisão do trabalho *An ancient egyptian aprroximation* de Wilson e Wilson (1991), que apresenta uma demonstração geométrica da desigualdade gerada pela fórmula do Agrimensor. Inicialmente, é apresentada a fórmula, discutida e aplicada a diferentes tipos de quadriláteros para expor suas limitações. Em seguida, a inequação derivada da fórmula é demonstrada por meio de uma construção geométrica visual descrita por Willson. Por fim, a fórmula do Agrimensor é comparada à fórmula de Bretschneider, permitindo uma análise dos erros e acertos dessa abordagem histórica. Ademais, este trabalho é parte da dissertação intitulada *Por uma geometria pictórica: histórias, uso e conexões de imagens*, de mestrado PROFMAT/UEPB de Alves (2024).

3. Resultado e discussão

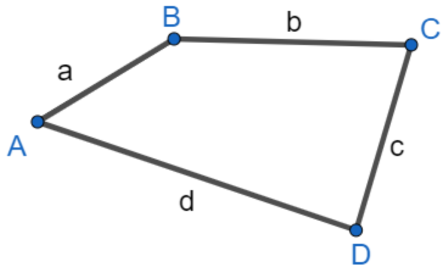
A fórmula do Agrimensor deve seu nome à sua aplicação prática pelos cobradores de impostos no cálculo de áreas de terrenos agrícolas em formato de quadriláteros, sendo essencial para a determinação dos impostos

ISSN 2764-2631

sobre a produção agrícola. Ela estabelece que a área é dada pelo produto das médias dos lados opostos do quadrilátero. Assim, dado um quadrilátero convexo qualquer de vértices ordenados $ABCD$ (Figura 1), com medidas $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{DA} = d$, tem-se que

$$A_{ABCD} = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

Figura 1: Quadrilátero qualquer

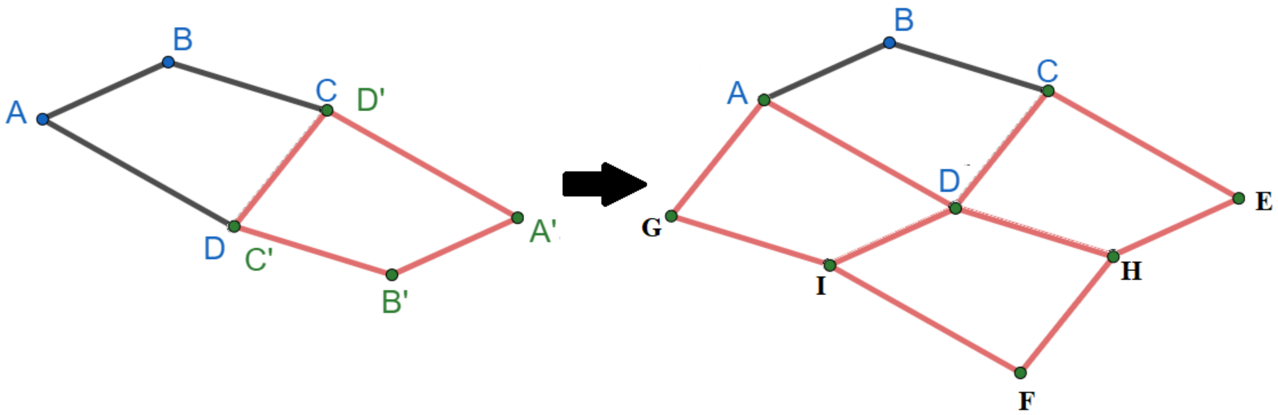


Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A fórmula do Agrimensor funciona bem para retângulos, mas ao aplicá-la a trapézios, losangos ou paralelogramos, percebe-se que ela não é válida de forma geral, já que a altura destes não é dada pela médias dos lados opostos. Contudo, o produto das médias dos lados opostos do quadrilátero pode ser usado como uma cota superior para a área de um quadrilátero qualquer. A demonstração utilizando um enfoque geométrico dessa desigualdade de Wilson e Wilson (1991) é dada a seguir.

Dado um quadrilátero $ABCD$ qualguer, gere um quadrilátero $A'B'C'D'$ congruente ao inicial e faça um giro de 180º, isto pode ser visto também com uma reflexão horizontal e depois vertical. Em seguida, sobreponha D em C' e C em D' como na primeira parte da Figura 2.

Figura 2: Quadriláteros $ABCD$ e $A'B'C'D'$ juntos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Repita o processo mais duas vezes, obtendo assim uma figura composta de quatro quadriláteros congruentes, onde os vértices são nomeados de acordo com a segunda parte da Figura 2.

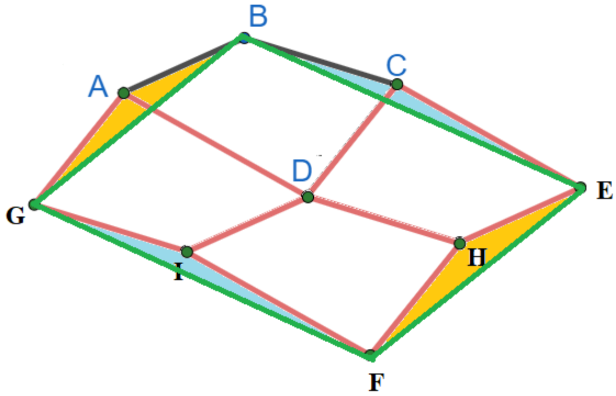
Ao traçar os segmentos BE, EF, FG e GB, forma-se um paralelogramo devido às congruências dos triângulos ABG com HEF e CBE com GIF.

Pela desigualdade dos triângulos, tem-se $GB \leq GA + AB$ e $BE \leq BC + CE$, de onde segue que

$$GB.BE \leq (GA + AB).(BC + CE).$$

ISSN 2764-2631

Figura 3: Quatro quadriláteros congruentes conectados



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Mas, como a área do paralelogramo é quatro vezes a do quadrilátero inicial, devido à construção geométrica, tem-se

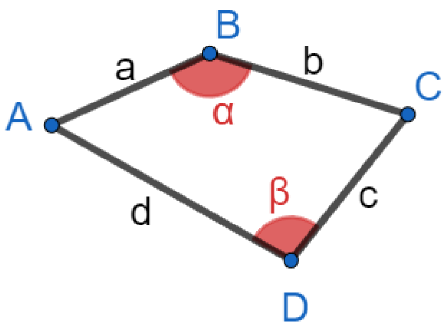
$$4 \cdot A_{ABCD} = A_{BEFG} = GB.BE.senG\hat{B}E \leq GB.BE.$$

Logo,

$$A_{ABCD} \leq \frac{(GA + AB)}{2}.\frac{(BC + CE)}{2}.$$

A fórmula do Agrimensor perdurou por bastante tempo, apesar de sua imprecisão. Historicamente, outra fórmula para a área de quadriláteros quaisquer só surgiu com o indiano Brahmagupta (598 - 668), que hoje se sabe ser aplicável apenas a quadriláteros cíclicos[1]. A fórmula mais atual e geral para o cálculo da área de quadriláteros convexos foi apresentada pelo alemão Carl Anton Bretschneider em 1842, que generalizou a fórmula de Brahmagupta.

Figura 4: Quadrilátero convexo qualquer com ângulos opostos internos α e β



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A fórmula de Bretschneider é dada por, considerando um quadrilátero qualquer $ABCD$, com medidas $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ e $\overline{DA} = d$, tem-se

$$\text{Área}_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})},$$

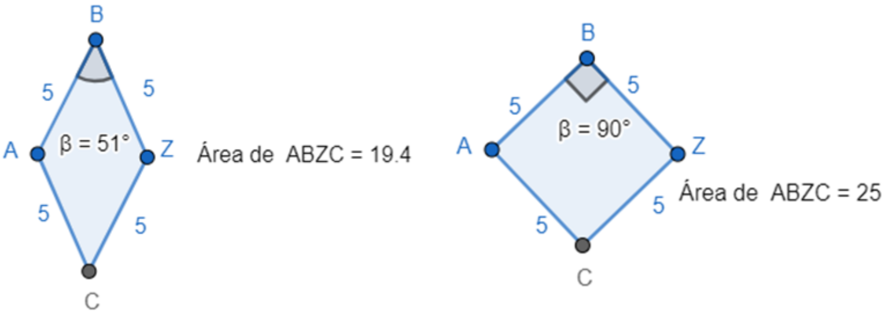
onde p é o semi-perímetro, e α e β são ângulos opostos desse quadrilátero (Figura 4). A fórmula de Brahmagupta é similar a esta, mas o termo com o cosseno é eliminado. Isso ocorre porque, em um quadrilátero cíclico, a soma dos ângulos internos opostos é 180º.

[1] Um quadrilátero é dito cíclico quando é inscritível em uma circunferência.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Ao comparar a fórmula do Agrimensor com a de Bretschneider usando um exemplo, é possível explorar o propósito original da fórmula do Agrimensor, bem como o contexto em que era utilizada. Além disso, essa comparação pode esclarecer por que a fórmula do Agrimensor não foi questionada por tanto tempo, até a chegada da fórmula de Brahmagupta.

Figura 5: Quadrilátero convexo de lados medindo cinco



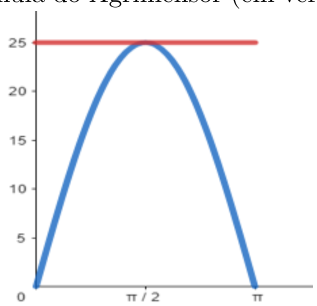
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Considere, por exemplo, um quadrilátero $ABCD$ com todos os lados medindo cinco (Figura 6). Nesse caso, os ângulos internos opostos serão iguais e serão denomidados de β. Segundo a fórmula do Agrimensor, a área será sempre 25, independentemente da variação dos ângulos internos deste quadrilátero. No entanto, pela fórmula de Bretschneider, a área é dada por:

$$A = \sqrt{(10-5)(10-5)(10-5)(10-5) - 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos^2\left(\frac{\beta+\beta}{2}\right)} = \sqrt{5^4 \cdot (1-\cos^2(\beta))} = 25 \cdot \sin(\beta).$$

Assim, analisando a variação de β nas duas fórmulas, obtemos o seguinte gráfico apresentado na Figura 6, onde a fórmula do Agrimensor é constante.

Figura 6: Comparando graficamente a fórmula do Agrimensor (em vermelho) com a de Bretschneider (em azul)



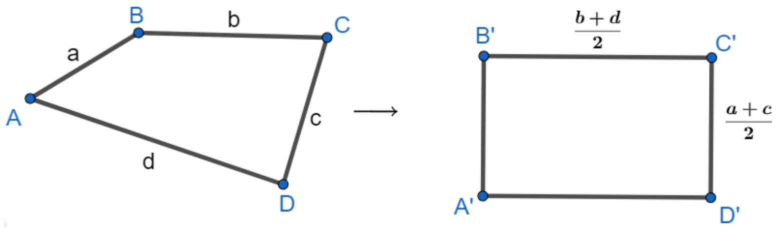
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Observa-se que quanto mais o ângulo β se afasta de um ângulo reto, o quadrilátero tende a se tornar mais achatado, resultando em uma área que difere bastante de 25. Ou seja, o erro da fórmula do Agrimensor será maior. Por outro lado, quando o ângulo se aproxima do ângulo reto, forçando todos os ângulos deste exemplo a também se aproximarem de 90º, o resultado se mostra mais coerente. Em outras palavras, quando o quadrilátero apresenta um formato próximo ao retangular, a fórmula se torna mais precisa.

Isso faz total sentido ao analisar os problemas registrados no Templo de Hórus, onde os quadriláteros possuem lados de (22, 4, 23, 4) e (15, 3.5, 16, 4) e apresentam um formato similar ao de um retângulo, conforme descrito por Tou (2014). Além disso, a fórmula do Agrimensor pode ser interpretada como uma forma de forçar o quadrilátero a se tornar um retângulo (Figura 7), cujos lados medem a média dos lados opostos, justificando assim a fórmula ser o produto dessas médias. Assim, é possível concluir que a fórmula era usada em casos onde o Agrimensor sabia que a região não era exatamente um retângulo, mas algo próximo. Por isso, ele calculava a área utilizando a média dos lados opostos.

Figura 7: A fórmula do Agrimensor torna um quadrilátero em um retângulo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

4. Conclusões

A fórmula do Agrimensor, expressa como o produto das médias dos lados opostos, demonstrou-se eficaz para retângulos, a forma predominante dos terrenos agrícolas no contexto egípcio. No entanto, apresenta limitações quando aplicada a quadriláteros de formas mais gerais. Embora não seja válida para o cálculo da área de quadriláteros convexos quaisquer, a fórmula estabelece uma superestimação da área para esses casos.

Ainda assim, a fórmula mostrou-se bastante precisa para quadriláteros que se aproximam do formato retangular. Isso sugere que os egípcios a utilizavam com a compreensão de que ela era mais eficaz para figuras próximas a retângulos, refletindo uma adaptação prática às condições reais dos terrenos que enfrentavam.

Referências

ALVES, E. C. A. *Por uma Geometria Pictórica: Histórias, Usos e Conexões das Imagens.* 101 p. Dissertação (Mestrado Profissional) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande - PB, 2024. Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT. Citado na página 1.

ROQUE, T. *História da Matemática: Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas.* Rio de Janeiro: Zaha, 2012. Citado na página 1.

TOU, E. Measuring the accuracy of an ancient area formula. *SIAS Faculty Publications*, 2014. Citado na página 1.

WILSON, W. W.; WILSON, G. L. An ancient egyptian approximation. *The Mathematical Gazette*, p. 89–90, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.