ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

SOLUÇÃO GERAL PARA RECORRÊNCIAS LINEARES DE 2ª ORDEM HOMOGÊNEA COM RAÍZES REAIS E IGUAIS

Geovane Tavares Nogueira[1] - geovanetavares050119@gmail.com
Luiz Antônio da Silva Medeiros[2] - luiz.silva@professor.ufcg.edu.br

[1]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil
[2] Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Este trabalho é um dos recortes que obtivemos com o Trabalho de Conclusão de Curso no programa de mestrado PROFMAT-UFCG sobre a temática de recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas, onde justificamos através da independência linear o porquê aparece um fator n na solução geral quando tais recorrências admitem apenas raízes reais e iguais. Finalizamos nosso trabalho com um exemplo, sobre recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas, com raízes reais e iguais, onde aplicamos a teoria apresentada nesse trabalho.*

Palavras-chave*: Soluções linearmente independentes; Recorrências; Equação característica associada.*

1. Introdução

Na disciplina de Matemática discreta - MA12, no Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) nos deparamos com o conteúdo sobre recorrências lineares e ficamos nos perguntando o porquê a solução geral para as recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas no formato $Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0$, em que $A, B, C \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$, conforme podemos encontrar em (CARVALHO; MORGADO, 2022) ser da seguinte forma:

$$h(n) = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot n \cdot r^n,$$

em que C_1, C_2 são constantes reais, n é um número natural e r é a raiz da equação característica associada a tal recorrência.

O objetivo desse trabalho foi entender o formato apresentado para a solução geral para recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas quando a equação característica associada a tal recorrência apresenta duas raízes reais e iguais. Nos principais livros que encontramos na literatura, de matemática discreta, em nenhum deles traz a justificativa do uso da expressão para a solução geral da recorrência. Diante disso, justificamos através da independência linear que de fato a solução deve ser no formato apresentados nos livros supracitados na metodologia desse trabalho.

2. Metodologia

A metodologia adotada neste trabalho foi a revisão bibliográfica dos materiais (STEFFENON; GUARNIERI, 2022), (CARVALHO; MORGADO, 2022), (LIMA et al., 1997) e (CAMINHA, 2013) à respeito da temática sobre recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas, tema estudado na disciplina de MA12 do Programa de Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT - na Universidade Federal de Campina Grande - UFCG.

3. Resultado e discussão

Definição 1. *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de escalares. Se existirem escalares A e B, não simultaneamente nulos, tais que*

$$A \cdot x_n + B \cdot y_n = 0 \quad \text{para todo } n \text{ natural},$$

*diremos que (x_n) e (y_n) são **linearmente dependentes**(LD). Caso contrário, diremos que são **linearmente independentes**(LI).*

Segue da Definição 1 que (x_n) e (y_n) são **LI's** se, e somente se, para todo $n \in \mathbb{N}$ o sistema:

$$A \cdot x_n + B \cdot y_n = 0,$$

possui exclusivamente a solução trivial, a saber: $A = B = 0$. Assim, (x_n) e (y_n) são LD se x_n é múltipla de y_n ou y_n é múltipla de x_n.

Ademais, segue da Definição 1 que (x_n) identicamente nula é LD com qualquer outra sequência (y_n). Com efeito,

$$x_n = 0 = 0 \cdot y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, considerando $A = 1$ e $B = 0$, tem-se $Ax_n + By_n = 0$ para todo n natural, que implica serem x_n e y_n LD.

Teorema 1. *Duas sequências (x_n) e (y_n) são **LD** se, e somente se,*

$$det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0,$$

para todos os índices i, j naturais.

A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em (NOGUEIRA; MEDEIROS, 2024).

Exemplo 1. *Vejamos algumas sequências que são LI's ou LD's:*

a) $\{x_n, y_n\}$, *com* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $x_n = \lambda_1^n$, $y_n = \lambda_2^n$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *e* $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

b) $\{x_n, y_n\}$, *com* $x_n = \lambda^n$, $y_n = n\lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda \neq 0$.

c) $\{x_n, y_n\}$, *com* $x_n = C_1 \cdot \lambda^n$ *e* $y_n = C_2 \cdot \lambda^n$. *Além disso,* $C1, C_2, \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda \neq 0$.

Solução. *Seja $i, j \in \mathbb{N}$ com $j = i + q$ para algum $q \in \mathbb{N}$. Para que as sequências sejam LI's devemos ter:*

$$det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \neq 0,$$

caso contrário, as sequências são LD's.
a) *Sejam $x_n = \lambda_1^n$ e $y_n = \lambda_2^n$. Assim temos que:*

$$det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \lambda_1^i & \lambda_2^i \\ \lambda_1^{i+q} & \lambda_2^{i+q} \end{pmatrix} = \lambda_1^i \cdot \lambda_2^i \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1^q & \lambda_q \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda_1^i}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\lambda_2^i}_{\neq 0} \left(\underbrace{\lambda_2^q - \lambda_1^q}_{\neq 0} \right) \neq 0.$$

Portanto, concluímos que $x_n = \lambda_1^n$ e $x_n = \lambda_2^n$ são LI's.
b) *Sejam $x_n = \lambda^n$ e $x_n = n\lambda^n$. Assim temos que:*

$$det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \lambda^i & i\lambda^i \\ \lambda^{i+q} & (i+q)\lambda^{i+q} \end{pmatrix} = \lambda^i \cdot \lambda^i \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot \lambda \\ \lambda^q & (i+1)\lambda^q \end{pmatrix} = \lambda^i \cdot \lambda^i \cdot \lambda^q \neq 0,$$

Portanto, concluímos que $x_n = \lambda^n$ e $x_n = n \cdot \lambda^n$ são LI's.
c) *Sejam $x_n = C_1\lambda^n$ e $y_n = C_2\lambda^n$. Assim temos que:*

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} C_1\lambda^i & C_2\lambda^i \\ C_1\lambda^{i+q} & C_2\lambda^{i+q} \end{pmatrix} &= C_1\lambda^i \cdot C_2\lambda^{i+q} - C_1\lambda^{i+q} \cdot C_2\lambda^i \\ &= C_1C_2\lambda^{2i+q} - C_1C_2\lambda^{2i+q} \\ &= 0, \end{aligned}$$

independentemente do q considerado.
Portanto, concluímos que $x_n = C_1 \cdot \lambda^n$ e $x_n = C_2 \cdot \lambda^n$ são LD's.

ISSN 2764-2631

Definição 2. *Uma recorrência é dita linear de segunda ordem quando aparece na equação de recorrência um termo em função de seus dois antecessores imediatos, ou seja, tem o seguinte formato:*

$$x_{n+2} + f(n)x_{n+1} + g(n)x_n + h(n) = 0,$$

onde as funções f, g e h têm como domínio o conjunto dos números naturais e $g(n)$ é uma função não nula, caso contrário a recorrência será de primeira ordem. Além disso, se $h(n) = 0$ a recorrência é dita homogênea, caso contrário ela é dita não homogênea.

Neste trabalho, abordamos apenas o caso em que as funções $f(n)$ e $g(n)$ são constantes e a função $h(n)$ é identicamente nula, ou seja, as recorrências homogêneas da forma: $Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0$, com $C \neq 0$.

Teorema 2. *Sejam (y_n) e (z_n) duas soluções linearmente independentes da recorrência*

$$Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n = 0, \; A \neq 0 \text{ e } C \neq 0. \tag{1}$$

Se $\{w_n\}$ é qualquer outra solução da recorrência (1), então existem escalares C_1 e C_2 tais que:

$$w_n = C_1 y_n + C_2 z_n.$$

Demonstração. Se (w_n) é solução identicamente nula, tomamos $C_1 = C_2 = 0$. Suponha então que (w_n) seja identicamente não nula. Como (y_n) e (z_n) são duas soluções LI's, isso significa que tanto (y_n) quanto $\{z_n\}$ são não identicamente nulas. Ademais, pela consequencia do Teorema 1, teremos:

$$det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dessa forma, o sistema:

$$\text{(S)} \begin{cases} y_1 A + z_1 B = w_1 \\ y_2 A + z_2 B = w_2 \end{cases}$$

tem solução única. Sejam $A = C_1$ e $B = C_2$ a (única) solução desse sistema. defina

$$t_n = w_n - C_1 y_n - C_2 z_n.$$

Perceba que $\{t_n\}$ é solução da recorrência (1). Além disso, $t_1 = t_2 = 0$ pelas escolhas das constantes C_1 e C_2. Assim, $t_n \equiv 0$ e, consequentemente,

$$w_n = C_1 y_n + C_2 z_n.$$

□

Teorema 3. *Se a equação característica da recorrência $x_{n+2} = Bx_{n+1} + Cx_n$, com B e C reais não nulos, possui apenas uma raiz real λ, então a solução geral da recorrência é dada por:*

$$x_n = C_1 \lambda^n + C_2 n \lambda^n, \; \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Considere a recorrência:

$$x_{n+2} - Bx_{n+1} - Cx_n = 0 \tag{2}$$

com B e C escalares. Consideremos ainda, que a recorrência (2) possui a propriedade que $\lambda = \dfrac{B}{2}$ é a única raiz da equação característica associada.

Sendo assim, teremos que o discriminante da equação característica será igual à $\Delta = B^2 + 4C = 0$.

Note que, se λ é raíz única da equação (2), então $x_n = \lambda^n$ é solução da recorrência $x_n - Bx_{n-1} - Cx_{n-2} = 0$.

Tome v_n uma solução qualquer da recorrência e faça $y_n = \dfrac{v_n}{x_n}$, o que implica que $v_n = y_n \cdot x_n$ é tanto solução de $y_n \cdot \lambda^n - By_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} - Cy_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} = 0$ como de $y_n \cdot \lambda^2 - By_{n-1} \cdot \lambda - Cy_{n-2} = 0$.

Substituindo λ por $\dfrac{B}{2}$ e C por $-\dfrac{B^2}{4}$, obtemos:

$$\begin{aligned} y_n \cdot \frac{B^2}{4} - y_{n-1} \cdot \frac{B^2}{2} + y_{n-2} \cdot \frac{p^2}{4} &= 0 \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} &= 0 \\ y_n - y_{n-1} &= y_{n-1} - y_{n-2}. \end{aligned}$$

Veja que $\Delta y_n = \Delta y_{n-1}$ e isso significa que os pontos (n, y_n) pertencem a uma reta de coeficiente angular igual a $m = \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{1}$. Ou seja, y_n é a restrição de uma função afim sobre $\mathbb{N}$.

Logo, $y_n = Dn + E$ com $D, E \in \mathbb{R}$. E desta forma, temos que:

$$v_n = y_n \lambda^n = (Dn + E)\,\lambda^n = Dn\lambda^n + E\lambda^n.$$

Como as soluções $x_n = \lambda^n$ e $z_n = n\lambda^n$ são LI's (consultar item (b) do Exemplo 1), segue pelo Teorema 2 que todas as soluções para a recorrência (2) é escrita como combinação linear dessas duas soluções, ou seja,

$$x_n = C_1\lambda^n + C_2 \cdot n \cdot \lambda^n, \text{com } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Agora, vamos resolver um exemplo de recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas cujas raízes da equação característica associada são reais e iguais.

Exemplo 2. *Resolva a recorrência homogênea dada por* $a_{n+1} + 6a_n + 9a_{n-1} = 0$ *com as condições iniciais,* $a_1 = 1$ *e* $a_2 = 2$.

Solução. *A equação característica associada a recorrência homogênea é* $r^2 + 6r + 9 = 0$, *que tem raiz real dupla* $r_1 = r_2 = -3$. *Logo pelo Teorema 3 a solução geral é dada por:*

$$a_n = C_1(-3)^n + C_2 n(-3)^n.$$

Para determinar as constantes C_1 *e* C_2, *utilizaremos as condições iniciais e assim obtemos que* $C_1 = -\dfrac{8}{9}$ *e* $C_2 = \dfrac{5}{9}$. *Portanto, a solução geral da recorrência será:*

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{8}{9}(-3)^n + \frac{5}{9}n(-3)^n \\ &= \frac{(-3)^n}{9}(5n - 8). \end{aligned}$$

4. Conclusões

O nosso objetivo foi alcançado, uma vez que conseguimos justificar através da independência linear que a solução para recorrências lineares de 2ª ordem homogêneas com coeficientes constantes são apresentadas no formato que podemos encontrar na literatura, onde os autores desses livros que fizemos a revisão bibliográfica não traz o porquê a solução geral, de fato, ser naquele formato.

O tema é relevante e relaciona-se com o desenvolvimento de habilidades para a resolução de problemas. Ademais, há uma preocupação em favorecer a formação de professores. Portanto, considera-se contribuir para a educação básica viabilizando a formação de profissionais qualificados e a divulgação da matemática através da metodologia de resolução de problemas.

Agradecimentos

A SBM por ofertar e coordenar esse curso de mestrado para uma melhor qualificação dos professores. A todo corpo docente da UFCG, pelo compromisso e dedicação com a formação profissional dos seus discentes, de modo especial ao meu orientador, Luiz Antônio da Silva Medeiros, por todos as horas de estudos, ideias e ensinamentos para construção deste trabalho.

A UFCG por todo ambiente inspirador e pela oportunidade de ofertar esse encontro que é de grande importância para enriquecermos nossa aprendizagem com conteúdos que serão significativos em nossas salas de aulas.

Referências

CAMINHA, A. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 1: Números Reais.* [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 1.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. d. O. Matemática discreta. *Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM*, 2022. Citado na página 1.

LIMA, E. L. et al. *A matemática do ensino médio.* [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 1997. v. 2. Citado na página 1.

NOGUEIRA, G. T.; MEDEIROS, L. A. d. S. As recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem: um olhar para as soluções particulares das equações não homogêneas de 2ª ordem e aplicações. Universidade Federal de Campina Grande, 2024. Citado na página 2.

STEFFENON, R.; GUARNIERI, F. *Belos Problemas de Matemática discreta.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2022. v. 1ª edição. Citado na página 1.