PROFMAT

VI Encontro Campinense do PROFMAT
18 de outubro de 2024
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

UMA PROVA TOPOLÓGICA DA IRRACIONALIDADE DA CONSTANTE DE EULER

Maxwell Aires da Silva[1] **- maxwell.matematico@gmail.com**
Luciana Roze de Freitas[2] **- lucianarfreitas@hotmail.com**

[1]EMEF Maria das Vitórias Pires Uchoa Queiroz - Campina Grande, PB, Brasil
[2]Universidade Estadual da Paraíba

Resumo: *Neste trabalho apresentamos uma demonstração da irracionalidade da constante de Euler, o número e. Essa demonstração foi publicada originalmente pelo matemático estadunidense Jonathan Sondow* (1943−2020) *em um artigo científico no ano de* 2006 *(SONDOW, 2006). O interessante desse artigo é sua originalidade, pois o Sondow apresenta um argumento bastante engenhoso usando conceitos de topologia da reta para a construção de intervalos convenientes baseados na expansão do número e via séries de Maclaurin. Em seguida, mostra que a constante de Euler pertence ao interior de todos esses intervalos para, enfim, mostrar por meio de redução a um absurdo a irracionalidade desse número.*
Palavras-chave: *Constante de Euler; Irracionalidade; Topologia*

1. Introdução

As constantes matemáticas são, sem sombra de dúvidas, de inegável importância no processo de se fazer e entender Matemática. Alguns desses números são bastante famosos e igualmente antigos, como por exemplo, $\pi = 3,14159265358\ldots$ muito utilizado na geometria e na trigonometria, e a chamada razão áurea $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots$ bastante conhecida entre os gregos e os renascentistas. Outras constantes são bem mais recentes, do ponto de vista histórico, como por exemplo, a que discutiremos nesse trabalho, a chamada *constante de Euler* $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 2,7182818284\ldots$, assim chamada em homenagem ao matemático suíço **Leonhard Euler** (1707 - 1783).

Desde suas primeiras aparições, por volta do século 17 em um contexto de matemática financeira, mais precisamente, no estudo da expressão $S = P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$, conforme o valor de n cresce $(n \to \infty)$, pareceu que se tratava apenas de uma curiosidade matemática. No entanto, o trabalho de **Gregoire de Saint Vincent** (1584 - 1667) sobre quadratura da hipérbole apresentou à comunidade matemática da época uma ótima candidata a base universal para os logaritmos. Finalmente, com as pesquisas de Euler em Cálculo Diferencial, especificamente, estudando a função $f(x) = e^x$, percebeu-se que esta função possui derivada igual à própria função, colocando assim o número e em um lugar definitivo de importância para a Matemática. Para mais detalhes, sugerimos a referência (MAOR, 2008).

Estabelecido o número e como uma importante constante matemática, os próximos passos seriam entender, com mais acuidade, mais detalhes sobre essa constante. Por exemplo, se este número é racional ou irracional, se existem expressões em séries para ele, etc. Euler foi o primeiro a provar a irracionalidade de e em 1744, veja (EULER, 1744). **Augustin Louis Cauchy** (1789 - 1857) também provou sua irracionalidade no artigo (STAINVILLE, 1815) e, ao longo da história, matemáticos provaram de maneiras diferentes esse resultado.

Vamos apresentar aqui uma prova feita pelo matemático estadunidense **Jonathan Sondow** (1943 - 2020), demonstração esta que usa fatos topológicos da reta após uma engenhosa construção de intervalos encaixantes. Por fim, usando o argumento de redução a um absurdo encerra-se a prova. Para mais detalhes, indicamos a leitura de (SONDOW, 2006).

É interessante notar que o tema da irracionalidade está presente na vida dos estudantes e, consequentemente, dos professores desde a Educação Básica, uma vez que no Ensino Médio já é discutido acerca da irracionalidade de números tais como $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, o número π e o número de ouro φ. Diante disso, destaca-se a importância dos professores de Matemática terem uma compreensão dos números irracionais bem como dos seus aspectos

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

históricos e sua aplicações.

2. A prova topológica

Esta seção é dedicada à demonstração da irracionalidade do número e baseada no artigo de (SONDOW, 2006). Antes, porém, vamos apresentar alguns conceitos preliminares que nos serão úteis para um melhor entendimento da demonstração, e vamos apresentá-los em forma de definição ou de lema. Para maiores detalhes acerca de tais resultados, consulte a referência (NETO, 2022).

Definição 1. *A expansão da função exponencial $f(x) = e^x$ em séries de Maclaurin é*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

em que $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Observação 1. *Para $x = 1$, o número e fica expresso na soma*

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Lema 1. *Seja $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ uma sequência decrescente de intervalos compactos $I_n = [a_n, b_n]$. Se $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$, então existe um único $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\theta\}$.*

Teorema 1. *O número e é irracional.*

Demonstração. Inicialmente vamos tomar um intervalo, denotado por I_1 que contém o número e, a saber, $I_1 = [2, 3]$. Agora, vamos construir o intervalo I_2, usando-se a seguinte lei de formação:

Lei de formação: Para $k \in \mathbb{N}$, o intervalo I_k é dividido em $k + 1$ subintervalos de mesmo comprimento e, tomando o segundo intervalo da esquerda para a direita, este é o intervalo I_{k+1}.

Desse modo, $I_2 = \left[2 + \frac{1}{2}, 3\right]$. Continuando, o terceiro intervalo é $I_3 = \left[2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6}\right]$, e para facilitar a dedução dos demais, observe o seguinte:

$$I_1 = [2,3] \Rightarrow I_1 = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right];$$
$$I_2 = \left[2 + \frac{1}{2}, 3\right] \Rightarrow I_2 = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right];$$
$$I_3 = \left[2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{6}\right] \Rightarrow I_3 = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}\right].$$

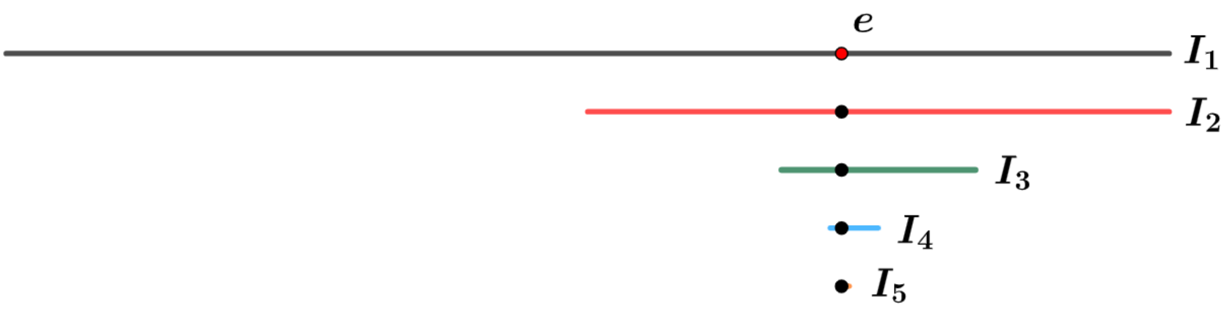
Continuando esse processo, o $k-$ésimo intervalo será da forma:

$$I_k = \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}, \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} + \frac{2}{k!}\right].$$

Note a relação desses intervalos com o número e, conforme a Observação 1. A figura a seguir ilustra geometricamente alguns desses intervalos.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Figura 1: Ilustração da construção dos intervalos I_k



Fonte: Elaborada pelos autores no GeoGebra

Agora, perceba que os comprimentos desses intervalos valem $|I_k| = \dfrac{1}{k!}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Agora, chamando
$\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{k!} = \dfrac{A_k}{k!}$

e

$\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{(k-1)!} + \dfrac{2}{k!} = \dfrac{B_k}{k!}$,
em que $A_k, B_k \in \mathbb{Z}$, tem-se: $I_k = \left[\dfrac{A_k}{k!}, \dfrac{B_k}{k!}\right]$, e como $|I_k| = \dfrac{1}{k!}$, obtém-se $B_k = A_k + 1$.
Por meio de tal construção, tem-se uma cadeia decrescente de intervalos compactos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \cdots$ e assim, uma vez que $\lim\limits_{k\to\infty} |I_k| = 0$, segue-se do Lema 1, que existe um único $\theta \in \mathbb{R}$, tal que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{\theta\}.$$

Afirmação: $e \in I_k,\ \forall\ k \in \mathbb{N}$.

Prova da afirmação: Note que $e > \dfrac{A_k}{k!}$, uma vez que

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &> \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{A_k}{k!}. \end{aligned}$$

Para completar a prova, basta mostrar que $e < \dfrac{A_k + 1}{k!}$. Com efeito, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} e &= \frac{A_n}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &= \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right] \\ &< \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right] \\ &= \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!} \\ &= \frac{A_n + 1}{n!}. \end{aligned}$$

Daí, $e \in I_k, \ \forall \ k \in \mathbb{N}$, e em particular, $e \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$, provando assim a afirmação.

Completemos agora a demonstração do teorema. Suponha, por absurdo, que $e \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $e = \dfrac{p}{q}$ com $mdc(p,q) = 1$. Desse modo, como $e \in I_k, \ \forall \ k \in \mathbb{N}$, então $e \in I_q$, em que q é o possível denominador do e. Desse modo, tem-se:

$$\frac{A_q}{q!} < e < \frac{A_q + 1}{q!},$$

e como $e = \dfrac{p}{q}$, vem

$$\frac{A_q}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{A_q + 1}{q!},$$

pode-se ainda escrever $\dfrac{p}{q}$ da seguinte forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!},$$

e disto tem-se

$$\frac{A_q}{q!} < \frac{p(q-1)!}{q!} < \frac{A_q + 1}{q!},$$

ou ainda

$$A_q < \underbrace{p(q-1)!}_{\in \mathbb{Z}} < A_q + 1.$$

Encontrando assim um inteiro $p(q-1)!$ entre dois inteiros consecutivos A_q e $A_q + 1$ o que é um absurdo. Logo, $e \notin \mathbb{Q}$.

■

ISSN 2764-2631

3. Considerações finais

A demonstração de um resultado, mesmo que já conhecido, usando novas técnicas/estratégias mostra-se uma forte ferramenta de ensino, pesquisa e aprendizagem em Matemática nos mais diversos níveis, pois apresenta ao professor/pesquisador novos pontos de vista que podem servir de fonte de inspiração para futuras gerações de professores e/ou pesquisadores.

Referências

EULER, L. De fractionibus continuis dissertatio. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, v. 9, p. 98–137, 1744. Citado na página 1.

MAOR, E. *e: a história de um número*. Rio de Janeiro: Record, 2008. Citado na página 1.

NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2022. Citado na página 2.

SONDOW, J. A geometric proof that e is irrational and a new measure of its irrationality. *Amer. Math. Monthly*, v. 113, p. 637–641, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

STAINVILLE, J. de. Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, v. 1, p. 340–341, 1815. Citado na página 1.