



TRIGONOMETRIA ESFÉRICA: RELATANDO A EXPERIÊNCIA DE INSERÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Rejane Angela de Lima¹ - rejane.angela@gmail.com

Romildo Nascimento de Lima² - romildo.nascimento.lima@gmail.com

¹Secretaria Estadual de Educação - PE, Brasil

²Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: Enquanto a Trigonometria Plana é amplamente ensinada no Ensino Básico, a Trigonometria Esférica é geralmente abordada em cursos técnicos e de graduação especializados. Neste trabalho, que é um recorte de uma parte de uma dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Campina Grande, apresentaremos alguns fatos históricos que mostram o desenvolvimento dos conceitos da Trigonometria durante a história e destacaremos como foi a experiência da primeira autora ao realizar atividades que incluem a construção de instrumentos de navegação e a exploração de propriedades geométricas da esfera, conectando os conteúdos matemáticos com suas aplicações no mundo real, evidenciando sua relevância e aplicabilidade no contexto da educação básica, com o objetivo de desenvolver habilidades matemáticas e uma compreensão interdisciplinar dos alunos.

Palavras-chave: Trigonometria Esférica; Navegação Astronômica; Educação Básica.

1. Introdução

A Matemática evoluiu em resposta às necessidades humanas, e a Trigonometria é um exemplo claro disso. Originada entre os gregos, ela surgiu para resolver problemas de Astronomia e Cartografia. Ptolomeu, em 150 d.C., usou-a para calcular latitudes e longitudes. Já a Trigonometria Esférica, focada na análise de triângulos em superfícies esféricas, se formalizou com o avanço da álgebra nos séculos XVI e XVII.

A Trigonometria Esférica foi essencial para interpretar medições e entender relações entre ângulos e distâncias em superfícies esféricas, sendo essencial para o avanço da navegação e a exploração do mundo. Ela também permitiu cálculos precisos de distâncias e posições celestiais, sendo seus conceitos, como seno e cosseno esféricos, fundamentais para resolver problemas complexos na navegação.

Instrumentos náuticos antigos, como bússola, astrolábio e quadrante, foram essenciais para a navegação, permitindo medir a altura dos astros e determinar a latitude. Embora obsoletos hoje, foram fundamentais no desenvolvimento de tecnologias como o GPS. A bússola ainda tem usos específicos, mas os demais instrumentos são mais valorizados por seu significado histórico.

A introdução desses conceitos no Ensino Médio deve proporcionar aos alunos uma compreensão inicial da trigonometria esférica, ligando a teoria matemática à prática e ampliando sua perspectiva sobre a aplicação desses conceitos na resolução de problemas reais. Além disso, tornaram-se fundamentais na resolução de desafios complexos em explorações astronômicas, levantamentos de terras e navegações marítimas, desempenhando um papel vital pois oferece ferramentas matemáticas essenciais para explorar e compreender as vastas extensões dos oceanos, sendo fundamental para determinar a posição de uma embarcação em alto mar e para traçar rotas eficientes e seguras. Ao empregar coordenadas esféricas, que consideram a curvatura da Terra, a trigonometria esférica permite calcular distâncias, direções e posições celestiais com alta precisão.

No entanto o objeto desse trabalho buscou explorar a viabilidade de introduzir conceitos de Trigonometria Esférica no Ensino Básico, conectando-os a aplicações práticas, como navegação astronômica e geolocalização, por meio da construção de instrumentos antigos e a exploração de propriedades geométricas da esfera. A falta de abordagem desse tema nas escolas revela a importância de diversificar o currículo matemático, trazendo um contexto interdisciplinar que motive os estudantes e os aproxime de problemas reais. Nos resultados, foram discutidas as atividades realizadas com os alunos, enfatizando o uso desses conceitos no Ensino Médio promovendo um aprendizado mais significativo e interdisciplinar, desenvolvendo habilidades críticas e práticas.



2. Metodologia

Para a inserção desses conteúdos no Ensino Médio, foi realizado um minicurso com oficinas práticas, onde os alunos desenvolveram conhecimentos desde os fatos históricos até a aplicabilidade matemática dos conceitos. Os objetivos incluíram compreender a navegação e geolocalização com trigonometria esférica, destacar a diferença entre geometria plana e esférica, conectar conceitos matemáticos a exemplos históricos e práticos.

As principais fontes utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho foram: Boyer e Merzbach (2012), Brasil (2018), Lima et al. (2016), Roque e Carvalho (2012).

3. Resultados e Discussão

Aqui apresentamos os principais resultados obtidos a partir da abordagem histórica e prática da trigonometria esférica, conforme trabalhado nas atividades desenvolvidas com os alunos. Primeiramente, no tópico 3.1, discute-se a evolução histórica da trigonometria e a importância dos instrumentos náuticos na navegação e astronomia, com ênfase nas contribuições de matemáticos como Hiparco, Ptolomeu e Menelau. Em seguida, no tópico 3.2, apresenta-se as atividades práticas realizadas pelos alunos, incluindo a construção de réplicas de instrumentos e a exploração de triângulos esféricos, destacando o impacto dessas atividades no desenvolvimento das habilidades matemáticas e no engajamento dos estudantes.

3.1 História da Trigonometria

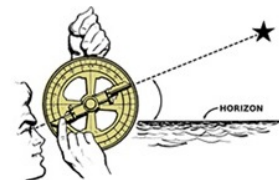
A história aqui apresentada aborda a evolução do conhecimento sobre a trigonometria esférica e sua conexão com instrumentos náuticos. Civilizações antigas, incluindo egípcios, babilônios e gregos, realizaram observações meticulosas do movimento planetário e estelar, catalisando o desenvolvimento de métodos para o registro e previsão de fenômenos celestiais. No entanto, desempenharam papéis distintos, contribuindo gradualmente para o desenvolvimento da trigonometria.

“A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da Terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido.” (LIMA et al., 2016, Pg.217)

A história da Trigonometria Esférica, abordada no minicurso, está intimamente ligada ao desenvolvimento de instrumentos náuticos e à aplicação em áreas como astronomia e navegação. A civilização grega destacou-se nesse contexto, com matemáticos que fizeram contribuições essenciais como o desenvolvimento do astrolábio e outros instrumentos utilizados para localização e orientação em alto-mar. A formalização e documentação de suas descobertas permitiram que essas contribuições fossem registradas e transmitidas ao longo do tempo. Entre os principais matemáticos que se destacaram nesse processo estão:

Hiparco de Nicéia: conhecido como “Pai da trigonometria”, desenvolveu a primeira tabela trigonométrica e trabalhou na criação de tabelas lunares e no desenvolvimento do astrolábio. Ele também introduziu um sistema de localização baseado em longitude e latitude e desenvolveu um método de projeção estereográfica para a cartografia.

Figura 1: Astrolábio náutico



Fonte: Wikipédia. Acessado em maio de 2024.

Cláudio Ptolomeu: Sua obra *Almagesto* contém tabelas de coordenadas celestes baseadas em cálculos de Trigonometria Esférica, usadas para navegação. A precisão desses cálculos foi fundamental para o desenvolvimento de mapas e ferramentas de navegação.

“O *Almagesto* de Ptolomeu, ao que se supõe, deve muito quanto a seus métodos ao *Cordas em um círculo*, de Hiparco. Ptolomeu fez uso do catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu derivavam,

ou não, em grande parte, de seu ilustre predecessor não se pode saber.” (BOYER; MERZBACH, 2012, Pg.126)

Menelau de Alexandria: escreveu "Sphaerica", o mais antigo trabalho conhecido sobre trigonometria esférica. Ele definiu triângulos esféricos e apresentou teoremas fundamentais, conceitos essenciais para cálculos astronômicos e navegação.

Essas contribuições gregas formaram a base dos estudos no minicurso, especialmente na construção prática de instrumentos náuticos, como o astrolábio, pelos alunos.

3.2 Comentários sobre atividades desenvolvidas com alunos

A introdução à trigonometria esférica foi realizada como complemento à geometria plana tradicional, com foco na resolução de problemas para estimular o pensamento crítico. A seguir, está a sequência didática dos encontros.

1º e 2º Encontros: Apresentação da evolução da trigonometria, destacando matemáticos e suas aplicações em astronomia e navegação. Foram utilizados slides e vídeos, explorando os principais instrumentos de navegação utilizados historicamente, como o astrolábio, o sextante e o quadrante. Cada instrumento foi detalhadamente explicado, enfatizando seu funcionamento e importância. Os alunos foram desafiados a construir réplicas desses instrumentos como atividade extraclasse. A avaliação considerou a participação ativa e a compreensão dos conceitos, promovendo um aprendizado prático e colaborativo.

3º Encontro: A construção prática dos instrumentos incentivou a pesquisa adicional, promovendo a criatividade e a colaboração em grupo. Durante o encontro, os alunos apresentaram seus modelos, discutindo as dificuldades enfrentadas e as soluções criativas desenvolvidas. Essa interação durante as apresentações foi uma estratégia eficaz para consolidar o conhecimento e fomentar a troca de ideias. Os alunos foram encorajados a fazer perguntas, fornecer feedback e discutir as diferentes abordagens na construção dos instrumentos, criando um ambiente colaborativo e motivador.

Figura 2: Registro fotográfico dos alunos confeccionando e apresentando os instrumentos náuticos



Fonte: Própria autoria.



4º e 5º Encontros: Exploração da geometria dos globos terrestre e celeste e das coordenadas geográficas. Os alunos praticaram a medição de distâncias e ângulos, bem como a identificação de latitude e longitude em mapas. A avaliação incluiu precisão e aplicação dos conceitos. Foi realizada a exploração das coordenadas geográficas através de atividades práticas que incluíram a utilização de mapas e globos. Os alunos aprenderam a localizar pontos na Terra usando latitude e longitude, compreendendo a aplicação prática desse conhecimento em contextos como a navegação e a geolocalização.

6º e 7º Encontros: Oficina prática de formação de triângulos esféricos e exploração de suas propriedades, seguida por atividades no GeoGebra para comparações visuais com triângulos planos. Uma oficina prática foi desenvolvida, para explorar conceitos básicos de geometria esférica. Utilizando materiais simples como bolinhas de isopor, cordão, alfinetes, canudinhos e transferidor, os alunos construíram modelos que representavam triângulos esféricos e outros conceitos geométricos. A oficina permitiu aos alunos visualizar e manipular os conceitos, facilitando a compreensão, e os compararam com a trigonometria plana.

Figura 3: Registro Fotográfico das aulas apresentando Triângulo Esférico com bolas de isopor e compreensão sobre círculo máximo e círculo menor na esfera



Fonte: Própria autoria.

8º Encontro: Resolução de problemas sobre triângulos esféricos em grupo, consolidando o conhecimento adquirido. A avaliação foi baseada no desempenho nas atividades e na participação. Nesse encontro específico, tivemos questões apresentadas como a seguir:

1) Qual a distância esférica e em quilômetros entre a cidade do Recife (PE) e Lisboa (Portugal), sabendo que as coordenadas geográficas são dadas na tabela abaixo?

Tabela 1: Coordenadas geográficas das cidades de Recife e Lisboa

CIDADE	LATITUDE	LONGITUDE
Recife	$lat_1 = 8^{\circ}3'15''$ Sul= -8.05428	$long_1 = 34^{\circ}52'53''$ Oeste= -34.8813
Lisboa	$lat_2 = 38^{\circ}42'26''$ Norte= 38.7071	$long_2 = 9^{\circ}8'8''$ Oeste= -9.13549

Figura 4: Registro fotográfico da aula de explanação sobre a distância esférica e em quilômetros entre duas cidades e registro dos alunos resolvendo exercícios de Trigonometria Esférica



Fonte: Própria autoria.

4. Considerações Finais

A aplicação da sequência didática sobre Trigonometria Esférica, com oito encontros de 50 minutos cada, proporcionou uma rica experiência de aprendizagem para alunos do segundo ano do Ensino Médio. A sequência começou com uma introdução à evolução da trigonometria, destacando matemáticos influentes e suas contribuições. Seguiram-se atividades práticas, como a construção de réplicas de instrumentos de navegação, que estimularam a criatividade e a colaboração.

A exploração de conceitos matemáticos foi facilitada por modelos físicos e pelo software GeoGebra, promovendo uma compreensão visual e interativa. A resolução de problemas práticos, como a determinação de distâncias entre cidades, ajudou a consolidar o aprendizado e aumentar a confiança dos alunos. A experiência evidenciou que metodologias ativas e diversificadas podem transformar a sala de aula em um ambiente dinâmico e estimulante, demonstrando que a trigonometria esférica é acessível e relevante para o Ensino Médio.

Referências

- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da matemática.[tradução de helena castro]. São Paulo, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- BRASIL, S. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. [S.l.]: MEC Brasília, DF, 2018. Citado na página 2.
- LIMA, E. L. et al. A matemática do ensino médio. [S.l.]: SBM Rio de Janeiro, 2016. v. 1. Citado na página 2.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. de. Tópicos de história da matemática. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Citado na página 2.