VI Encontro Campinense do PROFMAT
18 de outubro de 2024
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

O PROBLEMA DA TANGENTE E O INFINITO: UMA ABORDAGEM DIDÁTICA PARA O ENSINO BÁSICO

Tiago Emanoel Melo Pereira[1] **- tiagoemelop@gmail.com**
Romildo Nascimento de Lima[2] **- romildo@mat.ufcg.edu.br**
Alânnio Barbosa Nóbrega[3] **- alannio@mat.ufcg.edu.br**

[1]Secretaria Estadual de Educação, Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves - Serra Talhada, PE, Brasil
[2]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil
[3]Universidade Federal de Campina Grande, Unidade Acadêmica de Matemática - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Este trabalho propõe investigar intuitivamente o problema da tangente no Ensino Básico. Embora sua solução envolva alguns conceitos mais abstratos que não são abordados nessa etapa educacional, enxergamos a oportunidade de utilizar o conhecimento prévio dos educandos e aprofundá-lo ainda mais com a introdução de novas ideias. Aqui, trazemos um recorte de estudos realizados na dissertação de Mestrado do PROFMAT intitulada "Investigando Processos Infinitos: Uma Proposta de Disciplina Eletiva sob a Ótica do Novo Ensino Médio" (PEREIRA et al., 2024). Comentamos de forma sucinta um dos temas que lá foram abordados. Na dissertação, além da temática principal deste resumo, abordamos outros problemas, como o problema da velocidade instantânea e o problema da área, que fundamentam nossa análise sobre processos infinitos. Esse estudo nos permitiu desenvolver sequências didáticas adaptadas para o Ensino Básico e elaborar histórias em quadrinhos abordando cada um dos problemas estudados. A partir desses elementos didáticos, criamos e implementamos uma proposta de disciplina eletiva voltada para alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Clóvis Nogueira Alves, localizada em Serra Talhada - PE.*
Palavras-chave*: Problema da Tangente; Processos Infinitos; Divulgação da Matemática.*

1. Introdução

Provavelmente, nosso primeiro contato com o conceito de reta tangente surgiu numa aula de Geometria Plana ou Geometria Analítica, quando observamos os lados de um polígono regular tangenciando uma circunferência ou as posições relativas entre reta e circunferência.

Dizemos que um polígono regular de n lados está circunscrito à circunferência λ quando cada um de seus lados "tocam" num único ponto da circunferência.

Sobre as posições relativas entre a reta s e a circunferência λ, conhecemos três casos. Sejam d a distância entre o centro C da circunferência λ e a reta s e r a medida do seu raio.

- **1º caso:** $d > r$, isto significa que a reta s é exterior à circunferência λ.
- **2º caso:** $d = r$, ou seja, a reta s é tangente à circunferência λ.
- **3º caso:** $d < r$, isto quer dizer que a reta s é secante à circunferência λ.

É bem verdade que essas ideias podem ser facilmente abordadas e compreendidas no Ensino Básico. Contudo, analisando somente estes tópicos, o conceito de reta tangente ficará restrito apenas para a circunferência. Diante desse fato, a grande maioria dos alunos do Ensino Básico definem reta tangente da seguinte maneira: "reta tangente é a reta que toca num único ponto da circunferência".

Mas, afinal, será que o aluno definiu o conceito de forma errada? Qual é o problema de definir reta tangente dessa forma? Será que essa forma de pensar por parte do aluno pode abrir caminhos para o professor de Matemática introduzir novas ideias?

É inegável que, quando pensamos exclusivamente numa reta tangenciando uma circunferência num único ponto, essa forma de definir está correta. Por outro lado, se pensamos nessa definição para outras curvas, devemos ser mais cautelosos. O ponto chave do nosso trabalho é mostrar que esse conceito pode ser generalizado e os conhecimentos prévios que o aluno traz em sua bagagem pedagógica podem ser aproveitados.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Um aspecto fundamental que o professor de Matemática deve se questionar é: por que se preocupar em apresentar um conceito mais geral para reta tangente no Ensino Básico? Um ponto importante é a possibilidade de investigar mais profundamente esse tema, utilizando a noção intuitiva de limite, e apresentar aplicações interessantes, a título de exemplo, estabelecer uma relação entre os conceitos de reta tangente e velocidade instantânea.

Além do mais, a própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece competências e habilidades que justificam e sustentam esse aprofundamento, conforme observamos na habilidade EM13MAT10: "Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise de gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais" (BRASIL, 2017, p.98,99).

O problema da tangente nos instiga a procurar caminhos para determinar a equação da reta t tangente ao gráfico da função $y = f(x)$, num ponto $(a, f(a))$ dado. Quando estudamos Geometria Analítica, aprendemos a determinar a equação de uma reta, se conhecemos sua inclinação e um de seus pontos ou se conhecemos dois de seus pontos. Contudo, é possível investigar esse problema recorrendo a uma abordagem por meio de um processo infinito[1].

Como faremos? Basicamente, a ideia é encontrar o coeficiente angular m_t da reta t, tangente ao gráfico da função $y = f(x)$, aproximando-a por meio de um número indefinido de retas secantes. Isso pode ser feito escolhendo um ponto arbitrário $(x, f(x))$ sobre a curva que esteja nas proximidades do ponto de tangência.

Em seguida, traçamos a reta s, secante à curva, que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. O próximo passo é calcular a inclinação m_s da reta s. Por fim, faremos $x \to a$[2], escolhendo valores do domínio que pertençam aos intervalos $[x, a)$ e $(a, x]$ de modo tal que x seja diferente de a. Para realizar esse procedimento concedemos ao ponto $(x, f(x))$ a habilidade de mover-se livremente sobre o gráfico da função $y = f(x)$.

É fácil ver que, à medida que o ponto $(x, f(x))$ percorre o gráfico e ocupa novas posições, deduzimos que surgem um número indefinido de retas secantes definidas pelo ponto fixo $(a, f(a))$ e pelo ponto móvel $(x, f(x))$. Pensando de forma dinâmica, ficamos com a impressão que as infinitas retas secantes giram na direção da reta tangente t, tendo-a como posição limite. Convidamos o leitor a analisar algumas ilustrações gráficas, a fim de visualizar de uma forma mais dinâmica os passos descritos anteriormente, em (PEREIRA et al., 2024, p.37,38).

De fato, o número indefinido de aproximações entre a reta tangente e as retas secantes acarretam numa proximidade cada vez maior entre suas inclinações. Embora não tenhamos apresentado a definição formal de limite, denotaremos as ideias apresentadas por meio da consagrada expressão

$$m_t = \lim_{x \to a} m_s.$$

Desse modo, significamos que inclinação da reta tangente é o limite das inclinações das retas secantes quando o ponto $(x, f(x))$ tende ao ponto $(a, f(a))$ ao longo do gráfico da função $y = f(x)$.

2. Metodologia

A realização do nosso trabalho seguiu as seguintes etapas:

- Inicialmente, realizamos uma pesquisa bibliográfica em sites e livros de autores que tratam dessa temática, entre eles: (NETO, 2020) e (GUIDORIZZI, 2008);
- Após a realização da pesquisa, nos preocupamos em adaptar o tema e buscar estratégias para abordá-lo no Ensino Básico;
- Apresentamos um problema para cuja solução utilizamos softwares computacionais, entre eles, o GeoGebra e a Planilha Excel, e elaboramos uma história em quadrinhos (HQ) com o objetivo de apresentar o tema de forma lúdica.

[1]Definimos processo infinito como uma sequência de etapas ou operações que continuam indefinidamente. Todavia, insta salientar que é possível obter um resultado finito a partir de um processo infinito. Convidamos o leitor a analisar mais detalhes sobre processos infinitos em (PEREIRA et al., 2024).

[2]De modo intuitivo, esta notação indica que a variável x está aproximando-se cada vez mais do valor a. Podemos pensar nisso como um processo que permite x "caminhar" na direção de a.

ISSN 2764-2631

3. Resultado e discussão

Abordar este tema no Ensino Básico implica em grandes desafios. Além de gerir muito bem o seu tempo e planejar as aulas, o professor de Matemática pode precisar rever o seu próprio entendimento acerca do tema, preparar o material de forma adequada e analisar os melhores recursos didáticos a serem utilizados.

Dentro da nossa estratégia de abordar esse conceito nas aulas, utilizamos o software GeoGebra para realizar construções, explorar conceitos de forma dinâmica e intuitiva e realizar cálculos a fim de ilustrar e resolver o problema apresentado. Por outro lado, utilizamos a Planilha Excel para facilitar a organização das informações obtidas, realizar cálculos de maneira mais eficaz, obter uma melhor visualização dos resultados encontrados e realizar aproximações numéricas de limites. Vejamos um problema que poderia ser abordado.

Problema. Qual é a equação da reta t tangente à curva de equação $y = x^2$ que passa pelo ponto $P(1, 1)$?

Apresentando ideias para a solução. Para determinar a equação de uma reta tangente à curva de equação $y = x^2$, necessitamos de duas informações, sua inclinação e o ponto de tangência. Já que o ponto de tangência foi dado no enunciado, resta-nos apenas determinar a inclinação da tangente que denotaremos por m_t. Lembre-se de que para determinar a inclinação de uma reta substituímos as coordenadas de dois dos seus pontos $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ na expressão $m_t = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.

Entretanto, o problema não permite que façamos isso diretamente, pois não conhecemos um segundo ponto. O que faremos? A ideia é escolher um outro ponto da curva arbitrariamente de modo tal que este ponto esteja nas proximidades do ponto de tangência $P(1, 1)$. Seja $Q(x, x^2)$ o ponto escolhido arbitrariamente e a ele concedemos a "habilidade especial" de mover-se livremente sobre a curva na direção do ponto fixo $P(1, 1)$.

Note que descobrimos uma informação importante sobre a inclinação da reta u secante à curva definida pelos pontos $P(1, 1)$ e $Q(x, x^2)$, vejamos:

$$m_u = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Conforme mencionamos anteriormente o ponto Q pode mover-se livremente sobre a curva, isto significa que o valor de m_u varia à medida que $Q \to P$.

Intervenção via softwares computacionais. As ideias que apresentamos anteriormente tornam-se significativamente mais interessantes com a utilização do GeoGebra e da Planilha Excel. Mas, afinal, como usamos esses softwares para investigar o problema?

Com a utilização do GeoGebra podemos construir a curva $y = x^2$, visualizar sobre a curva os pontos $P(1, 1)$ e $Q(x, x^2)$, mover o ponto Q livremente ao longo da curva, exibir retas secantes definidas pelos pontos P e Q para demonstrar como estas secantes aproximam-se da reta tangente à medida que o ponto Q se desloca na direção de P e por fim, determinar a reta tangente que passa pelo ponto P.

Para analisar o comportamento da variável x (abscissa do ponto Q) em relação ao valor 1 (abscissa do ponto P), podemos organizar uma planilha no Excel que contenha possíveis valores que x pode assumir nos intervalos $(x, 1]$ e $[1, x)$. Essa organização permitirá observar as variações de x quando aproxima-se de 1, tanto pela esquerda quanto pela direita, considerando que x deve ser diferente de 1. A escolha criteriosa dos valores em torno de $x_P = 1$ possibilitará uma análise mais clara das características e tendências dessa variável.

O Excel possui comandos que nos permite realizar cálculos de forma automática, basta inserir a fórmula $m_u = x + 1$ e atribuir possíveis valores para x. Vejamos na Figura 1 as tabelas construídas no Excel:

Após inserir uma certa quantidade de valores cada vez mais próximos de $x = 1$, é interessante instigar os alunos a perceberem certos padrões. Observe que, a partir dos dados apresentados nas tabelas, podemos introduzir, intuitivamente, a ideia de limite.

Com a apresentação dos dados numéricos, fica perceptível que o valor m_u converge para 2 à medida que os valores atribuídos para x aproximam-se cada vez mais de 1 pela esquerda ou pela direita. Desse modo, à medida que $Q \to P$, o valor de $m_u \to 2$. Isto quer dizer que quando P e Q estiverem infinitamente próximos obteremos $m_u = 2$.

Finalmente, de posse das informações $P(1, 1)$ e $m_u = 2$ podemos determinar a equação da reta tangente t utilizando a expressão $y - y_P = m_u \cdot (x - x_P)$, o que nos dá, $y = 2x - 1$.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Figura 1: Atribuindo possíveis valores para x

ATRIBUINDO VALORES PARA X QUE ESTÃO À ESQUERDA DE 1								
x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	...	0,99999	...
m_u	1	1,5	1,75	1,9	1,99	...	1,99999	...

ATRIBUINDO VALORES PARA X QUE ESTÃO À DIREITA DE 1								
x	2	1,75	1,5	1,25	1,1	...	1,0009	...
m_u	3	2,75	2,5	2,25	2,1	...	2,0009	...

Fonte: Os Autores.

A última estratégia apresentada pode consistir da utilização de uma história em quadrinhos (HQ), visando abordar de maneira lúdica o problema da tangente no Ensino Básico. A seguir apresentaremos na Figura 2 a capa da HQ e logo em seguida um breve resumo dessa HQ. Veja a versão completa em (PEREIRA et al., 2024, p.154-174).

Figura 2: Capa da história em quadrinhos.

Fonte: Os Autores

Com a elaboração dessa HQ, introduzimos a noção intuitiva de limite para apresentar um conceito mais geral para reta tangente. A leitura proporcionou aos educandos relembrar conceitos utilizados durante a solução do problema apresentado. Por meio desse material textual, também exibimos um manual de instruções para realizar algumas construções no GeoGebra, entre elas: construir uma reta tangente à circunferência dado um ponto; construir retas secantes à circunferência dados dois de seus pontos e construir gráficos de funções. Após construir e analisar o gráfico de outras funções, por exemplo, a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$, o aluno percebe a necessidade de generalizar o conceito de reta tangente.

Utilizar essa história em quadrinhos para abordar a temática revelou-se uma experiência bastante exitosa. Para investigar o problema da tangente no Ensino Básico, aplicamos primeiro semestre letivo do ano 2024, uma sequência didática dentro das aulas da disciplina eletiva Investigando Processos Infinitos, que foi estruturada segundo o desenvolvimento de três etapas.

Na etapa 1 aplicamos uma atividade de sondagem para conhecer e analisar as dificuldades individuais e coletivas da turma sobre o tema. Na etapa 2 realizamos aulas expositivas para analisar o tema e comentar as questões apresentadas na atividade de sondagem. Na etapa 3 revisamos os conceitos estudados a partir do material textual no formato de HQ.

ISSN 2764-2631

Cada uma das etapas dessa sequência didática foi desenvolvida durante duas aulas de cinquenta minutos cada. A aplicação do material textual no formato de HQ se deu apenas no desenvolvimento da última etapa. O leitor poderá consultar mais detalhes em (PEREIRA et al., 2024, p.117-127).

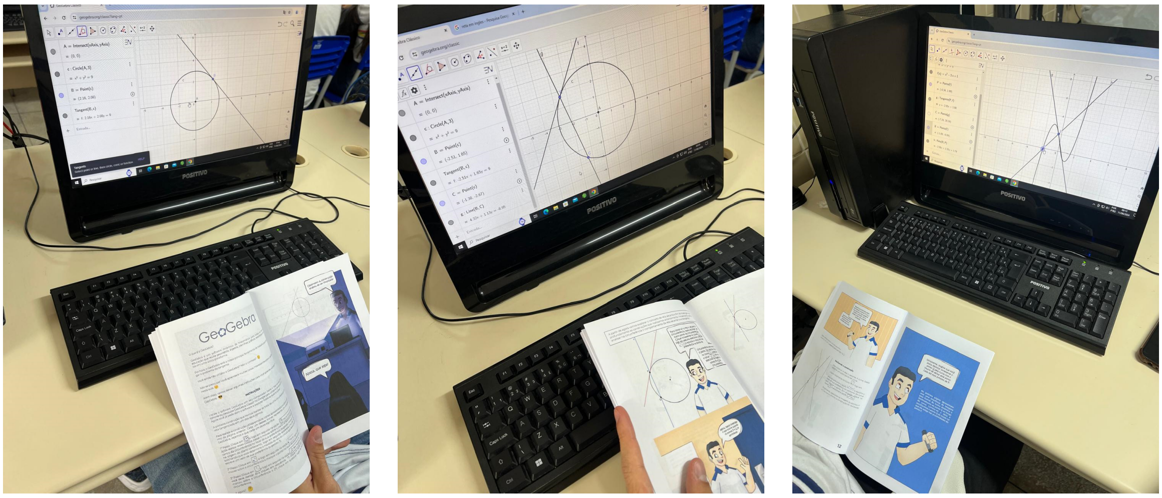
Com o objetivo de maximizar o potencial desse material, dividimos as duas aulas dessa etapa de aplicação em três momentos: 1º) leitura da HQ; 2º) utilização do GeoGebra para realizar as construções apresentadas no manual; 3º) compartilhamento das experiências individuais dos educandos.

As aulas foram realizadas no laboratório de informática da escola. Durante o primeiro momento, os alunos realizaram a leitura individual da HQ. No segundo momento, foram utilizados os computadores do laboratório de informática para realizar as construções previstas no manual da HQ. Veja mais detalhes na Figura 3.

Durante a realização desse momento, prestamos todo suporte necessário aos estudantes, em especial, àqueles que apresentaram maiores dificuldades para utilizar o software. Observamos que a grande maioria dos alunos conseguiu desenvolver as construções consultando apenas o manual.

No terceiro momento, ocorreu o compartilhamento de ideias e troca de experiências sobre as atividades realizadas.

Figura 3: Uma aula de Matemática com história em quadrinhos.



Fonte: Os Autores.

4. Conclusões

Constatamos que é possível apresentar uma ideia mais geral para o conceito de reta tangente no Ensino Básico. Por meio da utilização de abordagens visuais e dinâmicas fornecidas pelo material textual em formato de história em quadrinhos e os softwares computacionais, o professor de Matemática pode proporcionar aos educandos uma aprendizagem significativa ao propor a investigação de conceitos mais aprofundados, como a noção intuitiva de limite.

Referências

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. 2017. Disponível em: ⟨http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file⟩. Citado na página 2.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo, Volume I, 5a edição*. [S.l.: s.n.], 2008. Citado na página 2.

NETO, P. A. P. *O Problema da Tangente*. 2020. Disponível em: ⟨https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/hk2jbnsaawqw.pdf⟩. Citado na página 2.

PEREIRA, T. E. M. et al. Investigando processos infinitos: uma proposta de disciplina eletiva sob a ótica do novo ensino médio. Universidade Federal de Campina Grande, 2024. Citado 4 vezes nas páginas 1, 2, 4 e 5.