VI Encontro Campinense do PROFMAT
18 de outubro de 2024
ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

TRISSECÇÃO DE ÂNGULOS: UM PROBLEMA INSOLUCIONÁVEL?

Wedes Junior Gomes de Oliveira[1] **- e-mail: wedes.junior@aluno.uepb.edu.br**
Arlandson Matheus Silva Oliveira[1] **- e-mail: arlandsonm@servidor.uepb.edu.br**

[1]Universidade Estadual da Paraíba - UEPB, Departamento de Matemática - DM - Campina Grande, PB, Brasil

Resumo: *Neste trabalho, oferecemos uma visão geral de um dos três problemas clássicos da Geometria grega: a trissecção de ângulos. Este problema desafiador envolve dividir um ângulo qualquer em três partes iguais utilizando apenas uma régua não graduada e um compasso. Apresentaremos o problema e, em seguida, demonstraremos matematicamente por que ele não pode ser resolvido com os instrumentos mencionados.*
Palavras-chave*: Trissecção de Ângulos; Números Construtíveis; Método de Arquimedes.*

1. Introdução

A trissecção de ângulos é um dos problemas clássicos da Geometria, que remonta à Grécia Antiga. O desafio consiste em dividir um ângulo qualquer em três partes iguais utilizando apenas régua não graduada e compasso. Este problema intrigou matemáticos por séculos, até que, em 1837, o matemático francês Pierre Laurent Wantzel provou que a trissecção exata de um ângulo arbitrário é impossível de ser realizada com os instrumentos mencionados.

Este problema geométrico admite uma interessante tradução algébrica cuja solução envolve o fato de que "uma equação cúbica de coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes é construtível" (PRECIOSO; PEDROSO, 2011). Com efeito, dizer que um ângulo α pode ser trisseccionado usando os instrumentos de desenho euclidianos significa dizer que tanto α quanto $\alpha/3$ podem ser construídos com tais instrumentos. Supondo estabelecido no plano euclidiano um sistema de coordenadas cartesianas, sejam $O = (0, 0)$ e $I = (1, 0)$. Se fosse sempre possível resolver o problema da trissecção, então seria possível trisseccionar qualquer ângulo $P_\alpha \hat{O} I = \alpha$ dado, em que P_α é tal que OP_α tem comprimento igual a 1. Ora, sabemos que um tal ponto P_α tem coordenadas $P_\alpha = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Deveríamos, então, ser capazes de construir um ponto com coordenadas $P_{\frac{\alpha}{3}} = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right), \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right)$. Sabemos também que $\cos(\alpha) = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$. Em particular, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$, o polinômio $p(x) = 4x^3 = 3x - \frac{1}{2}$ seria redutível sobre $\mathbb{Q}$, o que não é verdade. Para uma sucinta e interessante exposição desta conexão com a Álgebra, remetemos o leitor a Santos (2006).

A profunda conexão com a Álgebra, ao mesmo tempo que evidencia a densidade matemática e histórica desse problema da Geometria clássica, contrasta com o conhecido processo de algebrização que se apoderou da Geometria, marcando seu ensino e prejudicando-o. Salgado (2013) acrescenta que, "no Brasil [. . .] o desestímulo do governamental quanto às Construções Geométricas como disciplina e o Movimento da Matemática Moderna nas décadas de 60 e 70 contribuíram fortemente para o ensino da Geometria Plana da maneira que é feita hoje". Neste contexto, aliadas a uma apresentação da Geometria na educação básica que se utiliza de resolução de problemas e de História da Matemática, as construções geométricas "[. . .] possibilitam o desenvolvimento das habilidades motoras do educando, através do manuseio do material de desenho e representação dos traçados [. . .] [e] o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, da organização e da construção de estratégias pautadas nos conhecimentos prévios, além de propiciar a materialização de situações abstratas" (SOUZA, 2013).

Neste trabalho, que faz parte da pesquisa de mestrado, em andamento, do primeiro autor sob orientação do segundo, no PROFMAT/UEPB, oferecemos uma visão matemática geral do problema da trissecção de ângulos. Apresentaremos o problema e, em seguida, demonstraremos por que ele não pode ser resolvido com os instrumentos de desenho euclidianos para, por fim, discutir sua solução pelo Método de *neusis* de Arquimedes. Acreditamos que há espaço para trabalhos que apresentem e detalhem matematicamente métodos de construções geométricas para problemas de divisão de objetos geométricos em partes congruentes, razão pela qual escolhemos abordar esta temática e que também justifica sua importância.

ISSN 2764-2631

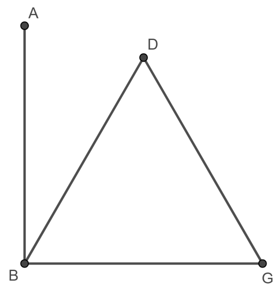
2. Resultado e discussão

2.1 O problema de trissecção de ângulos

Pappus mostra no Livro IV da sua Coleção Matemática como trissectar um ângulo reto:

> Mas se o ângulo dado for reto, tomaremos uma reta BG na qual descreveremos o triângulo equilátero BDG e, dividindo o ângulo compreendido pelas retas DB e BG em duas partes iguais, teremos o ângulo compreendido pelas retas AB e BG dividido em três partes iguais (D'ALEXANDRIE, 1933).

Figura 1: Trissecção do ângulo reto



Os passos para construção são os seguintes:

1) Marca-se um segmento BG, com G sendo um ponto qualquer uma das semirretas que formam o ângulo reto com vértice em B;
2) Com abertura do compasso no comprimento de BG, descrevemos dois arcos de circunferência com centros respectivamente em B e G;
3) Os arcos se interceptam num ponto D, a partir do qual traçamos os segmentos DB e DG;
4) Os ângulos $D\widehat{B}G$ e $D\widehat{G}B$ medem $60°$.
5) Traçando a bissetriz do ângulo $D\widehat{B}G$ obtemos dois ângulos de $30°$. É claro que também $A\hat{B}D = 30°$.

Figura 2: Construção do triângulo equilátero BDG

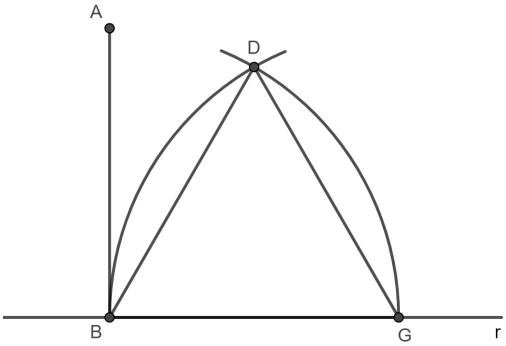
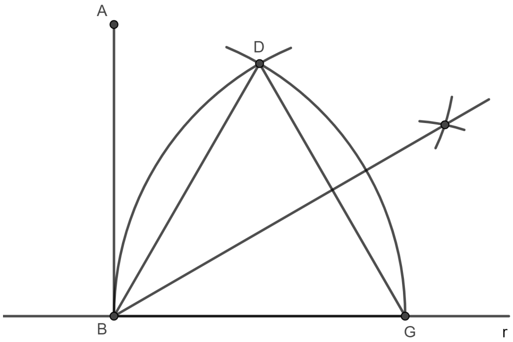


Figura 3: Construção da Bissetriz do ângulo $D\widehat{B}G$



Apoiados em (PRECIOSO; PEDROSO, 2011) e tendo em vista a familiaridade com ângulos de $60°$ no ambiente escolar, vamos mostrar que não tem como cortar tal ângulo em três partes iguais usando só régua não graduada e compasso.

ISSN 2764-2631

Seja $\alpha = 3\theta$. Então:

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta + 2\theta) = \cos(\theta) \cdot \cos(2\theta) - \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(2\theta). \tag{1}$$

Como

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) = \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\theta) &= \operatorname{sen}(\theta + \theta) = \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= 2\operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta), \end{aligned} \tag{3}$$

substituindo as equações (2) e (3) na equação (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(\theta) \cdot [\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)] - \operatorname{sen}(\theta) \cdot 2\operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= \cos(\theta) \cdot [\cos^2(\theta) - 1 + \cos^2\theta] - 2\operatorname{sen}^2(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta). \end{aligned}$$

Se $\alpha = 60°$, então $\theta = \dfrac{60°}{3} = 20°$. Temos:

$$\cos(60°) = \cos(3 \cdot 20°) = 4\cos^3(20°) - 3\cos(20°) = \frac{1}{2}.$$

Fazendo $x = \cos 20°$, chegamos à seguinte equação cúbica

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \tag{4}$$

Daremos aqui um argumento baseado no conhecido Teorema das raízes racionais (ANDRADE, 1989).

As possíveis raízes racionais dessa equação têm a forma $\dfrac{p}{q}$, em que p é divisor de -1 e q é divisor de 8, isto é, $p \in \{\pm 1\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

Assim, se a equação (4) tiver raízes racionais, essas raízes estarão no conjunto:

$$\left\{+1, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}.$$

Daí, é fácil verificar que a equação (4) não tem nenhuma raiz racional. Assim, comprova-se a impossibilidade de dividir um ângulo de 60° em três partes iguais.

2.2 Método de *neusis* de Arquimedes

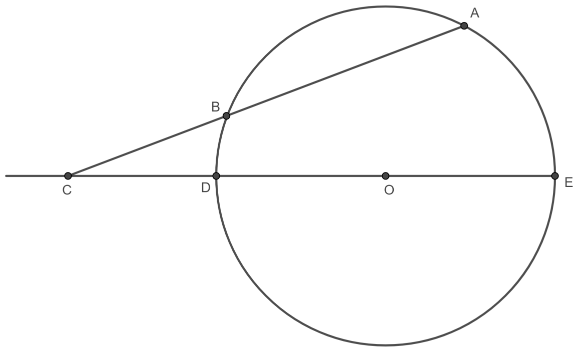
Uma solução geométrica para o problema é o Método de *neusis* de Arquimedes. Através da Proposição 8 do Livro dos Lemas, é possível inferir uma construção que resolve o problema da trissecção do ângulo, reduzindo-o a um problema de nêusis:

Proposição 8: Se AB é uma corda qualquer do círculo cujo centro é O, e se AB for prolongada até C tal que BC seja congruente ao raio; se, além disso, CO encontrar o círculo em D e se prolongado encontrar o círculo pela segunda vez em E, o arco AE será congruente a três vezes o arco BD. (ARCHIMEDES, 1897)

A construção pode ser feita com régua e compasso, a régua necessitando de duas marcações com o comprimento de CB, ou seja, a construção por nêusis opera de forma diversa das construções euclidianas apenas com

ISSN 2764-2631

Figura 4: Trissecção do ângulo por nêusis

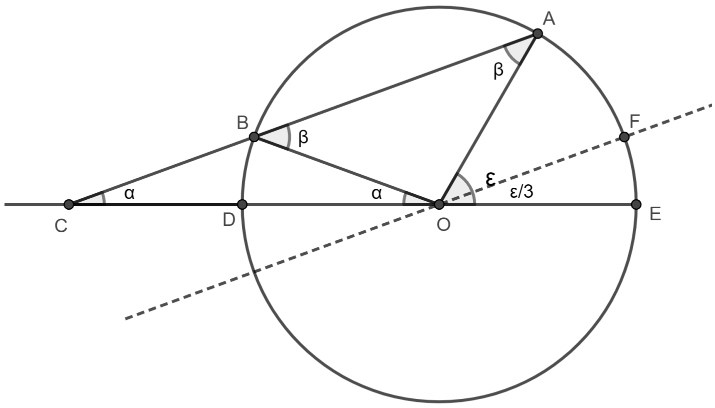


régua não graduada e compasso.

Seja dada uma circunferência como na Figura (5), de raio r e com um ângulo $A\widehat{O}E = \epsilon$, o qual desejamos trissectar. Determinemos o segmento BC de comprimento igual a r, com B sobre a circunferência e C sobre o prolongamento de OE, de tal modo que o ponto A, B e C são colineares. Tracemos uma reta paralela a AC que passa no ponto O cortando a circunferência em F.

Veja que $OF \| CA$; logo, $F\widehat{O}E = B\widehat{C}O = \alpha$, pois são ângulos correspondentes. Por outro lado, temos $O\widehat{A}C = A\widehat{O}F = \beta$, pois são ângulos alternos internos. Observe que os triângulos OAB e COB são isósceles de bases AB e CO respectivamente, pois $CB = BO = AO = r$. Assim $B\widehat{C}O = D\widehat{O}B = \alpha$ e $O\widehat{A}B = A\widehat{B}O = \beta$. Do teorema do ângulo externo segue que $A\widehat{B}O = \beta = 2\alpha$. Mas, como $A\widehat{B}O = O\widehat{A}B = \beta = 2\alpha$ e $A\widehat{O}F = \beta = 2\alpha$, podemos concluir que $A\widehat{O}F = 2F\widehat{O}E = 2\alpha$. Traçando a bissetriz no ângulo $A\widehat{O}F$, teremos trisseccionado o ângulo $A\widehat{O}E$. Sendo $\epsilon = 3\alpha$, temos $F\widehat{O}E = \dfrac{\epsilon}{3}$, como queríamos.

Figura 5: Justificativa da trissecção por nêusis



3. Conclusões

Pelo exposto, concluímos que a impossibilidade de trissectar qualquer ângulo vem da limitação imposta pelos instrumentos de desenho adotados, a qual, curiosamente, tem a interessantíssima interface algébrica por nós discutida de forma concisa. Métodos exatos e aproximados de divisão de ângulos fazem parte de nossa pesquisa em curso, a qual contempla não só a pesquisa e o detalhamento matemático de tais métodos, mas também a preocupação por torná-los acessíveis a professores de Matemática que queiram incorporá-los a suas aulas.

ISSN 2764-2631
Universidade Federal de Campina Grande
Universidade Estadual da Paraíba

Referências

ANDRADE, L. N. de. Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. *RPM 14*, 1989. Citado na página 3.

ARCHIMEDES, S. T. L. H. *The works of Archimedes*. [S.l.]: CUP Archive, 1897. Citado na página 3.

D'ALEXANDRIE, P. La collection mathématique, trad. *Paul Ver Eecke*, v. 2, p. 213, 1933. Citado na página 2.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. Construções euclidianas e o desfecho de problemas famosos da geometria. *RECEN-Revista Ciências Exatas e Naturais*, v. 13, n. 2, p. 167, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.

SALGADO, J. de A. *Reflexões quanto à importância das Construções Geométricas no ensino da Geometria Plana*. [S.l.]: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2013. Citado na página 1.

SANTOS, J. C. de S. O. Another approach to the trisection problem. *The Mathematical Gazette*, 2006. Citado na página 1.

SOUZA, R. *O resgate do ensino das construções geométricas na educação básica*. [S.l.]: Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Citado na página 1.