

Apresentação do Curso

Luiz Antônio da Silva Medeiros⁽¹⁾

`medeiros@ufcg.edu.br`

⁽¹⁾UAMAT / UFCG

UFCG, 2019.2

Outline

- 1 Razão de seção
- 2 Condição para alinhamento de três pontos

Outline

- 1 Razão de seção
- 2 Condição para alinhamento de três pontos

DEFINIÇÃO

Definição

Dados A, B e C pontos distintos, colineares, em um plano π , com coordenadas

$$A(x_A, y_A), \quad B(x_B, y_B) \quad \text{e} \quad C(x_C, y_C).$$

Chama-se **Razão de Seção** do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ pelo ponto C o número real r , tal que

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Observação

O sinal de r só depende do sentido entre $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$.

INTERPRETAÇÃO

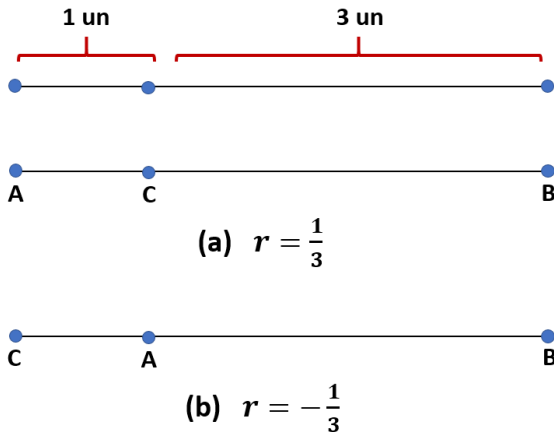


Figura: Interpretação Razão de Seção

CÁLCULO

- AB é paralelo ao Eixo x

$$y_A = y_B = y_C \Rightarrow r = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}.$$

- AB é paralelo ao Eixo y

$$x_A = x_B = x_C \Rightarrow r = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}.$$

- AB não é paralelo ao Eixo x nem ao Eixo y .

$$r = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}.$$

ILUSTRAÇÃO CASO 3.

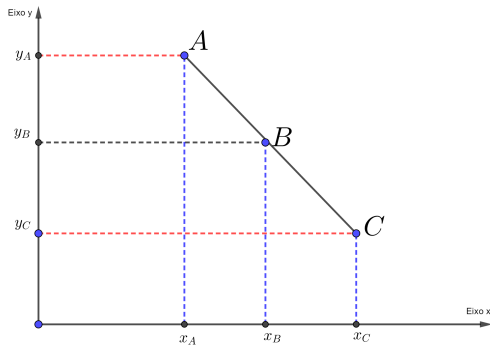


Figura: Caso em que a reta é oblíqua

ILUSTRAÇÃO CASO 3.

Aplicando o Teorema de Tales, obtemos

$$\frac{x_C - x_A}{AC} = \frac{x_B - x_C}{BC}$$

e

$$\frac{y_C - y_A}{AC} = \frac{y_B - y_C}{BC}.$$

Logo,

$$r = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C}.$$

EXEMPLO

Example

Determinar as coordenadas dos pontos C e D que dividem o segmento AB em três partes iguais. Considere $A(-1, 7)$ e $B(11, -8)$.

CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA A COLINEARIDADE

Teorema

Sejam $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ as coordenadas de três pontos em relação a um sistema ortogonal de eixo xOy . Então,

$$A, B \text{ e } C \text{ são colineares} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA A COLINEARIDADE

Suponha que os três pontos são colineares. Temos os seguintes casos a considerar:

- 1º Dois pontos coincidem, por exemplo $A = B \Rightarrow x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Neste caso a matriz A terá duas linhas iguais a zero, logo seu determinante é zero.
- 2º Os três pontos são distintos e pertencem ao eixo x . Neste caso $y_1 = y_2 = y_3$, e a matriz A terá a segunda coluna múltipla da terceira, logo seu determinante é zero.
- 3º Os três pontos são distintos e pertencem ao eixo y . Neste caso $x_1 = x_2 = x_3$, e a matriz A terá a primeira coluna múltipla da terceira, logo seu determinante é zero.
- 4º Os três pontos são distintos e pertencem a uma reta oblíqua (não paralela ao eixo x , nem paralela ao eixo y).

Seja r a razão em que C divide AB (note que $r \neq -1$). Observe que:

$$\begin{aligned}\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} &= r = \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} \\ \Rightarrow (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_3) &= (x_2 - x_3) \cdot (y_3 - y_1) \\ \Rightarrow x_3(y_1 - y_2) + y_3(x_2 - x_1) + 1 \cdot (x_1y_2 - x_2y_1) &= 0 \\ \Rightarrow D = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} &= 0.\end{aligned}$$

RECÍPROCA

Suponha que $D = 0$, ou seja:

$$x_3(y_1 - y_2) - y_3(x_1 - x_2) + 1 \cdot (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Ou ainda,

$$(x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) = (x_2 - x_3) \cdot (y_3 - y_1).$$

Temos novamente três casos a considerar:

RECÍPROCA

Considerando a igualdade

$$(x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_3) = (x_2 - x_3) \cdot (y_3 - y_1), \quad (H)$$

temos novamente três casos a considerar:

- Se $x_3 = x_1$ então $(x_2 - x_3) \cdot (y_3 - y_1) = 0$. Assim, $x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$ ou $y_3 = y_1 \Rightarrow A = C$, Em qualquer caso os pontos são colineares.
- Se $y_1 = y_3$ então $(x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_3) = 0$. Assim, $x_1 = x_3 \Rightarrow A = C$ ou $y_2 = y_3 \Rightarrow y_1 = y_2 = y_3$, Em qualquer caso os pontos são colineares.
- Suponha, sem perda de generalidade que $x_3 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_3$.

CONTINUAÇÃO DA RECÍPROCA

Suponha que $x_3 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_3$. Então, da hipótese (H),

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_3} \neq -1.$$

Chamemos de r a estes dois quocientes iguais e consideremos o ponto $D(x_4, y_4)$ que divide AB na razão r .

Por definição de razão de seção,

$$r = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_4}.$$

CONTINUAÇÃO DA RECÍPROCA

Comparando (14) e (14), temos:

$$r = \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3}$$

e

$$r = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_4} = \frac{y_4 - y_1}{y_2 - y_4}.$$

Que implica, $x_3 = x_4$ e $y_3 = y_4$, ou seja $C = D$. Como A, B, D são colineares e $D = C$, segue o resultado.

EXEMPLO

- 1 Mostrar que os pontos $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ e $C(7, 9)$ são colineares.
- 2 Para que valores de x os pontos $A(x, x)$, $B(3, 1)$ e $C(7, -3)$ são colineares?
- 3 Se $A(0, t)$, $B(t, -4)$ e $C(1, 2)$, para que de t existe o triângulo ABC ?

EQUAÇÃO DA RETA

Seja r a reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Seja $P(x, y)$ um outro ponto (qualquer) da reta r . Então A, B e P são colineares. Dessa forma,

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ou seja,

$$r: (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2.$$

ou

$$r: ax + by = c.$$

ANÁLISE DA EQUAÇÃO DA RETA

- Se $y_2 = y_1$ então $a = 0$ e $r : y = d$ (reta paralela ao eixo x)
- Se $x_2 = x_1$ então $b = 0$ e $r : y = \bar{d}$ (reta paralela ao eixo y)
- Se $y_2 \neq y_1$ e $x_2 \neq x_1$ então $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $r : y = \alpha x + \beta$ (reta oblíqua).

Teorema

A toda reta r do plano cartesiano está associado ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

TEOREMA

Teorema

A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com a, b, c constantes reais com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, está associada uma única reta r cujos pontos $P(x, y)$ são soluções da equação dada.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Vamos provar o caso em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Sejam $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$ pontos dois a dois distintos que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$. Então,

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow ax_1 = -by_1 - c$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0 \Rightarrow ax_2 = -by_2 - c$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0 \Rightarrow ax_3 = -by_3 - c$$

(1)

CONTINUAÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Aplicando as propriedades de determinantes de matrizes obtemos

$$\begin{aligned}
 a \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} ax_1 & y_1 & 1 \\ ax_2 & y_2 & 1 \\ ax_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -by_1 - c & y_1 & 1 \\ -by_2 - c & y_2 & 1 \\ -by_3 - c & y_3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -by_1 & y_1 & 1 \\ -by_2 & y_2 & 1 \\ -by_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -c & y_1 & 1 \\ -c & y_2 & 1 \\ -c & y_3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-b) \begin{vmatrix} y_1 & y_1 & 1 \\ y_2 & y_2 & 1 \\ y_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 1 & y_1 & 1 \\ 1 & y_2 & 1 \\ 1 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \blacksquare
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

CONTINUAÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Assim,

$$a \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Como $a \neq 0$ então

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Que implica dizer que quaisquer três pontos que satisfazendo a equação dada são colineares. Logo, a equação define uma reta.

CONCLUSÃO

Quaisquer pontos distintos satisfazendo a equação $ax + by + c = 0$ são colineares. Assim, a equação define uma reta.

Observação

Esse Teorema mostra que, dada uma equação da forma $ax + by + c = 0$, o conjunto dos pares (x, y) que a satisfazem é uma reta.

Observação

Esse Teorema mostra também que só os pontos que satisfazem à equação $ax + by + c = 0$ pertencem à reta, portanto, um ponto está sobre uma reta se, e somente se, suas coordenadas verificam a equação da reta.

EXEMPLOS

- 1 Verifique se os pontos $A(2, 2)$, $B(4, 1)$ e $C(7, -1)$ pertencem à reta de equação

$$x + 2y = 6.$$

- 2 Qual é a equação da reta que passa pelo ponto $A(2, 5)$ e que a reta de equação $x + y = 1$ num ponto B , tal que $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$.