Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

Luiz Antônio da Silva Medeiros[(1)]

medeiros@ufcg.edu.br

[(1)]UAMAT / UFCG

UFCG, 2019.2

Outline

1 Métodos Iterativos para Sistemas Lineares
- Motivação

2 Métodos Iterativos para Sistemas Linereas

Outline

1 Métodos Iterativos para Sistemas Lineares
- Motivação

2 Métodos Iterativos para Sistemas Linereas

Método do Ponto Fixo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a, b]$ um intervalo que contem uma raiz ξ da equação

$$f(x) = 0.$$

O **Método do Ponto Fixo** consiste em transformar a equação (3) em uma equação equivalente

$$\phi(x) = x$$

e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de aproximações de ξ pela equação de recorrência

$$x_{k+1} = \phi(x_k).$$

Método do Ponto Fixo

Assim, se a sequência $\{x_k\}$ convergir para um $\hat{x}$ e com hipótese adicionais sobr a função ξ, por exemplo exigindo a continuidade, então

$$\begin{aligned} x_k \to \hat{x} \quad &\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \phi(x_k) \\ &\Rightarrow \quad \hat{x} = \phi(\hat{x}) \\ &\Rightarrow \quad f(\hat{x}) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Exemplo

Para a equação $x^2 + x - 6 = 0$ temos várias funções de iteração, por exemplo:

- $\phi_1(x) = 6 - x^2$
- $\phi_2(x) = \sqrt{6 - x}$
- $\phi_3(x) = \frac{6}{x} - 1;$
- $\phi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Algoritmo MPF

Considere $\phi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$ e uma estimativa de erro $\varepsilon > 0$.

- Defina uma aproximação inicial x_0.
- Enquanto $|f(x_k)| \geq \epsilon$ ou Faça:
  - $x_{k+1} = \phi(x_k)$
- Imprima x_k como solução aproximada.

Observação

Pode-se utilizar como critério de parada a condição $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, *mas isso não implica necessariamente que* $|x_k - \xi| < \varepsilon$.

Qual função usar?

Teorema

Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num itervalo I. Seja ϕ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$. Se

(i) ϕ *e* ϕ' *são contínuas em* I,

(ii) $|\phi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$,

(iii) $x_0 \in I$

então a sequência $\{x_k\}$ *gerada pelo processo iterativo* $x_{k+1} = \phi(x_k)$ *converge para* ξ.

Demonstração

Vamos demonstrar que

(I) $x_0 \in I \Rightarrow x_k \in I$

(II) $\lim_{k \to \infty} x_k = \xi$.

Demonstração de I

Para qualquer $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$x_{k+1} - \xi = \phi(x_k) - \phi(\xi).$$

como ϕ é contínua e diferenciável em I, pelo Teorema do Valor Médio existe c_k entre x_k e ξ tal que

$$\phi'(c_k)(x_k - \xi) = \phi(x_k) - \phi(\xi).$$

Portanto,

$$x_{k+1} - \xi = \phi(x_k) - \phi(\xi) = \phi'(c_k)(x_k - \xi).$$

Continuação Demonstração de I

De $x_{k+1} - \xi = \phi'(c_k)(x_k - \xi)$, segue que

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \xi| &= |\phi'(c_k)| \cdot |x_k - \xi| \\ &< M \cdot |x_k - \xi| \leq |x_k - \xi| \end{aligned}$$

Ou seja, a distância entre x_{k+1} e ξ é estritamente menor do a distância entre x_k e ξ e, como I está centrado em ξ, temos que $x_k \in I \Rightarrow x_{k+1} \in I$.
Como, por hipótese, $x_0 \in I$, então $x_k \in I, \forall k \in \mathbb{N}$.

Demonstração de II

Observe que :

$$|x_k - \xi| = |\phi(x_{k-1}) - \phi(\xi)| = |\phi'(c_{k-1}) \cdot (x_{k-1} - \xi)| \leq M \cdot |x_{k-1} - \xi|.$$

Então,

$$|x_k - \xi| \leq M^k \cdot |x_0 - \xi|.$$

Aplicando o limite, temos

$$0 \leq \lim_{k \to \infty} |x_k - \xi| \leq \lim_{k \to \infty} M^k |x_0 - \xi|$$

Como $0 < M < 1$, então $\lim_{k \to \infty} M^k = 0$, assim

$$\lim_{k \to \infty} |x_k - \xi| = 0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} x_k = \xi.$$

Exercício

Considere a equação $x^2 + x - 6 = 0$ e $\xi = 2$. Analise a convergência da sequência $\{x_k\}$ para cada função de iteração abaixo:

- $\phi_1(x) = 6 - x^2$
- $\phi_2(x) = \sqrt{6 - x}$
- $\phi_3(x) = \frac{6}{x} - 1$;
- $\phi_4(x) = \frac{6}{x+1}$

Ordem de Convergência

Definição

Seja $\{x_k\}$ *uma sequência que converge para um número* ξ *e seja* $e_k = x_{k+1} - \xi$ *o erro na iteração* $k+1$. *Se existir um número* $p > 1$ *e uma constante* $C > 0$, *tais que*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

então p *é chamada ordem de convergência da sequência* $\{x_k\}$ *e* C *é a constante assintótica do erro.*

Observação

Se $\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = C, \quad 0 < |C| < 1$ *então a convergência é pelo menos linear.*

Ordem de Convergência do MPF

Teorema

O Método do Ponto Fixo tem convergência apenas linear.

Demonstração

Existe c_k entre x_k e ξ tal que

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \xi = \phi(x_k) - \phi(\xi) = \phi'(c_k) \cdot (x_k - \xi)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \xi}{x_k - \xi} = \lim_{k\to\infty} \phi'(c_k) \\ &= \phi'\left(\lim_{k\to\infty} c_k\right) = \phi'(\xi) = C. \end{aligned} \tag{2}$$

Das hipóteses do Teorema 1, temos $|C| < 1$. Portanto, o MPF converge linearmente para uma solução.

Motivação

Dado um Sistema Linear $Ax = b$, procuramos um sistema equivalente $x = CX + g$, isto é:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Cx + g$$

De modo que, definindo $\phi(x) = Cx + g$ aplicamos o Método do Ponto Fixo, obtendo a seguinte definição.

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = Cx_k + g.$$

Método de Gauss-Jacobi

Suponha que $a_{kk} \neq 0, \forall 1 \leq k \leq n$. O Método de Gauss-Jacobi consiste em escrever a matriz A como soma de duas matrizes $D + C$, onde D é a matriz diagonal formada pelos respectivos elementos da diagonal de A e $C = A - D$. Assim,

$$Ax = b \Rightarrow (D + C)x = b \Rightarrow Dx = b - Cx \Rightarrow x = D^{-1}(b - Cx).$$

Método de Gauss-Jacobi

O Método de Gauss-Jacobi consiste em escrever o sistema $Ax = b$ como:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_2 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n) \\
\vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_2 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1})
\end{aligned}$$

Fórmula de Iteração do Método de Gauss-Jacobi

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k) \\
x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k) \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^k)
\end{aligned}
$$

Um Critério de Convergência

Teorema

Se A é diagonalmente dominante, isto é,

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1, \quad onde \quad \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

então o Método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{X^k\}$ *que converge a solução do sistema dado, independente da escolha da aproximação inicial*

$$X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}.$$

Exemplos

Para quais sistemas abaixo temos garantias do Método de Gauss-Jacobi converge?

1.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ + 6x_2 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ + 6x_2 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Exemplos

Aplique duas iterações do Método de Gauss-Jacobi ou use $\varepsilon = 0.05$ como critério de convergência em cada um dos sistemas abaixo.

1.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ + 6x_2 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

Suponha que $a_{kk} \neq 0, \forall 1 \leq k \leq n$. O Método de Gauss-Seidel consiste em escrever a matriz A como soma de três matrizes $L + D + U$, onde D é a matriz diagonal formada pelos respectivos elementos da diagonal de A, e L, U são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, obtidas a partir de A. Assim,

$$AX = b \Rightarrow (L + D + U)X = b \Rightarrow (L + D)X = b - UX$$

Método de Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
(L+D)X^{k+1} &= b - UX^k \\
&\Rightarrow DX^{k+1} = b - LX^{k+1} - UX^k \\
&\Rightarrow X^{k+1} = D^{-1}(b - LX^{k+1} - UX^k).
\end{aligned}
$$

Fórmula de Iteração do Método de Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k) \\
x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k) \\
x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - a_{34}x_4^k \cdots - a_{3n}x_n^k) \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{k+1})
\end{aligned}
$$

Um Critério de Sassenfeld

Teorema

Considere o sistema $Ax = b$, *onde* $A = [a_{ij}]$. *Sejam*

- $\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\cdots+|a_{1n}|}{|a_{11}|}$.
- $\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1+|a_{j1}|\beta_2+\cdots+|a_{j(j-1)}|\beta_{j-1}+|a_{j(j+1)}|+\cdots+|a_{jn}|}{|a_{jj}|}$.

Se $\beta = \max_{1\leq k\leq n}\{\beta_k\} < 1$, *o Método de Gauss-Seidel converge a uma solução do sistema dado qualquer que seja a aproximação inicial* X^0.

Observações

- Se $\beta < 1$ então $E^{k+1} < E^k$. Mais ainda,

$$E^k \leq \beta E^{k-1} \leq \beta(\beta E^{k-2})) \leq \cdots \leq \beta^k E^0.$$

- Se A é diagonalmente dominante, então o sistema $Ax = b$ satisfaz o critério de Sanssemfeld.

Exemplos

Para quais sistemas abaixo temos garantias do Método de Gauss-Seidel converge?

1

$$\begin{aligned} 3x_1 &+ x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 &&= 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ + 6x_2 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Exemplos

Aplique duas iterações do Método de Gauss-Jacobi ou use $\varepsilon = 0.05$ como critério de convergência em cada um dos sistemas abaixo.

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ & + & 6x_2 & + & 8x_3 & = & -6 \end{array}$$