

Apresentação do Curso

Luiz Antônio da Silva Medeiros⁽¹⁾

medeiros@ufcg.edu.br

⁽¹⁾UAMAT / UFCG

UFCG, 2019.1

Outline

1 Divisão de Polinômios

ALGUMAS IDENTIDADES

$$(a) \quad (x - a)(x + a) = x^2 - a^2$$

$$(b) \quad (x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

$$(c) \quad (x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

$$(d) \quad (1 - x)(1 + x + x^2) = 1 - x^3$$

$$(e) \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(f) \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(g) \quad a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

REPRESENTAÇÃO DE POLINÔMIOS

Representação geral

Um polinômio de grau n na variável x é uma função $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ dada por uma expressão do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são reais ou complexos.

Observação

*Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que o polinômio p assume valores reais.
Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que o polinômio p assume valores complexos.*

REPRESENTAÇÃO DE POLINÔMIOS

Teorema 1

Um polinômio p de grau n está unicamente determinado por seus coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Teorema 2

Um polinômio p de grau n está unicamente determinado por $n + 1$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ onde $x_i \neq x_j$ quando $i \neq j$.

DEMONSTRAÇÃO TEOREMA 2

Desde que $y_i = p(x_i), \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$ tem-se:

$$\begin{array}{rclclclclclcl}
 y_0 & = & a_0 & + & a_1 x_0 & + & a_2 x_0^2 & + & \dots & + & a_n x_0^n \\
 y_1 & = & a_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_1^2 & + & \dots & + & a_n x_1^n \\
 y_2 & = & a_0 & + & a_1 x_2 & + & a_2 x_2^2 & + & \dots & + & a_n x_2^n \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 y_{n-1} & = & a_0 & + & a_1 x_{n-1} & + & a_2 x_{n-1}^2 & + & \dots & + & a_n x_{n-1}^n \\
 y_n & = & a_0 & + & a_1 x_n & + & a_2 x_n^2 & + & \dots & + & a_n x_n^n
 \end{array}$$

DEMONSTRAÇÃO TEOREMA 2

Que em linguagem matricial é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}$$

é uma matriz de *Vandermond*, cujo determinante é dado por

$$\text{determinante}(A) = \prod_{j>i}^n (x_j - x_i) \neq 0.$$

Logo, o sistema tem uma única solução.

EXEMPLO

Determine o polinômio de grau 2 que passa pelos pontos $(0, -1)$, $(1, -1)$ e $(2, 1)$.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Considere dois polinômios na variável x , $A(x)$ e $B(x)$, com B não identicamente nulo. Efetuar a divisão de A por B equivale a encontrar dois polinômios q (quociente) e r (resto), que satisfazem à condição:

$$A(x) \equiv B(x) \cdot q(x) + r(x),$$

com $\text{grau}(q) = \text{grau}(A) - \text{grau}(B)$ e $(r \equiv 0 \text{ ou } \text{grau}(r) < \text{grau}(B))$.

Observação

- *Prova-se que q e r são únicos.*
- *Quando $r(x) \equiv 0$, isto é*

$$A(x) = B(x)q(x),$$

dizemos que A é divisível por B ou que B divide A .

OBSERVAÇÃO

Definição

Dizemos que α é uma raiz do polinômio P se, e somente se, $P(\alpha) = 0$.

Teorema

Se α é raiz do polinômio P , então o resto da divisão de P por $Q(x) = x - \alpha$ é zero, ou seja

$$p(x) = q(x)(x - \alpha).$$

MÉTODOS DE DIVISÃO DE POLINÔMIOS

- (I) Método dos coeficiente a determinar (método de Descartes)
- (II) Método das Chaves
- (III) Quando $B(x) = x - a$, pode-se utilizar o Dispositivo de Briot-Ruffini.

EXEMPLOS

- (I) Utilize o Método dos coeficiente a determinar para encontrar o resto e o quociente da divisão de $A(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ por $B(x) = x^2 + 2$.
- (II) Utilize o Método das Chaves para encontrar o resto e o quociente da divisão de $A(z) = -2z^3 + 8z^2 + 4$ por $B(z) = -2z^2 - 1$
- (III) Utilize o Dispositivo de Briot-Ruffini para obter o resto e o quociente da divisão de $A(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 1$ por $B(t) = t + 1$.

EXEMPLOS

Observação

- *O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $Q(x) = x - a$ é $r(x) = P(a)$.*

Por exemplo, o resto da divisão de

$P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 9$ por $B(x) = x - 1$ é

$$P(1) = (1)^4 - (1)^3 - (1)^2 + (1) - 9 = -9.$$

- *Para obter o quociente da divisão de $P(x)$ por $Q(x) = ax - b$, $a \neq 0$, tomamos o quociente de P por $Q'(x) = x - \frac{b}{a}$ e o dividimos por a . O resto da divisão de P por $Q(x) = ax - b$ é o mesmo resto da divisão de P por Q' .*

DIVISÃO POR $ax - b$

Se dividirmos $P(x)$ por $Q(x) = ax - b$ obtemos

$$P(x) = q(x)(ax - b) + r(x) \quad (1)$$

Estas condições podem ser reescritas da forma

$$P(x) = [aq(x)](x - \frac{b}{a}) + r(x) \quad (2)$$

Comparando (1) com (2) percebemos que

- O quociente da divisão de P por $x - \frac{b}{a}$ é $aq(x)$ onde $q(x)$ é o quociente da divisão de P por $ax - b$;
- O resto da divisão de P por $x - \frac{b}{a}$ é o mesmo resto da divisão P por $ax - b$;

EXEMPLOS

- Encontre o resto e o quociente da divisão de $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x + 6$ por $Q(x) = 2x - 8$
- Um polinômio P quando dividido por $Q_1(x) = x - 3$ apresenta resto -5 , e quando dividido por $Q_2(x) = x + 3$ apresenta resto 6 . Determine o resto da divisão de P por $Q(x) = (x - 3) \cdot (x + 3)$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Definição

Chama-se equação algébrica na incógnita x a toda equação redutível à forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

Teorema

Toda equação algébrica de grau n , $n \in \mathbb{N}$ admite ao menos uma raiz complexa.

DECOMPOSIÇÃO DE POLINÔMIOS

Teorema

O Polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admite a decomposição em n fatores lineares (1º grau). A saber,

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Observação

De acordo com a decomposição de polinômios, concluímos que toda equação algébrica de grau n , admite n , e somente n , raízes complexas.

RELAÇÕES DE GIRARD

Do Teorema da Decomposição em fatores lineares e da igualdade de polinômios, obtemos:

Teorema

Se o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$ admite a decomposição em n fatores lineares dada por

$$P(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

então

- $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
- $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

Observação

O que ocorre quando $a = 1$?

EXEMPLO: RELAÇÕES DE GIRARD

Escreva as equações de Girard para as equações abaixo e obtenha suas raízes.

- $x^2 - 5x + 6 = 0$

- $x^2 - 13x + 22 = 0$

- $x^2 - 3x + 1 = 0$

- $2z^2 - 5z + 9 = 0$

RAIZES RACIONAIS

Teorema

Considere a equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$. Se $\alpha = \frac{p}{q}$, com $(p, q) = 1$, é uma raiz racional dessa equação então p é um divisor de a_0 e q é um divisor de a_n .

RAIZES RACIONAIS: CASO $n = 2$

Considere a equação $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Seja $\alpha = \frac{p}{q}$, com $(p, q) = 1$, uma raiz racional dessa equação. Então:

$$\begin{aligned}a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1 \frac{p}{q} + a_0 &= 0 \Rightarrow \\a_2 p^2 + a_1 p q + a_0 q^2 &= 0 \Rightarrow \\p \cdot (a_2 p + a_1 q) &= -a_0 q^2 \Rightarrow \\p &| (a_0 q^2).\end{aligned}$$

Como p e q não tem divisores em comum, então p e q^2 não tem divisores em comum. Segue que p divide a_0 .

Raízes racionais: Exemplos

- 1 Fatore os seguintes polinômios:

•

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$$

•

$$p(x) = 4x^3 - 3x + 1$$

- 2 Demonstre que

$$z^4 - 2z^3 + z^2 - 2z + 1 = 0$$

não admite raízes racionais.