Funções

Luiz Antônio da Silva Medeiros[1]

medeiros@ufcg.edu.br

[1]UAMAT / UFCG

UFCG, 2019.2

Outline

Outline

Outline

Outline

1. Funções
2. Domínio e Imagem
3. Funções Polinomiais de primeiro grau
4. Caracterização de uma função linear

Definição

Definição

Uma função f é definida por três parte:

(I) *Um conjunto de partida D, chamado domínio da função.*

(II) *Um conjunto de chegada F, chamado contra-domínio da função.*

(III) *Uma regra (Lei de Formação) f, que associada a* **cada** *elemento $x \in D$ um* **único** *elemento $y \in I$.*

Observação

Dizemos que y corresponde a x pela função f, ou escrevemos simplesmente

$$y = f(x).$$

Observações

Notação:

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & F \\ x & \rightarrowtail & y \end{array}$$

Observação

Para que f seja uma função de D em F é necessário que:

(I) *Para cada elemento $x \in D$ existe um, e somente um, $y \equiv y(x) \in F$ tal que y corresponde a x pela regra f.*

(II) *Para cada $x \in D$, o elemento $y = f(x)$ (único) e deve pertencer a F.*

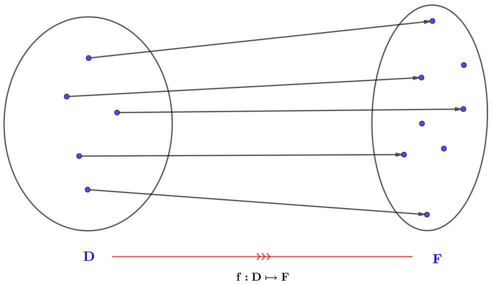
(III) *A Lei de formação f, deve ser clara, não pode suscitar dúvidas ou ambiguidades.*

Exemplos

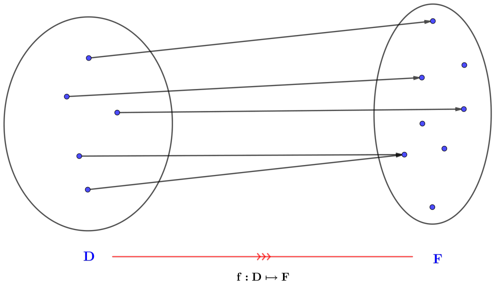
Example

1. Considere $f : T_\pi \to \mathbb{R}$, onde T_π é o conjunto dos triângulos de um plano π e f faz corresponder a cada triângulo $x \in T_\pi$ o número real que representa a área do triângulo x.
2. Sejam a, b números reais dados (fixados). Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = ax + b$
3. Considere $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros f faz corresponder a cada $x \in T_\pi$ o número real que representa a área do triângulo x.

Representação de Função



Representação de Função



Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.

Gráfico de f

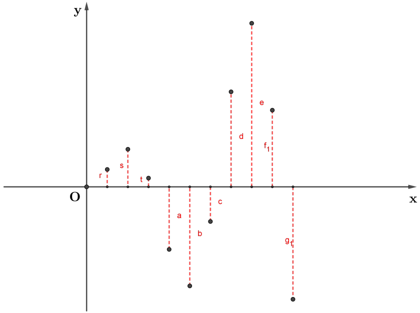
Definimos o Gráfico de f ao conjunto dos pontos da forma (x, y) com $y = f(x)$. Ou seja,

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Observação

- $$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x).$$
- *Não pode existir dois pontos P e Q pertencentes ao gráfico de f com a mesma abiçissa.*

Representação de Função

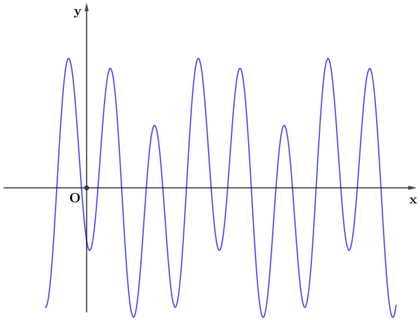


Observação

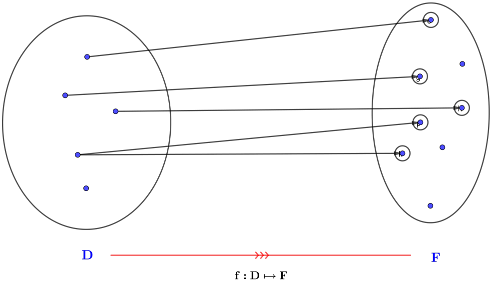
Algumas vezes se identifica a função $f : D \to F$ *com o conjunto dos pontos*

$$\{(x, y) : x \in D \quad e \ y \quad corresponde \ a \quad x \quad pela \ função \quad f\}.$$

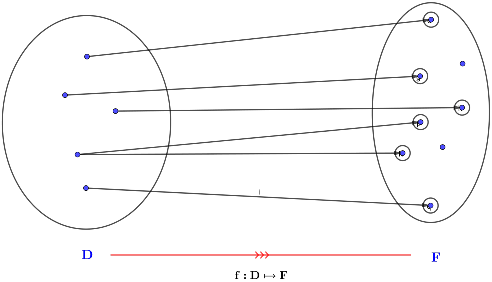
Representação de Função



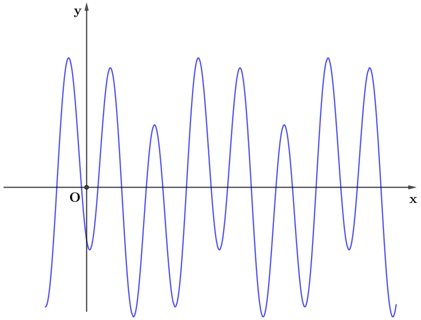
A representação abaixo caracteriza uma função?



A representação abaixo caracteriza uma função?



A REPRESENTAÇÃO ABAIXO CARACTERIZA UMA FUNÇÃO?



Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Caracterização Geométrica da função $y = f(x)$

Para cada $x_0 \in [a, b]$ a reta vertical $x = x_0$ intercepta o gráfico de f em apenas um único ponto.

Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Imagem de f

$$Im(f) = \{w \in \mathbb{R}; \exists x \in [a, b] : z = f(x)\}$$

Exemplos de funções

1. Função Polinomial de grau $n.p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais.

2. Função Racional : função definida pela razão de dois polinômios.

Example

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}.$$

3. Função do tipo exponencial é aquela que pode ser expressa na forma

$$f(x) = A.a^{bx},$$

onde A, a, b são constantes reais com $a > 0$.

Exemplos de funções

1. Funções Trigonométricas

Example

$$f(x) = A * sen(\mu x + B).$$

Example

$$f(x) = tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}.$$

2. Função Logarítmica na base $a > 0$

$$f(x) = log_a(x) \Leftrightarrow a^{f(x)} = x$$

Domínio e imagem de função

O domínio da função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o (maior) conjunto para o qual a regra "$f(x)$" está bem definida.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \ \text{ define um único número em } \ \mathbb{R}.\}$$

O conjunto de valores assumidos por f corresponde a sua imagem.

$$Im_f = \{w \in \mathbb{R} : w = f(x) \ \text{ para algum } \ x \in \mathbb{R}.\}$$

Exemplos:

1. Qual o domínio da função $f(x) = \sqrt{2x-1}$?
2. Qual o domínio da função $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$?
3. Verifique se 1 pertence à imagem da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$
4. Qual é a imagem da função $f(x) = x^3$.

Exemplos:

Seja f a função cujo gráfico é o conjunto de todos os pontos $(x, y), y = f(x)$ dada pela lei de formação abaixo. Determine o domínio e esboce o gráfico de f.

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = x^2 - 3x + 2.$
3. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se} \quad x < 1 \\ x + 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$
4. $f(x) = \frac{(x^3+3x-4)(x^2-9)}{(x^2+x-12)(x+3)}.$

Definição

Definição

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existirem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = ax + b$$

Logo, o gráfico da função afim é uma reta. Recíprocamente, toda reta não vertical é gráfico de uma função afim!!!

Observação

Observação

- *Na expressão $f(x) = ax + b$, o coeficiente a é chamado taxa de variação 0u taxa de crescimento da função f.*

  $$f(x+1) - f(x) = [a \cdot (x+1) + b] - (ax + b) = a$$

  Ou seja, a variação de 1 unidade na grandeza x provoca a variação de a unidades na grandeza $f(x)$.

- *Não há ângulo algum a ser considerado na expressão de f e mesmo considerando o gráfico de f, o ângulo que ele faz com o eixo horizontal depende das unidades escolhidas para medir x e $f(x)$. Em resumo, tem-se a taxa de variação de uma função e coeficiente angular da reta.*

Exemplos

1 Um supermercado está fazendo uma promoção na venda de alcatra: um desconto de 10% é dado nas compras de 3 quilos ou mais. Sabendo que o preço do quilo de alcatra é de $R\$28,00$, pede-se

- O gráfico do total pago em função da quantidade comprada
- a determinação de quais consumidores poderiam ter comprado mais alcatra pagando o mesmo preço.

Exemplos

O Imposto de renda y pago por uma pessoa que teve uma renda líquida x é calculado através de uma expressão $y = \alpha x - \beta$, onde a alíquota α e a parcela a deduzir β dependem da renda x e são dadas peor uma tabela, parcialmente fornecida a seguir:

Renda (R$)	Alíquota (α)	Parcela a deduzir (β)
Até $1.903,98$	0%	-
De $1.903,99$ até $2.826,65$	$7,5\%$	$142,80$
De $2.826,66$ até $3.751,05$	15%	$354,80$
De $3.751,06$ até $4.664,68$	$22,5\%$	$636,13$
Acima de $4.664,68$	$27,5\%$	$869,36$

(a) Se uma pessoa está na terceira faixa e sua renda aumenta de $R\$500,00$ qual será o imposto adicional supondo que este acréscimo não acarrete uma mudança na faixa.

(b) É comum encontrar pessoas que lamentam estar no início de uma faixa de taxação (“ que azar ter recebido esse dinheiro a mais!”). Esse tipo de reclamação é procedente?

(c) Os casais têm a alternativa de apresentar declaração em conjunto ou separado. No primeiro caso, o “cabeça do casal” pode efetuar uma dedução de $R\$3.000,00$ em sua renda líquida, mas em compensação tem que acrescentar a renda do cônjunge. Em que casos é vantajosa a declaração em separado?

Definição

Definição

Uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita função linear quando

$$f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observação

$$(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = ax$$

Logo, o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem.

Problemas relacionados

Definição

Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da fica fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade chama-se **direta** *e, no segundo caso,* **inversa.**. *Nestes casos, as grandezas se dizem* **diretamente proporcionais** *e* **inversamente proporcionais**, *respectivamente.*

Interpretação Grandezas Proporcionais

Suponha que x e y são grandezas diretamente proporcionais. Pela definição, a grandeza x sofrer uma alteração para $\lambda \cdot x$, onde λ é uma constante real, essa operação provocará em y uma mudança de mesma magnitude, isto é, a grandeza y sofrerá uma alteração para $\lambda \cdot y$.

$$x \rightarrowtail \lambda x \Rightarrow y \rightarrowtail \lambda y. \tag{1}$$

Ou seja, a razão entre as grandezas se mantém constante. Assim, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{y}{x} \equiv a \Leftrightarrow y = a \cdot x. \tag{2}$$

Interpretação Grandezas Inversamente Proporcionais

Suponha que x e y são grandezas inversamente proporcionais. Pela definição, a grandeza x sofrer uma alteração para $\lambda \cdot x$, onde λ é uma constante real, então a grandeza y sofrerá uma alteração para $\frac{1}{\lambda} \cdot y$.

$$x \rightarrowtail \lambda x \Rightarrow y \rightarrowtail \frac{1}{\lambda} y \tag{3}$$

Ou seja, o produto entre as grandezas se mantém constante. Assim, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$x \cdot y = a \Leftrightarrow x \cdot y = a. \tag{4}$$

Resumindo...

Grandezas Diretamente Proporcionais

Se x e y são grandezas diretamente proporcionais, então existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = ax$$

Grandezas Inversamente Proporcionais

Se x e y são grandezas inversamente proporcionais, então existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$y \cdot x = a$$

Traduzindo para linguagem de funções...

Grandezas Diretamente Proporcionais

Uma **Proporcionalidade Direta** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais λ, x tem-se

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$$

Grandezas Inversamente Proporcionais

Uma **Proporcionalidade Inversa** é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais λ, x tem-se

$$f(\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot f(x)$$

Traduzindo para linguagem de funções...

Considere a Proporcionalidade Direta $(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Observação

Escrevendo $a = f(1)$, *tem-se* $f(\lambda) = f(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot f(1) = a \cdot \lambda$ *para todo* λ *real. Assim, escrevendo* x *ao invés de* λ *tem-se*

$$f(x) = a \cdot x.$$

Nos problemas relativos à proporcionalidade direta, o que importa muitas vezes é saber apenas que se

$$y_1 = f(x_1) \ \text{ e } \ y_2 = f(x_2),$$

então

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \equiv \ \text{constante.}$$

Traduzindo para linguagem de funções...

De forma análoga, Considere a Proporcionalidade Inversa $(\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot f(x)$.

Observação

Escrevendo $a = f(1)$, *tem-se* $f(\lambda) = f(\lambda \cdot 1) = \frac{1}{\lambda} \cdot f(1) = a \cdot \frac{1}{\lambda}$ *para todo* λ *real. Assim, escrevendo* x *ao invés de* λ *tem-se*

$$f(x) = a \cdot \frac{1}{x}.$$

Definição

Diz-se que uma variável y é inversamente proporcional à n−ésima potência de x (n¿0) se

$$y = y(x) = \frac{1}{x^n}.$$

Exemplos

Caracterização de uma função linear

Teorema

Teorema fundamental da Proporcionalidade Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. As seguinte afirmações são equivalentes:

(I) $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$.

(II) *Pondo* $f(1) = a$, *tem -se* $f(x) = a \cdot f(x)$ *para todo* x *real.*

(III) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* x, y *reais.*

Demonstração: A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1. Página 95. Coleção Professor de Matemática. SBM.

Problemas Relacionados

Example

Se investirmos a quantia x, digamos numa caderneta de poupança, depois de um ano teremos um capital $f(x)$. Claramente, f é uma função crescente. Além disso, tanto faz abrir uma caderneta de poupança com capital inicial nx ou abrir n cadernetas de poupança com capital inicial x, assim $f(nx) = nf(x)$. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade assegura que f é uma função linear. Mais precisamente, se a aplicação de $R\$1,00$ der, no final de um ano, um valor de resgate igual a α, então o capital inicial de x reais se transformará em $f(x) = \alpha x$.