Funções

Luiz Antônio da Silva Medeiros[1]
medeiros@ufcg.edu.br

[1]UAMAT / UFCG

UFCG, 2019.2

Outline

Outline

Outline

Problemas relacionados

Definição

Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da fica fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade chama-se **direta** *e, no segundo caso,* **inversa.**. *Nestes casos, as grandezas se dizem* **diretamente proporcionais** *e* **inversamente proporcionais**, *respectivamente.*

Resumindo...

Grandezas Diretamente Proporcionais

Se x e y são grandezas diretamente proporcionais, então existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$y = ax$$

Grandezas Inversamente Proporcionais

Se x e y são grandezas inversamente proporcionais, então existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$y \cdot x = a$$

Traduzindo para linguagem de funções...

Considere a Proporcionalidade Direta $(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Observação

Escrevendo $a = f(1)$, *tem-se* $f(\lambda) = f(\lambda \cdot 1) = \lambda \cdot f(1) = a \cdot \lambda$ *para todo* λ *real. Assim, escrevendo* x *ao invés de* λ *tem-se*

$$f(x) = a \cdot x.$$

Nos problemas relativos à proporcionalidade direta, o que importa muitas vezes é saber apenas que se

$$y_1 = f(x_1) \;\text{ e }\; y_2 = f(x_2),$$

então

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \equiv \text{ constante.}$$

Traduzindo para linguagem de funções...

De forma análoga, Considere a Proporcionalidade Inversa $(\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot f(x)$.

Observação

Escrevendo $a = f(1)$, *tem-se* $f(\lambda) = f(\lambda \cdot 1) = \frac{1}{\lambda} \cdot f(1) = a \cdot \frac{1}{\lambda}$ *para todo* λ *real. Assim, escrevendo* x *ao invés de* λ *tem-se*

$$f(x) = a \cdot \frac{1}{x}.$$

Definição

Diz-se que uma variável y *é inversamente proporcional à* $n-$*ésima potência de* x *(n¿0) se*

$$y = y(x) = \frac{1}{x^n}.$$

Exemplos

1. Quando dobra o percurso em uma corrida de táxi, o custo da nova corrida é igual ao dobro, maior do que o dobro ou menor que o dobro da corrida original?
2. A escala N de temperatura foi feita com base nas temperaturas máxima e mínima em Nova Iguaçu. A correspondência com a escala Celsius é a seguinte:

^oN	^oC
0	18
100	43

Em que temperatura ferve a água na escala N?

Exemplos

3. A intensidade da luz de uma dada fonte é inversamente proporcional ao quadrado da distância dela.
   a. Expresse o número de velas na intensidade da luz coo função da distância em metros da fonte, sabendo que a intensidade é 225 velas a uma distância de 5 metros da fonte.
   b. Ache a intensidade num ponto distante 12 m da fonte.

Caracterização de uma função linear

Teorema

Teorema fundamental da Proporcionalidade Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. As seguinte afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = nf(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Pondo* $f(1) = a$, *tem -se* $f(x) = a \cdot f(x)$ *para todo* x *real.*
3. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* x, y *reais.*

Demonstração: A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1. Página 95. Coleção Professor de Matemática. SBM.

Problemas Relacionados

Example

Se investirmos a quantia x, digamos numa caderneta de poupança, depois de um ano teremos um capital $f(x)$. Claramente, f é uma função crescente. Além disso, tanto faz abrir uma caderneta de poupança com capital inicial nx ou abrir n cadernetas de poupança com capital inicial x, assim $f(nx) = nf(x)$. O Teorema Fundamental da Proporcionalidade assegura que f é uma função linear. Mais precisamente, se a aplicação de $R\$1,00$ der, no final de um ano, um valor de resgate igual a α, então o capital inicial de x reais se transformará em $f(x) = \alpha x$.

Caracterização de uma função afim

Teorema

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo

$$f(x+h) - f(x) = \phi(h)$$

depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim, isto é, f é da forma

$$f(x) = ax + b$$

EXEMPLO

Example

Suponhamos um ponto que se movimenta sobre um eixo. Sua posição em cada instante t, é determinada por $f(t)$. Diz-se que se trata de um movimento uniforme quando o ponto se desloca sempre no mesmo sentido (f é monótona) e, além disso, em tempos iguais percorre espaços iguais. Matematicamente, no tempo h a partir da posição $f(t)$, o espaço percorrido $f(t+h) - f(t)$ depende apenas de h, mas não de t. Neste caso,

$$f(t) = at + b,$$

onde $a = f(t+1) - f(t)$, espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se *velocidade*.

Proporcionalidade Conjunta

Definição

Diz-se que uma variável y é inversamente proporcional à $n-$ésima potência de x (n¿0) se

$$y = y(x) = \frac{1}{x^n}.$$

Definição

Diz-se que uma variável z é conjuntamente proporcional às variáveis x e y se

$$z = k \cdot xy,$$

onde k é uma constante não nula.

Proporcionalidade Conjunta

Definição

Diz-se que uma variável z é conjuntamente proporcional à $n-$ésima ($n¿0$) potência de x e à $m-$ésima ($m¿0$) potência de y se

$$z = k \cdot x^n y^m.$$

Exemplo Proporcionalidade de várias variáveis

Example

Num ambiente limitado onde A é o número máximo de bactérias suportável pelo ambiente, a taxa de crescimento das bactérias é conjuntamente proporcional ao número presente e à diferença entre A e o número presente. Suponhamos que o número máximo de bactérias suportável pelo ambiente seja $A = 1.000.000$ e que a taxa de crescimento seja de 60 bastérias por minuto, quando existem 1.000 bactérias presentes.

- (a) Expresse a taxa de crescimento das bactérias como função do número de bactérias presentes.
- (b) Encontre a taxa de crescimento quando existem 100.000 bactérias presentes.

Funções como Modelos Matemáticos

Example

Um fabricante de relógio pode reduzir um determinado relógio a um custo de $R\$15$ por unidade. Está estimado que se o preço da venda do relógio for de $R\$x$ cada, então o número de relógios vendidos por semana será $125 - x$

a) Expresse o Lucro semanal do fabricante como uma função de x.
b) Determine o Lucro semanal se o preço de venda for $R\$45$.

Funções como Modelos Matemáticos

Example

Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas, sem tampa, de quadrados de papelão de $30cm$ de lado, cortando quadrados iguais dos quatro cantos e virando para cima os lados. .

a) Se xcm é o comprimeiro do lado do quadrado a ser cortado, expresse o número de centrimetros cúbicos do volume da caixa como função de x.
b) Qual é o domínio da função resultante.

Funções como Modelos Matemáticos

Example

Um terreno retangular às margens de um rio deve ser cercado por todos os lados menos um, ao longo de rio. O material para a cerca custa $R\$12,00$ por metro linear no lado parelelo ao rio e $R\$8,00$ por metro linear nos outros dois lados. Tem-se que $R\$3.600,00$ devem ser gastos com a construção da cerca.

a. Se xm é o comprimento de um lado não paralelo ao rio, expresse como função de x o número de metros quadrados da área do terreno.
b. Qual é o domínio da função resultante.

Funções como Modelos Matemáticos

Example

No planejamento de um café-restaurante estima-se que se houver entre 40 e 80 lugares, o lucro diário será de $R\$8,00$ por lugar. Contudo, se a capacidade de assentos ficar acima de 80 lugares, o lucro diário de cada lugar decrescerá em $R\$0,05$ vezes o número de lugares acima de 80. Se x for o número de assentos disponíveis, expresse o lucro diário como função de x. Suponha que o lucro não seja negativo.