Métodos Iterativos para Zeros de Funções

Luiz Antônio da Silva Medeiros[1]

medeiros@ufcg.edu.br

[1]UAMAT / UFCG

UFCG, 2019.2

Outline

Outline

Outline

Outline

Método do Ponto Fixo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $[a, b]$ um intervalo que contem uma raiz ξ da equação

$$f(x) = 0.$$

O **Método do Ponto Fixo** consiste em transformar a equação (3) em uma equação equivalente

$$\phi(x) = x$$

e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de aproximações de ξ pela equação de recorrência

$$x_{k+1} = \phi(x_k).$$

Qual função usar?

Teorema

Seja ξ *uma raiz da equação* $f(x) = 0$, *isolada num itervalo* I. *Seja* ϕ *uma função de iteração para a equação* $f(x) = 0$. *Se*

(i) ϕ e ϕ' *são contínuas em* I,

(ii) $|\phi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$,

(iii) $x_0 \in I$

então a sequência $\{x_k\}$ *gerada pelo processo iterativo* $x_{k+1} = \phi(x_k)$ *converge para* ξ.

Algoritmo MPF

Considere $\phi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$ e uma estimativa de erro $\varepsilon > 0$.

- Defina uma aproximação inicial x_0.
- Enquanto $|f(x_k)| \geq \epsilon$ ou Faça:
  - $x_{k+1} = \phi(x_k)$
- Imprima x_k como solução aproximada.

Observação

Pode-se utilizar como critério de parada a condição $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, *mas isso não implica necessariamente que* $|x_k - \xi| < \varepsilon$.

Ordem de Convergência

Definição

Seja $\{x_k\}$ *uma sequência que converge para um número* ξ *e seja* $e_k = x_{k+1} - \xi$ *o erro na iteração* $k+1$. *Se existir um número* $p > 1$ *e uma constante* $C > 0$, *tais que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

então p *é chamada ordem de convergência da sequência* $\{x_k\}$ *e* C *é a constante assintótica do erro.*

Observação

Se $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = C, \quad 0 < |C| < 1$ *então a convergência é pelo menos linear.*

Ordem de Convergência do MPF

Teorema

O Método do Ponto Fixo tem convergência apenas linear.

Motivação

Teorema do Valor Intermediário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Teorema dos Intervalos Encaixantes

Considere a sequência $I_k = [a_k, b_k], \quad k \in \mathbb{N}$ de intervalos da reta real tais que

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \ldots$$

Então,

$$\cap_{k=1}^{n} I_k \neq \emptyset$$

Teorema dos Intervalos Encaixantes: 2ª Versão.

Considere a sequência $I_k = [a_k, b_k], \quad k \in \mathbb{N}$ de intervalos da reta real tais que

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \dots$$

Se, $\lim\limits_{k \to \infty} I_k = 0$, então,

$$\cap_{k=1}^{n} I_k = \{p\} \text{ para algum } \; p \in \mathbb{R}.$$

Método da Bisseção

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$. Defina $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Para cada $k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$

- Calcule $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$;
- Se $|f(x_k)| \leq \varepsilon$, Imprima x_k é raiz de f. Pare o Algoritmo.
- Se $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$ faça $a_{k+1} = a_k$ e $b_{k+1} = x_k$.
- Caso contrário, isto é, se $f(a_k) \cdot f(x_k) > 0$ faça $a_{k+1} = x_k$ e $b_{k+1} = b_k$.
- Continue o processo até atingir o critério de parada.

Exemplo

Aplique o Método da Bisseção, com precisão de $\varepsilon = 0.01$ para encontrar a raiz real da equação

$$4x^3 - 4.4x^2 + 9x - 9.9 = 0$$

Discussão & Motivação

Vimos no Método do Ponto Fixo que:

- Uma das condições de convergência é que $|\phi^{'}(x)| \leq M < 1, \forall x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz.
- A convergência do Método será mais rápida quanto menor for

$$|\phi^{'}(\xi)|.$$

Observação

O que o Método de Newton faz, na tentativa de garantir e acelerar a convergência do MPF, é escolher uma função de iteração ϕ tal que $\phi^{'}(\xi) = 0$.

Considere a equação $f(x) = 0$ e ξ uma raiz. Assim,

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \phi(\xi) = \xi, \quad \text{onde} \quad \phi(x) = x + A(x)f(x), \quad A(x) \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x + A(x)f(x) \\ &\rightarrow \phi^{'}(x) = 1 + A^{'}(x)f(x) + A(x)f^{'}(x) \\ &\rightarrow \phi^{'}(\xi) = 1 + A^{'}(\xi)f(\xi) + A(\xi)f^{'}(\xi) \\ &\rightarrow \phi^{'}(\xi) = 1 + A(\xi)f^{'}(\xi) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\phi^{'}(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 + A(\xi)f^{'}(\xi) = 0 \Leftrightarrow A(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}.$$

A escolha natural para A é

$$A(x) = -\frac{1}{f'(x)}.$$

Donde,

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Iteração do Método de Newton

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

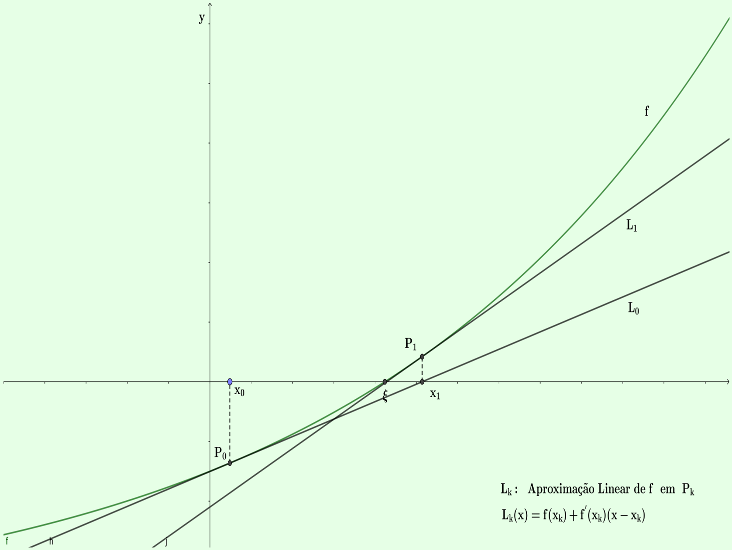
$$\Rightarrow \quad \phi^{'}(x) = 1 - \frac{[f^{'}(x)]^2 - f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2} = \frac{f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2}.$$

Assim, como $f(\xi) = 0$, então $\phi^{'}(\xi) = 0$ desde que $f^{'}(\xi) \neq 0$.

Iteração do Método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \forall k.$$

Interpretação Geométrica do Método de Newton-Raphson



Exemplo

Aplique o Método de Newton-Raphson para achar um zero da função $f(x) = x^2 + x - 6$, considerando $\varepsilon = 10^{-5}$ e $x_0 = 1.5$

Solução: Observe que $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2+x-6}{2x+1}$. Para $x_{k+1} = \phi(x_k)$, temos

x	$f(x)$
$x_0 = 1.5$	-2.25
$x_1 = \phi(x_0) \approx 2.0625$	≈ 0.31641
$x_2 = \phi(x_1) \approx 2.00076$	≈ 0.00380
$x_3 = \phi(x_2) \approx 2.00000$	≈ 0.00000

Convergência do Método de Newton-Raphson

Teorema

Considere a equação $f(x) = 0$ *e seja* ξ *uma raiz de* f. *Suponha que*

(I) $f \in \mathcal{C}^2(I)$, *onde* I *é um intervalo que contém a raiz* ξ *de* f.

(II) $f'(\xi) = 0$

Então, existe um subintervalo J *de* I, *contendo a raiz* ξ, *tal que se* $x_0 \in J$, *a sequência* $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ *gerada pelo Método de Newton-Raphson*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

converge para a raiz ξ.

Demonstração

Basta mostra que, dada $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, existe $J \subset I$, centrado em ξ tal que

(i) ϕ e ϕ' são contínuas em J

(ii) $|\phi'(x)| \leq M < 1, \forall x \in J$.

Observe que:
Por hipótese, $f^{'}(\xi) \neq 0$ e, como $f^{'}$ é contínua em I, é possível obter $I_1 \subset I$ tal que

$$f^{'}(x) \neq 0, \forall x \in I_1.$$

Assim, $f, f^{'}$ e $f^{''}$ são funções contínuas em I_1 e $f^{'}(x) \neq 0, \forall x \in I_1$. Como

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \;\text{ e }\; \phi^{'}(x) = \frac{f(x)f^{''}(x)}{[f'(x)]^2}$$

segue que ϕ e $\phi^{'}$ são funções contínuas em I_1.

Desde que $\phi^{'}(\xi) = 0, \phi^{'}$ é contínua em I_1 com $\xi \in I_1$ e

$$\phi^{'}(x) = \frac{f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2}$$

é possível obter um intervalo $J \subset I_1 \subset I$, centrado em ξ tal que

$$|\phi^{'}(x)| < 1, \forall x \in J.$$

Portanto, se $x_0 \in J$ do Teorema de Convergência do Método do Ponto Fixo, segue que $x_k \in J, \forall k \in \mathbb{N}$ e $\lim_{k \to \infty} x_k = \xi$. ∎

Ordem de convergência do Método de Newton-Raphson

Vamos supor que estão satisfeitas as hipótese do Teorema anterior. Então,

$$x_{k+1} - \xi = x_k - \xi - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow e_{k+1} = e_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Considerando a expansão de Taylor de segunda ordem de f, em torno de x_k temos

$$f(x) = f(x_k) + f^{'}(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f^{''}(c_k)(x - x_k)^2,$$

onde c_k está entre x e x_k.

Como

$$0 = f(\xi) = f(x_k) + f^{'}(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f^{''}(c_k)(\xi - x_k)^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} & f(x_k) = f^{'}(x_k)(x_k - \xi) - \frac{1}{2}f^{''}(c_k)(x_k - \xi)^2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{f^{''}(c_k)}{2f'(x_k)}e_k^2 = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + e_k = e_{k+1} \\ \Rightarrow \quad & \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{1}{2}\frac{f^{''}(c_k)}{f'(x_k)} \end{aligned}$$

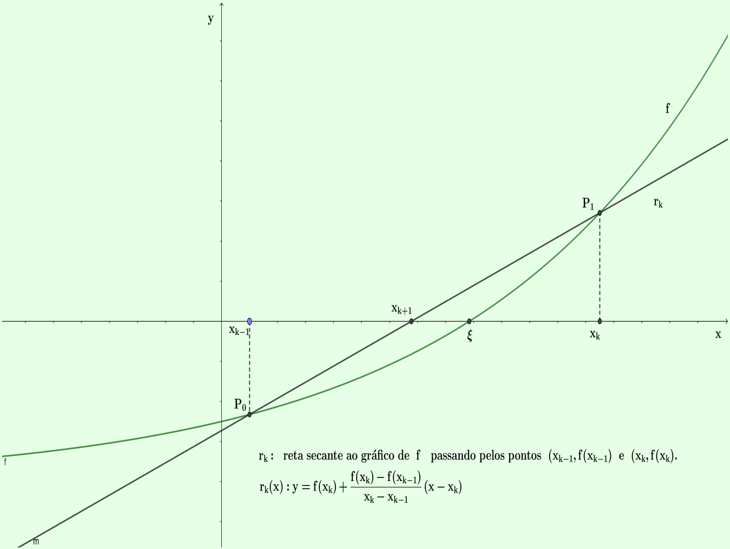
Passando o limite na última igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\frac{f''(c_k)}{f'(x_k)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{f''(\lim_{k\to\infty} c_k)}{f'(\lim_{k\to\infty} x_k)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \\
&= \frac{1}{2}\phi''(\xi) = C \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplos

1. Descreva e aplique um algoritmo, utilizando o Método de Newton, para encontrar a raiz quadrada de um número real positivo.
2. Aplique o Método de Newton-Raphson à equação $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ com $x_0 = 1.9$ Justifique o que acontece.
3. use o Método de Newton-Raphson para obter a menor raiz positiva da equação $\frac{x}{2} = tg(x)$. Utilize $\varepsilon = 10^{-4}$.

Método da Secante



r_k : reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$.

$$r_k(x) : y = f(x_k) + \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

Iteração do Método da Secante

No Método da secante, usamos a seguinte aproximação para a derivada:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Segue que,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}.$$

Ou ainda,

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Observação do Método da Secante

Observação

- *Método da Secante é uma aproximação do Método de Newton-Raphson;*
- *Prova-se que a taxa de convergência do Método da Secante é aproximadamente* $p = 1.618\ldots$
- *O Método da Secante é apropriado em problemas em que o cálculo de* $f^{'}(x)$ *é difícel de obter e ou avaliar, porém o método pode divergir se* $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$.