Apresentação do Curso

Luiz Antônio da Silva Medeiros[1]
medeiros@ufcg.edu.br

[1]UAMAT / UFCG

UFCG, 2019.1

Outline

1. Intervalor contendo alguma raíz de f
2. Divisão de Polinômios
3. Localização das raízes de polinômios

Outline

1. Intervalor contendo alguma raíz de f
2. Divisão de Polinômios
3. Localização das raízes de polinômios

Outline

Motivação

Teorema do Valor Intermediário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Corolário

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Além disso, se f é diferenciável e, (a, b) com $f^{'}$ monótona (crescente ou descrecente) então c é a única raiz de f em (a, b).

Exemplo

Exemplo 1.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = x^3 - 9x + 3$. Verifique se existe uma raiz de f no intervalo $[2, 3]$ e se essa raiz é única.

Exemplo 2.

Seja $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ a função $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$. Verifique se existe uma raiz de f no intervalo $[0, 2]$ e se essa raiz é única.

Algumas Identidades

(a) $(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$

(b) $(x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$

(c) $(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$

(d) $(1-x)(1+x+x^2) = 1 - x^3$

(e) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(f) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(g) $a^n - b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Representação de Polinômios

Representação geral

Um polinômio de grau n na variável x é uma função $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por uma expressão do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde os coefcientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são reais ou complexos.

Observação

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *dizemos que o polinômio* p *assume valores reais.*
Quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *dizemos que o polinômio* p *assume valores complexos.*

Representação de Polinômios

Teorema 1

Um polinômio p de grau n está unicamente determinado por seus coefcientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Teorema 2

Um polinômio p de grau n está unicamente determinado por $n+1$ pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ onde $x_i \neq x_j$ quando $i \neq j$.

Demonstração Teorema 2

Desde que $y_i = p(x_i), \forall i = 0, 1, 2, \ldots, n$ tem-se:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
y_0 & = & a_0 & + & a_1 x_0 & + & a_2 x_0^2 & + & \ldots & + & a_n x_0^n \\
y_1 & = & a_0 & + & a_1 x_1 & + & a_2 x_1^2 & + & \ldots & + & a_n x_1^n \\
y_2 & = & a_0 & + & a_1 x_2 & + & a_2 x_2^2 & + & \ldots & + & a_n x_2^n \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
y_{n-1} & = & a_0 & + & a_1 x_{n-1} & + & a_2 x_{n-1}^2 & + & \ldots & + & a_n x_{n-1}^n \\
y_n & = & a_0 & + & a_1 x_n & + & a_2 x_n^2 & + & \ldots & + & a_n x_n^n
\end{array}
$$

Demonstração Teorema 2

Que em linguagem matricial é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{bmatrix}$$

é uma matriz de *Vandermond*, cujo determinante é dado por

$$determinante(A) = \prod_{j>i}^{n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Logo, o sistema tem uma única solução.

Exemplo

Determine o polinômio de grau 2 que passa pelos pontos $(0, -1), (1, -1)$ e $(2, 1)$.

Divisão de Polinômios

Considere dois polinômios na variável $x, A(x)$ e $B(x)$, com B não identicamente nulo. Efetuar a divisão de A por B equivale a encontrar dois polinômios q (quociente) e r (resto), que satisfazem à condição:

$$A(x) \equiv B(x) \cdot q(x) + r(x),$$

com $grau(q) = grau(A) - grau(B)$ e ($r \equiv 0$ ou $grau(r) < grau(B)$).

Observação

- *Prova-se que q e r são únicos.*
- *Quando $r(x) \equiv 0$, isto é*

$$A(x) = B(x)q(x),$$

dizemos que A é divisível por B ou que B divide A.

Observação

Definição

Dizemos que alpha é uma raiz do polinômio P *se, e somente se,* $P(\alpha) = 0$.

Teorema

Se α *é raiz do polinômio* P, *então o resto da divisão de* P *por* $Q(x) = x - \alpha$ *é zero, ou seja*

$$p(x) = q(x)(x - \alpha).$$

Métodos de Divisão de Polinômios

(I) Método dos coeficiente a determinar (método de Descartes)

(II) Método das Chaves

(III) Quando $B(x) = x - a$, pode-se utilizar o Dispositivo de Briot-Ruffini.

Exemplos

(I) Utilize o Método dos coeficiente a determinar para encontrar o resto e o quociente da divisão de $A(x) = 2x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ por $B(x) = x^2 + 2$.

(II) Utilize o Método das Chaves para encontrar o resto e o quociente da divisão de $A(z) = -2z^3 + 8z^2 + 4$ por $B(z) = -2z^2 - 1$

(III) Utilize o Dispositivo de Briot-Ruffini para obter o resto e o quociente da divisão de $A(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 1$ por $B(t) = t + 1$.

Exemplos

Observação

- *O resto da divisão de um polinômio* $P(x)$ *por* $Q(x) = x - a$ *é* $r(x) = P(a)$.
  Por exemplo, o resto da divisão de $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x - 9$ *por* $B(x) = x - 1$ *é*
  $$P(1) = (1)^4 - (1)^3 - (1)^2 + (1) - 9 = -9.$$
- *Para obter o quociente da divisão de* $P(x)$ *por* $Q(x) = ax - b, a \neq 0$, *tomamos o quociente de* P *por* $Q^{'}(x) = x - \frac{b}{a}$ *e o dividimos por* a. *O resto da divisão de* P *por* $Q(x) = ax - b$ *é o mesmo resto da divisão de* P *por* $Q^{'}$.

Divisão por $ax - b$

Se dividirmos $P(x)$ por $Q(x) = ax - b$ obtemos

$$P(x) = q(x)(ax - b) + r(x) \tag{1}$$

Estas condições podem ser reescritas da forma

$$P(x) = [aq(x)](x - \frac{b}{a}) + r(x) \tag{2}$$

Comparando (1) com (2) percebemos que

- O quociente da divisão de P por $x - \frac{b}{a}$ é $aq(x)$ onde $q(x)$ é o quociente da divisão de P por $ax - b$;
- O resto da divisão de P por $x - \frac{b}{a}$ é o mesmo resto da divisão P por $ax - b$;

Exemplos

- Encontre o resto e o quociente da divisão de $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x + 6$ por $Q(x) = 2x - 8$
- Um polinômio P quando dividido por $Q_1(x) = x - 3$ apresenta resto -5, e quando dividido por $Q_2(x) = x + 3$ apresenta resto 6. Determine o resto da divisão de P por $Q(x) = (x - 3) \cdot (x + 3)$.

Teorema Fundamental da Álgebra

Definição

Chama-se equação algébrica na incógnita x a toda equação redutível à forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

Teorema

Teorema Fundamental da Álgebra Toda equação algébrica com coeficientes complexos (ou reais) de grau $n, n \in \mathbb{N}$ admite ao menos uma raiz complexa.

Decomposição de Polinômios

Teorema

O Polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *admite a decomposição em* n *fatores lineares (1º grau). A saber,*

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n),$$

com $\alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, 2, \ldots, n.$

Observação

De acordo com a decomposição de polinômios, concluimos que toda equação algébrica de grau n, admite n, e somente n, raízes complexas.

Propriedades

Teorema

Se $z \in \mathbb{C}$ é uma raiz do polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com coeficientes reais, então o conjugado de z, $\bar{z}$ também é raiz de p.

Observação

Todo polinômio de coeficientes rais de grau ímpar admite ao menos uma raiz real!

Raizes racionais

Teorema

Considere a equação

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$. *Se* $\alpha = \frac{p}{q}$, *com* $(p, q) = 1$, *é uma raiz racional dessa equação então* p *é um divisor de* a_0 *e* q *é um divisor de* a_n.

Raizes racionais: Caso $n = 2$

Considere a equação $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Seja $\alpha = \frac{p}{q}$, com $(p, q) = 1$, uma raiz racional dessa equação. Então:

$$
\begin{aligned}
a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow \\
a_2p^2 + a_1pq + a_0q^2 = 0 \Rightarrow \\
p \cdot (a_2p + a_1q) = -a_0q^2 \Rightarrow \\
p \big| (a_0q^2).
\end{aligned}
$$

Como p e q não tem divisores em comum, então p e q^2 não tem divisores em comum. Segue que p divide a_0.

Raizes racionais: Exemplos

1. Fatore os seguintes polinômios:
   - $$p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$$
   - $$p(x) = 4x^3 - 3x + 1$$
2. Demonstre que

$$z^4 - 2z^3 + z^2 - 2z + 1 = 0$$

não admite raízes racionais.

Círculo contendo ao menos uma raiz de p

Teorema

Se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é um polinômio com coeficientes reais, então P tem ao menos um zero (real ou complexo) no interior do círculo centrado na origem e de raio igual a

$$\min_{i=1,2} \{\rho_1, \rho_2\},$$

onde

$$\rho_1 = n\frac{|a_0|}{|a_1|} \quad e \quad \rho_2 = \sqrt[n]{\frac{|a_0|}{|a_n|}}.$$

Exemplo

Encontre um intervalo contendo uma raiz do polinômio $p(x) = x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x - 6.8$.

Disco de Gresgorian

Teorema

Se $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *é um polinômio de coeficientes complexos e grau* n*,*

$$A = max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_{n-1}|\} \quad e \quad A' = max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\},$$

então as raízes de p *pertencem ao círculo de centro na origem e raio* $R = 1 + \dfrac{A}{|a_n|}$. *Além disso, tais raízes de* $p(z)$ *estão fora do círculo centrado na origem e raio* $r = \dfrac{1}{1 + \dfrac{A'}{|a_0|}}$.

Demonstração

Com efeito, para $|z| > 1$, e utilizando-se da desigualdade triangular ($|a+b| \geq |a| - |b|$) aplicada em $p(z)$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \geq \cdots \\
&\geq |a_n||z^n| - (|a_{n-1}||z^{n-1}| + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \\
&\geq |a_n||z|^n - A(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1) \\
&= |a_n||z|^n - A\left(\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}\right).
\end{aligned}
$$

Continuação Demonstração

Mas veja que

$$|a_n||z|^n - A\left(\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}\right) = |a_n||z|^n - A\frac{|z|^n}{|z| - 1} + A\frac{1}{|z| - 1} > \left(|a_n| - \frac{A}{|z| - 1}\right)|z|^n.$$

O que acarreta

$$|p(z)| > \left(|a_n| - \frac{A}{|z| - 1}\right)|z|^n.$$

Continuação da Demonstração

Desse modo, se $|z| > 1 + \frac{A}{|a_n|}$, então $|p(z)| > 0$, ou seja, $p(z)$ nunca se anulará para todo $|z| > 1 + \frac{A}{|a_n|}$.

Logo, se z_0 é uma raiz qualquer de $p(z)$, tem-se

$$|z| < 1 + \frac{A}{|a_n|} \tag{5.2}$$

.

Continuação da Demonstração

Considere agora, $|z| < 1$. Seja $x = \dfrac{1}{z}$. Assim,

$$p\left(\frac{1}{z}\right) = a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{1}{x} + a_0.$$

Tome $q(x) := x^n p_n \left(\dfrac{1}{x}\right)$. Daí,

$$\begin{aligned} q(x) &= x^n \left(a_n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{1}{x} + a_0\right) \\ &= a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n \end{aligned}$$

Continuação da Demonstração

Do resultado (5.2) segue que se x_0 é um zero de q, então

$$|x_0| < 1 + \frac{A'}{|a_0|} \Rightarrow |\frac{1}{z}| < 1 + \frac{A'}{|a_0|}.$$

Assim, considerando $z_k \neq 0$ um zero de $q(z)$ e, portanto, $\frac{1}{z_k}$ um zero de $p(z)$, obtém-se que

$$|z_k| > 1 + \frac{A'}{|a_0|} \tag{5.3}$$

.

De (5.2) e (5.3) conclui-se que todos os zeros de $p(z)$ estão localizados na região anular $S = \{z \in \mathbb{C}; r < |z| < R\}$, onde

$$r = \frac{1}{1 + \frac{A'}{|a_0|}} \quad \text{e} \quad R = 1 + \frac{A}{|a_n|}.$$

Exemplos

Determine um intervalo contendo todas as raízes do polinômio dado:

(a) $p(x) = x^5 - 3.7x^4 + 7.4x^3 - 10.8x - 6.8.$

(b) $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1.$

(c) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 10.$

Determinação do número de zeros de um polinômio

Regra de Sinal de Descartes

Dado um polinômio P com coeficientes reais, o número de zeros reais positivos, n_r^+, desse polinômio não excede o número v de variações de sinal dos coeficientes. Ainda mais,

$$v - n_r^+ \quad \text{é inteiro, par e não-negativo.}$$

Observação

Para se determinar o número de zeros negativas do polinômio aplicamos a Regra de Sinal de Descartes ao polinômio $P(-x)$.

Exemplo

Aplique a Regra de Sinal de Descartes para determinar o número de raízes reais positivas do polinômio abaixo:

$$p(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1.$$

Solução:

2	-3	-4	0	1	1
$+$	$-$	$-$		$+$	$+$

Assim,

$$v = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{se} & v - n_r^+ = 0 & \text{então} & n_r^+ = 2 \\ \text{se} & v - n_r^+ = 2 & \text{então} & n_r^+ = 0 \end{cases}$$

Exemplo

Aplique a Regra de Sinal de Descartes para determinar o número de raízes reais positivas do polinômio abaixo:

$$p(x) = 4x^5 - x^3 + 4x^2 - x - 1.$$

Solução:

4	0	-1	$+4$	-1	-1
$+$		$-$	$+$	$-$	$-$

Assim,

$$v = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{se} & v - n_r^+ = 0 & \text{então} & n_r^+ = 3 \\ \text{se} & v - n_r^+ = 2 & \text{então} & n_r^+ = 1 \end{cases}$$

Exemplo

Aplique a Regra de Sinal de Descartes para determinar o número de raízes reais negativas do polinômio abaixo:

$$p(x) = x^7 + 1.$$

Solução:
considere o polinômio $P(-x) = -x^7 + 1$. Assim,

-1	0	0	0	0	0	1
$-$						$+$

Assim,

$$v = 1 \Rightarrow v - n_r^+ = 0 \Rightarrow n_r^+ = 1.$$

O polinômio só tem uma raiz real negativa.

Sequências de Sturm

Teorema de Sturm

Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficiente reais. Se $P(\alpha) \neq 0$ e $P(\beta) \neq 0$, então o número de raízes reais distintas de $P(x) = 0$ no intervalo $[\alpha, \beta]$ é exatamente

$$\tilde{v}(\alpha) - \tilde{v}(\beta)$$

onde $\tilde{v}(\cdot)$ é o número de variações de sinal da sequência $\{g_i(\cdot)\}$ dada por

$$\begin{cases} g_0(x) = P(x) \\ g_1(x) = P'(x) \end{cases}$$

e para $k > 2$ define-se $g_k(x)$ como o resto da divisão de $g_{k-2}(x)$ por $g_{k-1}(x)$, com sinal trocado.

Exemplo

Determine o número de raízes de $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ no intervalor $[2, 3]$.

Solução:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= P(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \\ g_1(x) &= P'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \\ g_2(x) &= \frac{8}{9}x - \frac{10}{9} \\ g_3(x) &= -\frac{99}{16} \end{aligned} \tag{3}$$

Exemplo

Assim,

$g_0(2)$	$g_1(2)$	$g_2(2)$	$g_3(2)$
11	15	$\frac{2}{3}$	$-\frac{99}{16}$
$+$	$+$	$+$	$-$

$g_0(3)$	$g_1(3)$	$g_2(3)$	$g_3(3)$
34	32	$\frac{14}{9}$	$-\frac{99}{16}$
$+$	$+$	$+$	$-$

Ou seja,

$$\tilde{v}(\alpha) = \tilde{v}(2) = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{v}(\beta) = \tilde{v}(3) = 1$$

Portanto, o número de zeros de P no intervalo $[2,3]$ é $\tilde{v}(2) - \tilde{v}(3) = 0$.