31ª Olimpiada Campinense de Matemática
Professor José Vieira Alves
www.ufcg.edu.br/~ocm

Prova do Nível 1

1ª Parte - Questões Objetivas - Gabarito

1) A, 2) C, 3) B, 4) C, 5) A, 6) D, 7) D, 8) C, 9) D, 10) E

2ª Parte - Questões Discursivas - Gabarito

1. Mostre que para quaisquer números naturais $a_1, \cdots, a_k$ vale a desigualdade: $a_1 + \cdots + a_k \leq a_1 \cdots a_k + (k-1)$.

   Resposta: Primeiramente, iremos mostrar que para quaisquer números naturais a e b vale $a + b \leq ab + 1$. Para verificar esta desigualdade, observe que

   $$ab + 1 - (a+b) = (a-1)(b-1).$$

   Como $a-1$ e $b-1$ são números não negativos concluímos que $(a-1)(b-1) \geq 0$. Deste modo, concluímos que $ab + 1 - (a+b) \geq 0$. Fazendo $a = a_1$ e $b = a_2$ concluímos que $a_1 + a_2 \leq a_1 a_2 + 1$. (10 pontos) Temos então,

   $$a_1 + a_2 + a_3 \leq (a_1 a_2 + 1) + a_3 = (a_1 a_2 + a_3) + 1.$$

   Fazendo $a = a_1 a_2$ e $b = a_3$ concluímos que $a_1 a_2 + a_3 \leq a_1 a_2 a_3 + 1$. Destas duas desigualdades, concluímos que $a_1 + a_2 + a_3 \leq a_1 a_2 a_3 + 2$. Utilizando deste modo a mesma desigualdade $k-2$ vezes, obtemos

   $$a_1 + \cdots + a_{k-1} \leq a_1 a_2 \cdots a_{k-1} + (k-2).$$

   Portanto,

   $$a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k \leq (a_1 a_2 \cdots a_{k-1} + a_k) + (k-2).$$

   Fazendo $a = a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$ e $b = a_k$ na desigualdade acima, concluímos que

   $$(a_1 a_2 \cdots a_{k-1} + a_k) \leq a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k + 1.$$

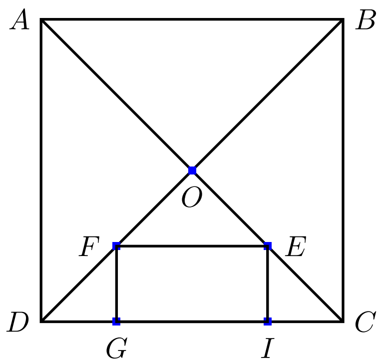
   Finalmente, destas duas desigualdades, obtemos

   $$a_1 + \cdots + a_k \leq a_1 a_2 \cdots a_k + (k-1). \quad \text{(30 pontos)}$$

2. Daniel numerou todas as páginas de seu livro e usou 1002 algarismos. Calcule o número de páginas do livro de Daniel.

   Resposta: Para enumerar as páginas de 1 à 9 utilizamos 9 algarismos. As 90 páginas de 10 à 99 são numeradas utilizando $90 \times 2 = 180$ algarismos. (20 pontos) Portanto, para numerar as páginas de 1 à 99 são utilizados 189 algarismos. Daniel utilizou, portanto, $1002 - 189 = 813$ algarismos para enumerar as páginas a partir da página 100. Com esta quantidade de algarismos é possível enumerar $\frac{813}{3} = 271$ páginas com numeração de 3 dígitos. Portanto o livro tem no total $99 + 271 = 370$ páginas. (20 pontos)

3. Traça-se as duas diagonais de um quadrado $ABCD$, cujo lado mede l centímetros. Une-se os pontos médios de dois lados de um triângulo formado, conforme figura. Sejam E e F de OC e OD, respectivamente. Trace, a partir dos pontos E e F paralelas a BC até encontrarem os pontos G e I de interseção com o lado CD do quadrado. Determine a medida dos lados do retângulo $FEIG$ formado.



   Resposta: Os triângulos ΔDOC e ΔFOE são semelhantes, pois o segmento $\overline{FE}$ é paralelo a $\overline{DC}$. Como F e E são os pontos médios de $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$, respectivamente, concluímos que $\overline{FE}$ mede $\frac{l}{2}$ centímetros. (15 pontos) Agora note que os ângulos $FDG = BDC$ e $ECI = ACD$ medem 45°. Além disso, FGD e EIC medem 90°. Portanto, os triângulos ΔFGD e ΔEIC são retângulos e isóceles. Como os segmentos $\overline{FD}$ e $\overline{EC}$ tem a mesma medida estes triângulos são congruentes. Portanto $\overline{DG}$ e $\overline{IC}$ têm a mesma medida, ademais $\overline{GI}$ tem a mesma medida que $\overline{FE}$, isto é, $\frac{l}{2}$ centímetros. Portanto $\overline{DG}$ e $\overline{IC}$ medem $\frac{l}{4}$ centímetros. Como ΔFGD e ΔEIC são isóceles concluímos que $\overline{FG}$ e $\overline{EI}$ medem $\frac{l}{4}$ centímetros. Portanto as medidas dos lados do retângulo formado são $\frac{l}{2}$ e $\frac{l}{4}$. (25 pontos)

4. José e João decidiram fazer um dado atípico. Ao invés de enumerar as faces de um 1 à 6 como é feito usualmente eles numeraram as mesmas somente com números primos naturais e distintos. Sabendo-se que a soma de todas as faces é igual a 123, responda JUSTIFICANDO o valor do menor número utilizado para numerar uma das face.

   Resposta: Notemos que, se as seis faces fossem compostas por números ímpares a soma deveria ser um número par. Dessa forma, foi utilizado pelos mesmos um número par já que a soma resultou em número ímpar. Como todos os números utilizados foram distintos e só há um número que é par e primo segue que o menor número utilizado para numerar uma das faces foi o 2. (40 pontos)

5. João convidou seus amigos, Arnaldo, Breno, Caio, Daniel, Elton, Fabrício e Gabriel para jogarem um jogo, com as seguintes regras:

I. João pensaria em 10 números naturais;

II. Em cada rodada, Arnaldo iniciaria escolhendo um número natural e ganharia 1 ponto se esse fosse um dos números pensados por João. Em seguida, Breno escolheria outro número natural e também ganharia 1 ponto se esse fosse um dos números pensados por João. Em seguida, seria Caio e assim sucessivamente, procedendo em ordem alfabética;

III. O jogo acabaria quando todos os números pensados por João tivessem sido escolhidos. Assim, ao final de uma rodada, se ainda não tivessem sido escolhidos todos os números pensados por João, eles iniciariam uma nova rodada. Sabendo que:

- João pensou nos números da forma $204 \times n + 17$, com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e 10.
- Arnaldo iniciou a primeira rodada escolhendo o número 1.
- O jogo procedeu de forma que se um jogador escolhesse o número n, o próximo jogador escolheria o número $n + 1$.

a) Quantas rodadas durou o jogo?

b) Quantos pontos cada participante obteve?

Resposta: (a) O último número da forma $204\times n+17$ será $204\times 10+17 = 2040+17 = 2057$. Como a cada rodada há 7 jogadas, sabendo que $2057 = 7 \times 293 + 6$, teremos 294 rodadas. (20 pontos) (b) Note que, $204 = 7 \times 29 + 1$ e $17 = 7 \times 2 + 3$. Logo,

$$\begin{aligned} 204n + 17 &= (7 \times 29 + 1)n + (7 \times 2) + 3 \\ &= 7(29n + 2) + (n + 3). \end{aligned}$$

Assim, a menos que $n + 3 = 7$, ou seja, $n = 4$, $n + 3$ é o resto (r) da divisão de $204n + 17$ por 7. Então,

- $n = 1$ e $r = 4$: ponto para Elton
- $n = 2$ e $r = 5$: ponto para Fabrício
- $n = 3$ e $r = 6$: ponto para Gabriel
- $n = 4$ e $r = 0$: ponto para Arnaldo
- $n = 5$ e $r = 1$: ponto para Breno
- $n = 6$ e $r = 2$: ponto para Caio
- $n = 7$ e $r = 3$: ponto para Daniel
- $n = 8$ e $r = 4$: ponto para Elton
- $n = 9$ e $r = 5$: ponto para Fabrício
- $n = 10$ e $r = 6$: ponto para Gabriel

Portanto, os pontos: Arnaldo (1), Breno (1), Caio (1), Daniel (1), Elton (2), Fabrício (2) e Gabriel (2). (20 pontos)