31ª OLIMPIADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA
PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES
www.ufcg.edu.br/~ocm

PROVA NÍVEL II

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIA DE TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO | NÚMERO

COMPLEMENTO | BAIRRO

CIDADE | UF | CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL) | DDD | TELEFONE FIXO

ESCOLA | DDD | TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E

Instruções

1. A prova será realizada no dia 26/05/2018 das 14h às 18h.
2. Cada questão da 1^a parte vale 10 pontos, enquanto que cada problema da 2^o parte vale 40 pontos.
3. Todas as soluções da 2^o parte devem ser justificadas. Uma simples resposta, sem indicar como foi obtida, receberá uma pontuação inferior.
4. Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a notas de livros. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso não graduados.
5. Nas 10 primeiras questões da 1^a parte assinale com X a alternativa que julgar correta na tabela ao lado. Assinale, com caneta, somente uma alternativa para cada questão.

1ª Parte - Questões Objetivas

1. Considere a um inteiro positivo e $b = a + 1$. Pode-se afirmar que $\dfrac{b^3 - 1}{b - 1}$ é:

   (a) $a^2 + a + 1$ (b) $a^2 + 2a + 2$ (c) $a^2 + 3a + 1$ (d) $a^2 + 3a + 3$ (e) $a^2 + 5a + 1$

2. Se o comprimento de um retângulo é aumentado de 20% e sua largura é aumentada de 50%, então sua área aumenta:

   (a) 120% (b) 110% (c) 100% (d) 80% (e) 70%

3. Num triângulo isósceles, a base mede 10 e os lados iguais medem 13. Existe um outro triângulo isósceles de lados iguais a 13 e com mesma área do primeiro. A base desse triângulo mede?

   (a) 16 (b) 18 (c) 20 (d) 22 (e) 24

4. Considere todos os números, maiores que 8, tais que, quando divididos por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 7 e por 8, deixam sempre resto igual a 1. A soma dos dois menores desses números é:

   (a) 842 (b) 2522 (c) 3362 (d) 912 (e) 2532

5. Os valores de a, b e c, nos itens à seguir, correspondem a comprimentos de segmentos de reta. Determine o item que apresenta três comprimentos de segmentos de reta cujas retas NÃO podem ser utilizadas para formar um triângulo.

   (a) $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$ (b) $a = 4$, $b = 4$ e $c = 3$ (c) $a = 2$, $b = 4$ e $c = 1$ (d) $a = 5$, $b = 4$ e $c = 6$ (e) $a = 1$, $b = 1$ e $c = 1$

6. Dado três pontos no ponto plano cartesiano $A = (1, 1)$, $B = (3, 8)$, $C = (2, 6)$. Quantas são as formas de escolher um ponto de D de modo a formar uma paralelogramo?

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

7. Romildo fez uma viagem sábado, para a cidade B, partindo da cidade A. Ao chegar na cidade B constatou que fez sua viagem com uma velocidade média de $60km/h$. Ao regressar para a cidade A no domingo utilizou o mesmo percurso feito inicialmente, porém devido ao trânsito ao chegar na cidade A constatou que sua viagem foi feita com uma velocidade média de $40km/h$. Considerando as viagens de idade e volta é correto afirmar que a velocidade média das viagens foi de:

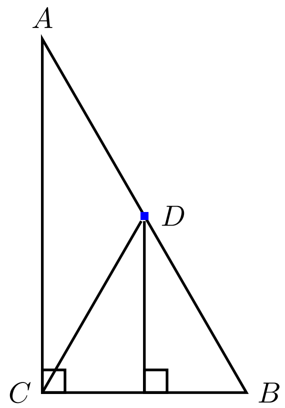
(a) $46km/h$ (b) $48km/h$ (c) $50km/h$ (d) $52km/h$ (e) $100km/h$

8. Em um terreno retangular com lados medindo $28m \times 19m$, pés de árvores devem ser plantadas em sua margem de maneira que pelo menos uma seja plantada em um vértice do terreno. Sabendo que cada árvore deve estar a $5m$ uma da outra, o maior número de árvores que deve ser plantada, é:

(a) 20 (b) 19 (c) 18 (d) 17 (e) 16

9. O triângulo ABC da figura é retângulo em C e o triângulo BDC é equilátero de perímetro medindo $27cm$. A área do triângulo ACD é:

(a) $81\sqrt{2}cm^2$ (b) $\frac{81\sqrt{2}}{3}cm^2$ (c) $\frac{81\sqrt{3}}{4}cm^2$ (d) $81\sqrt{3}cm^2$ (e) $81cm^2$



10. Considere $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ uma função que satisfaz $g(xy) = g(x)g(y)$ quaisquer que sejam os números reais não-nulos x e y. Então $g(1)$ vale:

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) -2 (e) 2

2ª Parte - Questões Discursivas

1. Um computador tem duas teclas: a tecla X subtrai 2 do número que está no visor e a tecla Y divide o número que está no visor por 2 (operações feitas no conjunto dos números inteiros não-negativos). O objetivo de certo jogo é, usando apenas essas duas teclas, obter o número 0 no visor.

   (a) Mostre uma sequência de teclas X e Y que dá a vitória se o número no visor for 32. Essa é a única sequência possível?

   (b) Se $XXYYYX$ é a sequência ganhadora para um certo número, a sequência $YYYXXX$ também é para esse mesmo número?

   (c) Que números não possuem sequências ganhadoras? Justifique.

2. Um homem reparte certa quantidade de dinheiro igualmente entre seus filhos e sobrinhos. Se não tivesse incluído seus três sobrinhos na divisão, cada filho teria recebido \$50 a mais. Por outro lado, se tivesse sua neta no rateio, cada filho e sobrinho teria recebido \$10 a menos. Determine quantos filhos tem o homem e quanto dinheiro ele repartiu.

3. José e João decidiram fazer um dado atípico. Ao invés de enumerar as faces de um 1 à 6 como é feito usualmente eles numeraram as mesmas somente com números primos naturais e distintos. Após numerar as faces eles lançaram o dado uma vez e observaram que a soma da face voltada para cima com a sua face oposta era 32. Sabendo-se que a soma de todas as faces é igual a 123 e que haviam primos gêmeos entre os seis números distribuídos para numerar os dados, determine todos os conjuntos possíveis de 6 números que podem ter sido utilizados para montar esse dado.

   Obs: Dois primos são ditos gêmeos quando a diferença entre os mesmos é igual a 2.

4. Considere um trapézio $ABCD$ de bases BC e AD. Seja E a interseção das diagonais do trapézio. Se $DE = 3BE$ e Área(ABE)=Área(CED)$= 9$, calcule a área do trapézio.

5. Se x e y são números reais tais que $x^3 + y^3 = 5(x + y)$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y \neq 0$, determine o valor de xy.