31ª OLIMPIADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA
PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES
www.ufcg.edu.br/~ocm

PROVA NÍVEL III

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIA DE TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO NÚMERO

COMPLEMENTO BAIRRO

CIDADE UF CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL) DDD TELEFONE FIXO

ESCOLA DDD TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E

Instruções

1. A prova será realizada no dia 26/05/2018 das 14h às 18h.
2. Cada questão da 1^a parte vale 10 pontos, enquanto que cada problema da 2^o parte vale 40 pontos.
3. Todas as soluções da 2^o parte devem ser justificadas. Uma simples resposta, sem indicar como foi obtida, receberá uma pontuação inferior.
4. Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a notas de livros. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso não graduados.
5. Nas 10 primeiras questões da 1^a parte assinale com X a alternativa que julgar correta na tabela ao lado. Assinale, com caneta, somente uma alternativa para cada questão.

1ª Parte - Questões Objetivas

1. José e João decidiram fazer um dado atípico. Ao invés de enumerar as faces de um 1 à 6 como é feito usualmente eles numeraram as mesmas somente com números primos naturais e distintos. Após numerar as faces eles lançaram o dado uma vez e observaram que a soma da face voltada para cima com a sua face oposta era 32. Sabendo-se que a soma de todas as faces é igual a 123 e que haviam primos gêmeos entre os seis números distribuídos para numerar os dados, quantos dados podem ser construídos, a menos de rotação, satisfazendo tais condições? Obs: Dois primos são ditos gêmeos quando a diferença entre eles é igual a 2.

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 3! (e) 0

2. Qual o valor máximo que $k \in \mathbb{R}$ pode assumir de forma que a desigualdade
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \geq k$$
   tenha solução em $\mathbb{R}$?

   (a) 6 (b) $\sqrt{6}$ (c) 36 (d) 1 (e) $6\sqrt{6}$

3. Num jogo de video-game, um jogador pode acertar dois alvos: um vermelho e outro azul. Se o jogador acertar o alvo vermelho, ele marca 15 pontos. Se o jogador acertar o alvo azul, ele marcar 12 pontos. Qual é a quantidade máxima possível de vezes que o jogador tenha acertado o alvo vermelho, sabendo que ele tenha marcado um total de 96 pontos no jogo?

   (a) 4 (b) 8 (c) 3 (d) 2 (e) 6

4. Quantas são as soluções $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, com x primo, da equação
$$x^2 + 375 = y^2.$$

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

5. Seja f uma função real tal que $f(0) = 1$ e para qualquer $x \in \mathbb{R}$ valem as desigualdades
$$f(x) + 5 \leq f(x+10) \qquad \text{e} \qquad f(x+2) \leq f(x) + 1.$$
   Determine o valor de $f(2018)$.

(a) 2020 (b) 2016 (c) 2018 (d) 1018 (e) 1010

6. Seja f uma função real definida por $f(x) = 2\sin(2x) + \cos(2x)$. Seja P o período (menor número real $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$) da função f. Qual é a área da região limitada pelas retas $x = 0, x = P, y = \sqrt{5}$ e pelo gráfico de f?

(a) $\sqrt{5}$ (b) $5\pi^2$ (c) $\pi\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{5}\pi^2$ (e) 4π

7. Na Rua João de Figueiredo, cidade de Umbuzeiro, dois açougues disputam a clientela. O açougue do seu Zé está vendendo carne de alcatra a $R\$18,00$ o quilo. Já o açougue do seu João está vendendo o quilo de alcatra por $R\$16,00$, mas cobrava uma taxa fixa de $R\$2,00$ para limpeza e preparação da carne, independente de quanto de carne o cliente levasse. Maria comprou $R\$72,00$ de carne de alcatra no açougue de seu Zé. O filho de Maria, sabendo que ela não tinha feito um bom negócio, fez as contas. Quanto de carne a mais Maria deixou de levar para casa se a compra tivesse sido realizada no açougue de seu João?

(a) Nada, com esse valor, em ambos os açougues, a quantidade de carne seria a mesma.
(b) O filho de Maria errou a conta, ela realmente fez um bom negócio.
(c) Meio quilo.
(d) 300 gramas.
(e) 375 gramas.

8. Considere um círculo de raio r, origem O, P um ponto do qualquer do círculo e Q um ponto em que $P\widehat{O}Q = 120°$. Determine o lado maior do triângulo POQ.

(a) $\sqrt{3}r$ (b) $\sqrt{2}r$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) r

9. Considere a função $f(x) = 30x^2 + 5x - 10$. Calcule

$$\frac{f(2^{-1}) - f(0)}{f(5^{-1}) - f(0)}.$$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{50}{11}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{50}{12}$

10. Determine x sabendo que $8^9\left(\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + 1\right)^{10} = 4\left(\frac{x^5}{6}\right)^2$.

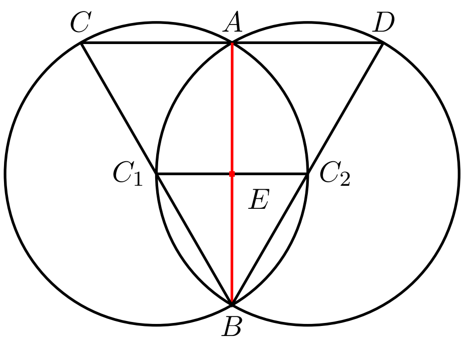
(a) 17 (b) 18 (c) 19 (d) 20 (e) 21

2ª Parte - Questões Discursivas

1. Se x, y, z são números reais positivos, mostre que:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{2}{x}.$$

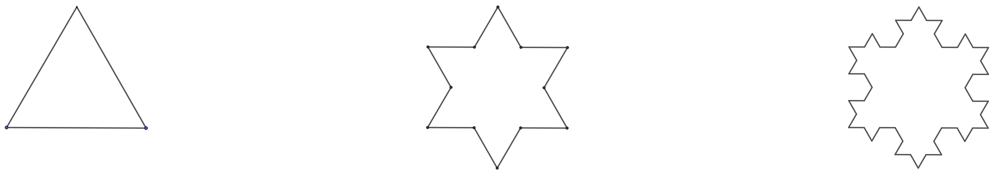
2. Considere duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, conforme figura, que se interceptam nos pontos A e B. Traça-se o segmento de reta CD que passa pelo ponto A e é paralelo ao segmento de reta C_1C_2, onde C é o ponto de interseção com a circunferência de centro C_1, e D é o ponto de interseção com a outra circunferência. Seja E o ponto de interseção de AB com C_1C_2. Mostre que a área do triângulo BCD é 4 vezes a área do triângulo BC_1C_2.



3. Um trapézio de base maior B e base menor b tem cada um de seus lados não paralelos dividido em 11 partes congruentes. Com extremidades nos pontos de divisão, são traçados 10 segmentos paralelos às bases. Sabendo que $B + b = 8$, calcule a soma de todos os segmentos paralelos (incluindo as bases).

4. Ana e Cecília costumam tomar café da manhã na padaria do Zé. Ao entrar na padaria do Zé cada uma recebe uma comanda eletrônica onde são registrados seus respectivos pedidos, cada comanda possui uma sequência de 8 dígitos que vão de 00000000 à 99999999, não havendo duas comandas iguais. No domingo ao entrar na padaria do Zé, Ana olhou sua comanda e viu que a mesma só possuía três números distintos, sendo que os algarismos x e y apareciam 3 vezes cada, enquanto o algarismo z aparecia duas vezes, e comentou isso com Cecília. Sabendo-se dessas informações qual a probabilidade da comanda da cecília conter **exatamente** os mesmos números da comanda da Ana a menos da ordem?

5. Seja F_0 o triângulo equilátero de lado 1. Defina, recursivamente, F_{k+1} a figura obtida de F_k como segue: trisectando cada lado da figura F_k, contruímos um triângulo equilátero, exterior à figura P_k, assentado sobre o segmento do meio do lado trisectado e removemos o segmento do meio do lado trisectado que formou a base do novo triângulo.



(a) Figura F_0 (b) Figura F_1 (c) Figura F_2

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine a área de F_n.

(b) Mostre que F_n não cresce indefinidamente, isto é, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\text{Área}(F_n) \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$