31ª OLIMPÍADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA
PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES
www.ufcg.edu.br/~ocm

Prova do Nível 3

1ª Parte - Questões Objetivas - Gabarito

1) ANULADA, 2) B, 3) A, 4) C, 5) E, 6) C, 7) E, 8) A, 9) B, 10) C

2ª Parte - Questões Discursivas - Gabarito

1. Se x, y, z são números reais positivos, mostre que:

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{2}{x}.$$

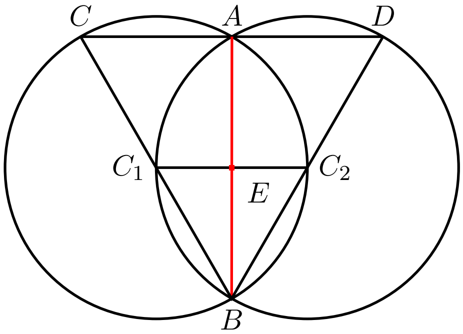
Resposta: Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x-y-z)^2 \geq 0$. Porém,

$$\begin{aligned} (x-y-z)^2 &= ((x-y)-z)^2 \\ &= (x-y)^2 - 2(x-y)z + z^2 \\ &= x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + 2yz + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2xz \geq 0. \quad \text{(10 pontos)} \end{aligned}$$

Portanto, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xz + 2xy - 2yz$. Sendo $x, y, z > 0$, dividindo ambos os membros da desigualdade por xyz, temos

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{2}{x}. \quad \text{(30 pontos)}$$

2. Considere duas circunferências de centros C_1 e C_2, respectivamente, conforme figura, que se interceptam nos pontos A e B. Traça-se o segmento de reta CD que passa pelo ponto A e é paralelo ao segmento de reta C_1C_2, onde C é o ponto de interseção com a circunferência de centro C_1, e D é o ponto de interseção com a outra circunferência. Seja E o ponto de interseção de AB com C_1C_2. Mostre que a área do triângulo BCD é 4 vezes a área do triângulo BC_1C_2.



Resposta: Como CB e DB são diâmetros médios de BC e BD, respectivamente. Assim, o segmento C_1C_2 que é paralelo a CD mede metade deste segmento, ou seja,

$$\overline{C_1C_2} = \frac{1}{2}\overline{CD}. \tag{1}$$

Como C_1C_2 é paralelo à CD, temos que $B\hat{C}_1C_2 = B\hat{C}D$ e $B\hat{C}_2C_1 = B\hat{D}C$. Assim, os triângulos BCD e BC_1C_2 são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Note que, os triângulos BCA e BC_1E também são semehantes, pois $B\hat{C}A = B\hat{C}_1E$ e $C\hat{B}A = C_1\hat{B}A$. Desta semelhança e de (2), segue que

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

De (3), segue que

$$\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BA}.\text{(20 pontos)} \tag{4}$$

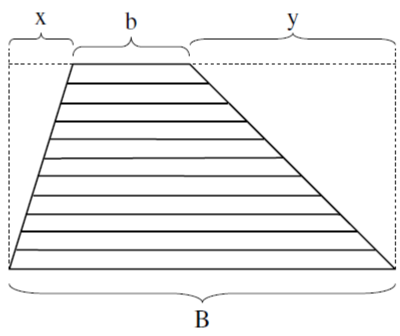
Agora, observe que o quadrilátero AC_2BC_1 é um paralelogramo que é um losango. Assim, suas diagonais AB e C_1C_2 são perpendiculares e se cruzam num ponto que é ponto médio de ambas as diagonais. Então, AB é perpendicular aos segmentos C_1C_2 e CD, pois $AB \perp C_1C_2 \parallel CD$. Portanto, AB é a altura do triângulo BCD e BE é a altura do triângulo BC_1C_2. Logo, usando (1) e (4), obtemos

$$A_{BC_1C_2} = \frac{\overline{C_1C_2}\cdot\overline{BE}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overline{CD}\frac{1}{2}\overline{BA}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{\overline{CDBA}}{2}\right] = \frac{1}{4}A_{BCD}. \tag{5}$$

Consequentemente, $A_{BCD} = 4A_{BC_1C_2}$.(20 pontos)

3. Um trapézio de base maior B e base menor b tem cada um de seus lados não paralelos dividido em 11 partes congruentes. Com extremidades nos pontos de divisão, são traçados 10 segmentos paralelos às bases. Sabendo que $B + b = 8$, calcule a soma de todos os segmentos paralelos (incluindo as bases).

   Resposta: Observando a figura abaixo temos $x + y = B–b$.(10 pontos)



   Considerando uma P.A. em que o comprimento de b é o primeiro termo, e o de B como último, os comprimentos dos segmentos paralelos crescem em P.A. de razão $\frac{x+y}{11} = \frac{B-b}{11}$. (10 pontos) Assim,

$$B = b+(b+r)+(b+2r)+\cdots+(b+11r) = 12b+66r = 12b+66\frac{B-b}{11} = 12b+6(B-b) = 6B+6b = 6(B+b)$$

   Como $B + b = 8$, temos $B = 6 \times 8 = 48$. (20 pontos)

4. Ana e Cecília costumam tomar café da manhã na padaria do Zé. Ao entrar na padaria do Zé cada uma recebe uma comanda eletrônica onde são registrados seus respectivos pedidos, cada comanda possui uma sequência de 8 dígitos que vão de 00000000 à 99999999, não havendo duas comandas iguais. No domingo ao entrar na padaria do Zé, Ana olhou sua comanda e viu que a mesma só possuía três números distintos, sendo que os algarismos x e y apareciam 3 vezes cada, enquanto o algarismo z aparecia duas vezes, e comentou isso com Cecília. Sabendo-se dessas informações qual a probabilidade da comanda da cecília conter **exatamente** os mesmos números da comanda da Ana a menos da ordem?

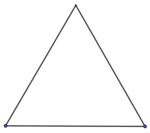
   Resposta: De acordo com o enunciado a comanda de Ana é do tipo $XXXYYYZZ$ a menos de permutações. Notemos que há

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

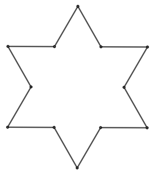
   comandas desse tipo. (15 pontos) Como a comanda Ana já corresponde a uma comanda desse tipo a probabilidade de Cecília ter uma comanda desse tipo é

$$\frac{559}{99999999}. \quad (25 \text{ pontos})$$

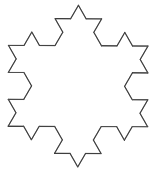
5. Seja F_0 o triângulo equilátero de lado 1. Defina, recursivamente, F_{k+1} a figura obtida de F_k como segue: trisectando cada lado da figura F_k, contruímos um triângulo equilátero, exterior à figura P_k, assentado sobre o segmento do meio do lado trisectado e removemos o segmento do meio do lado trisectado que formou a base do novo triângulo.



(a) Figura F_0



(b) Figura F_1



(c) Figura F_2

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine a área de F_n.

(b) Mostre que F_n não cresce indefinidamente, isto é, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\text{Área}(F_n) \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Resposta: Observe que

- Cada lado de F_0 gera quatro lado de F_1. Assim, o número de lado do polígono F_1 é o número de lado de F_0 vezes quatro, ou seja, $\#lados(F_1) = 3 \cdot 4$.
- Cada lado de F_1 gera quatro lado de F_2. Assim, o número de lado do polígono F_2 é o número de lado de F_1 vezes quatro, ou seja, $\#lados(F_2) = 3 \cdot \#lados(F_2) = 3 \cdot 4^2$.
- Por indução, $\#lados(F_n) = 3 \cdot 4^n$. (10 pontos)

Além disso, a área do polígono F_0 é $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

- Cada lado do polígono F_0 gera um triângulo equilátero cuja área é $\frac{1}{3^2}$ a área do polígono F_0, ou seja,

$$Area(F_1) = Area(F_0) + 3.\frac{1}{3^2}.Area(F_0) = Area(F_0)(1 + 3.\frac{1}{3^2}).$$

- Cada lado do polígono F_1 gera um triângulo equilátero cuja área é $\frac{1}{3^4}$ a área do polígono F_0, ou seja,

$$\begin{aligned} Area(F_2) &= Area(F_1) + \#lados(F_1).\frac{1}{3^4}.Area(F_0) \\ &= Area(F_1) + 3 \cdot 4.\frac{1}{3^4}.Area(F_0) \\ &= Area(F_0)(1 + 3.\frac{1}{3^2} + 4.\frac{1}{3^3}). \end{aligned}$$

Cada lado do polígono F_2 gera um triângulo equilátero cuja área é $\frac{1}{3^6}$ a área do polígono F_0, ou seja,

$$\begin{aligned} Area(F_3) &= Area(F_2) + \#lados(F_2).\frac{1}{3^6}.Area(F_0) \\ &= Area(F_0)(1 + 3.\frac{1}{3^2} + 4.\frac{1}{3^3}) + 3 \cdot 4^2.\frac{1}{3^6}.Area(F_0) \\ &= Area(F_0)(1 + 3.\frac{1}{3^2} + 4.\frac{1}{3^3} + 4^2.\frac{1}{3^5}). \end{aligned}$$

- Seguindo esse racicínio, temos

$$\begin{aligned}
Area(F_n) &= Area(F_0)\left(1+3.\frac{1}{3^2}+4.\frac{1}{3^3}+4^2.\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}\right)\\
&= Area(F_0).\left(1+\frac{3}{4}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right]\right)\\
&= Area(F_0).\left(1+\frac{3}{4}\left[\frac{\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{9}}\right]\right)\\
&= Area(F_0)\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]. \quad \text{(20 pontos)}
\end{aligned}$$

Para o item (b), basta notar que

$$\begin{aligned}
Area(F_n) &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right] \le \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{8}{5}\right]\\
&\le \frac{2\sqrt{3}}{5}.
\end{aligned}$$

Cabe aqui uma observação. Note que

$$\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n > 0 \Leftrightarrow 8\cdot 9^n > 3\cdot 4^n,$$

cuja desigualdade é válida para todo n natural, uma vez que

$$9^n > 4^n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \;\; e \;\; 8 > 3. \quad \text{(10 pontos)}$$