32ª OLIMPÍADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA

PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES

www.mat.ufcg.edu.br/ocm

PROVA NÍVEL III

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIA DE TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO

NÚMERO

COMPLEMENTO

BAIRRO

CIDADE

UF

CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL)

DD

TELEFONE FIXO

ESCOLA

DD

TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E

Instruções

1. A prova será realizada no dia 25/05/2019 das 14 h às 18h.
2. Cada questão da 1^a parte vale 10 pontos, enquanto que cada problema da 2^o parte vale 40 pontos.
3. Todas as soluções da 2^o parte devem ser justificadas. Uma simples resposta, sem indicar como foi obtida, receberá uma pontuação inferior.
4. Não é permitido o uso de calculadora enm consulta a notas de livros. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso não graduados.
5. Nas 10 primeiras questões da 1^a parte assinale com X a alternativa que julgar correta na tabela ao lado. Assinale, com caneta, somente uma alternativa para cada questão.

1ª Parte - Questões Objetivas

1. Em uma pesquisa realizada com 40 pessoas para saber que esportes elas apreciam entre futebol, basquete e vôlei, o resultado foi o seguinte: 15 gostam de futebol, 20 de basquete e 10 gostam de vôlei, 7 gostam de futebol e de basquete, 5 gostam de futebol e de vôlei, 3 gostam basquete e de vôlei e 2 gostam das três modalidades. Quantas pessoas não gostam de nenhum esporte?

   (a) 6

   (b) 7

   (c) 8

   (d) 9

   (e) 10

2. Em um jogo, os inteiros de 1 a 1000 estão escritos ordenadamente em torno de um círculo. Partindo de 1, deve-se riscar os números de 15 em 15, isto é, riscamos $1, 16, 31, \ldots$. O processo contínua até que um número já previamente riscado seja atingido. Quantos números distintos são riscados nesse jogo?

   (a) 66

   (b) 198

   (c) 197

   (d) 1000

   (e) 990

3. Considere a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ satisfazendo

   (a) $f(x) + y = f(y) + x, \forall x, y \in \mathbb{Q}$

   (b) $f(x \cdot y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$

   Para tal f, qual o valor de $f(2019)$?

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2019

   (d) 2020

   (e) Tal função não existe.

4. A área máxima de um retângulo inscrito na elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ é:

   (a) 144

   (b) 12

   (c) 288

   (d) 24

   (e) 48

5. Dados dois conjuntos finitos, A com m elementos e B com n elementos, sendo $m \leq n$ quantas são as funções injetoras que podem ser construídas de A para B?

   Obs: Se n é um inteiro positivo, então $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$

   (a) $\frac{m!}{(m-n)!}$

   (b) $\frac{n!}{(n-m)!}$

   (c) $\frac{m!}{n!(m-n)!}$

   (d) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$

   (e) $\frac{n!}{m!}$

6. Um triângulo ABC é tal que $\overline{AB} = 11cm, \overline{AC} = 17cm$ e $\overline{BC} = 6cm$. Considera-se PB um segmento tangente ao círculo inscrito ao triângulo ABC, como é mostrado na Figura 1. Nestas condições, o perímetro do triângulo APQ é?

   (a) $22cm$ (b) $17cm$ (c) $12cm$ (d) $32cm$ (e) $34cm$

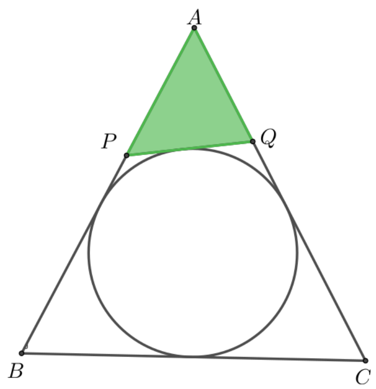


Figura 1:

7. Ao entrar em uma sorveteria com seu filho, uma mãe constatou que a sorveteria tinha a disposição 8 sabores distintos. Se a mãe decidiu comprar um sorvete com 3 bolas para seu filho, quantas são as combinações de sabores possíveis para montar um sorvete?

   São exemplos de escolhas:

   - 2 bolas do sabor A e uma bola do sabor B
   - 3 bolas do sabor A...

   (a) 56
   (b) 92
   (c) 112
   (d) 120
   (e) 121

8. Uma moeda é tal que a probabilidade de um lançamento resultar em "cara" é $1/5$. Um experimento consiste de lançar a mesma sucessivas vezes de forma **independente** (isto é, o resultado anterior não influencia no resultado subsequente) até que ocorra a "cara" pela primeira vez. Qual a probabilidade de que a cara ocorra pela primeira vez havendo uma quantidade ímpar de lançamentos?

   (a) $1/3$
   (b) $1/2$
   (c) $5/9$
   (d) $2/3$
   (e) 1

9. Na probabilidade geométrica, se tivermos uma região B do plano contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B será:

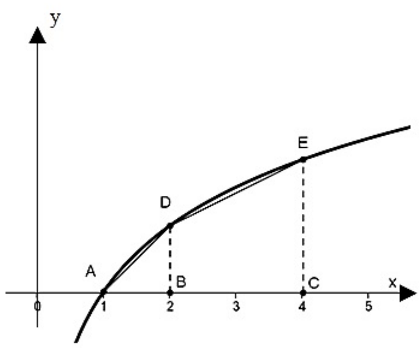
$$p = \frac{\text{Área de } B}{\text{Área de } A}$$

Considerando um jogo de tiro ao alvo, como ilustrado abaixo, no qual sabe-se que um usuário sempre acertará o alvo, qual a probabilidade de que o mesmo atinja uma das regiões numeradas por 5, 7, ou 9?

Obs: os raios dos círculos concêntricos aumentam uniformemente

(a) 1/3 (b) 7/15 (c) 1/2 (d) 7/12 (e) 1/4

10. No gráfico a seguir, os pontos A, B e C, cujas ordenadas são desconhecidas, pertencem ao gráfico da função $y = \log_a^x$, com $a > 1$. Se a área do triângulo ABD mede $0,5cm^2$, então a área do trapézio BCDE é:



(a) $1cm^2$ (b) $3cm^2$ (c) $4,5cm^2$ (d) $8cm^2$ (e) $3,5cm^2$

2ª Parte - Questões Discursivas

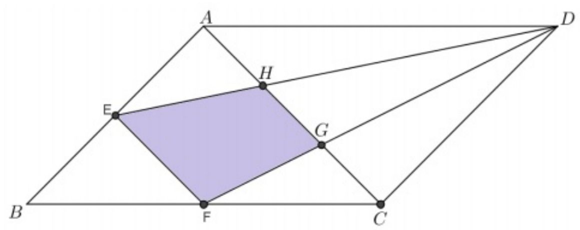
1. Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, uma função satisfazendo às seguintes condições:

   (i) $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$;

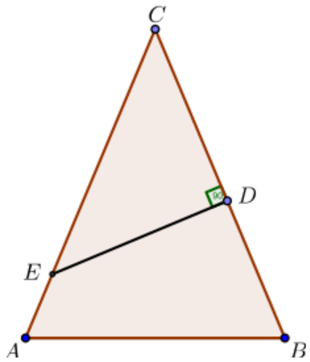
   (ii) $f(x) = 0$, se o algarismo das unidades de x é 4, para todo $x \in \mathbb{Z}^+$.

   Encontre $f(2008)$.

2. O paralelogramo $ABCD$ tem área $48cm^2$ e os pontos E e F são os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $EFGH$?



3. Considere um triângulo isósceles de base 10 e lados 12. Decide-se cortar o triângulo ortogonalmente a uma dos lados de modo que as duas novas figuras geradas possuam a mesma área e o mesmo perímetro, conforme Figura abaixo. Nestas condições, qual o comprimento do lado $\overline{DE}$?



4. Seis amigas, entre elas Alice e Raiane, vão juntas jantar em um restaurante, conhecido regionalmente por suas mesas triangulares, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares. De quantas maneiras essas amigas podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Raiane fiquem juntas, lado a lado, em um mesmo lado da mesa?

5. João e Pedro decidem fazer um jogo de aposta um tanto quanto diferente. Em cada partida do jogo o mesmo é realizado do seguinte modo: Uma moeda honesta será lançada até ocorrer cara pela primeira vez ou então 4 lançamentos terem ocorrido. João aposta 15 reais, por partida, que em até quatro lançamentos ocorrerá alguma vez a face “cara” enquanto Pedro deverá apostar 1 real por rodada que isso não ocorre. Supondo que ambos tenham saldo para jogar mil partidas, quem espera-se que seja o jogador com maior ganho nesse momento e qual o ganho esperado do jogador a frente?