32ª Olimpíada Campinense de Matemática
Professor José Vieira Alves
www.mat.ufcg.edu.br/ocm

Prova do Nível 1

1ª Parte - Questões Objetivas - Gabarito

1) E; 2) C; 3) C; 4) A; 5) B; 6) D; 7) E; 8) C; 9) B; 10) (ANULADA)

2ª Parte - Questões Discursivas - Gabarito

1. Se vale a soma $32^3 + 32^3 + 32^3 + 32^3 = 32^x$. Qual o valor de x?

   Resposta: Primeiramente, observe que a soma do enunciado é equivalente a

   $$(2^5)^3 + (2^5)^3 + (2^5)^3 + (2^5)^3 = (2^5)^x \quad \text{(10 pontos)}$$

   ou seja, usando as propriedades de potências, temos

   $$2^2 \times 2^{15} = 2^{5x}. \quad \text{(10 pontos)}$$

   Consequentemente, chegamos que

   $$2^{17} = 2^{5x} \quad \Rightarrow \quad 5x = 17 \quad \Rightarrow \quad x = 17/5. \quad \text{(20 pontos)}$$

2. Em um condomínio serão construídas 6 casas em um mesmo lado de uma rua. As casas podem ser de tijolo ou de madeira, mas como medida de segurança contra incêndio, duas casas de madeira não podem ser vizinhas. De quantas maneiras se pode planejar a construção das casas desse condomínio?

   Resposta: Observe que, não pode haver 4 casas de madeira, pois teríamos pelo menos duas casas de madeira vizinhas, o que não é permitido.(5 pontos) Assim, faremos uma análise para cada caso:

   Caso 1: Nenhuma casa de madeira, ou seja, todas as casas são de tijolos e, portanto, temos uma maneira. (5 pontos)

   Caso 2: Com apenas uma casa de madeira M e considerando T casa de tijolo temos as seguintes configurações: MTTTTT, TMTTTT, TTMTTT, TTTMTT, TTTTMT e TTTTTM. Ou seja, M pode ocupar todas as 6 posições. Portanto, temos 6 maneiras diferentes. (5 pontos)

Caso 3: Com duas casas de madeira temos as seguintes configurações:

- a primeira casa é de madeira MT logo, a outra casa de madeira pode ocupar 4 posições;
- a primeira casa de madeira está na segunda posição TMT logo, a outra casa de madeira pode ocupar 3 posições;
- a primeira casa de madeira está na terceira posição TTMT logo, a outra casa de madeira pode ocupar 2 posições;
- a primeira casa de madeira está na quarta posição TTTMTM logo, a outra casa de madeira pode ocupar 1 posição.

Neste caso, temos 10 maneiras diferentes.(10 pontos)

Caso 4: Com três casas de madeira temos as seguintes configurações:

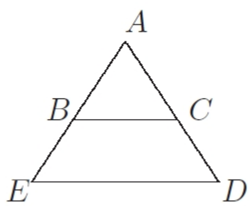
- a primeira casa é de madeira. Temos os seguintes: MTMT logo, a terceira casa de madeira pode ocupar 2 posições ou MTTMTM, ou seja, a terceira casa de madeira pode ocupar 1 posição. Portanto, ao todo temos 3 maneiras diferentes.
- a primeira casa de madeira está na segunda posição TMTMTM logo temos 1 maneira diferente.

Neste caso, temos 4 maneiras diferentes. (10 pontos)

Assim, a construção das casas pode ser planejada de 21 maneiras diferentes.(5 pontos)

3. Uma reta intersecta dois lados de um triângulo equilátero e é paralela ao terceiro lado. Se essa reta divide a região triangular em um trapézio e um triângulo menor de modo que ambos tenham o mesmo perímetro. Qual a razão das áreas do triângulo menor e do trapézio?

Resposta: Considere o triângulo ADE, o triângulo ABC e o trapézio $BCDE$ como na figura abaixo:



(5 pontos) Seja x a medida do lado do triângulo ADE e y a medida do lado do triângulo ABC. Como o perímetro de $BCDE$ é igual ao perímetro de ABC, segue que:

$$2(x-y)+x+y=3y \quad \Rightarrow \quad x=\frac{4}{3}y. \quad \text{(10 pontos)}$$

Temos que, $S_{ADE}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Logo, pela igualdade acima, segue que $S_{ADE}=\frac{4y^2\sqrt{3}}{9}$. Além disso, temos que $S_{ABC}=\frac{y^2\sqrt{3}}{4}$.(10 pontos) Portanto, como $S_{BCDE}=S_{ADE}-S_{ABC}$, temos que

$$S_{BCDE}=\frac{7}{9}\frac{y^2\sqrt{3}}{4}=\frac{7}{9}S_{ABC}. \quad \text{(5 pontos)}$$

Logo, a razão procurada é 9/7. (10 pontos)

4. Determine como 1000 moedas de um 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

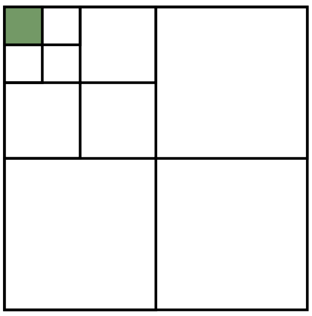
   - A numeração das caixas, de 1 até 10, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.
   - É possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1000 dinares, sem precisar abrir as caixas.

   Resposta: A primeira caixa deve conter uma moeda, pois caso contrário não poderíamos fazer um pagamento de um dinar. A segunda caixa deve conter duas moedas pois, se tivesse três, quatro ou mais dinares, não seria possível fazer um pagamento de dois dinares. A caixa número 3 deve ter quatro moedas, pois o conteúdo das duas primeiras caixas irá permite fazer pagamentos de 1, 2 e 3 dinares. Devemos continuar o raciocínio até estabelecermos a seguinte distribuição das moedas nas caixas numeradas de 1 à 9: $1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots, 256$. Quanto à décima caixa, concluímos que deve conter:

$$1000 - (2^8 + 2^7 + \cdots + 2^1 + 2^0) = 489.$$

   (4 pontos) pelo valor correto de cada caixa!

5. Mário desenhou um quadrado vermelho de 2 cm de lado, depois desenhou outros três quadrados iguais formando um quadrado maior. Assim seguiu até obter a seguinte figura:



   (a) Quantas vezes tem que se repetir o processo anterior para obter um quadrado de perímetro 1024 cm?

   (b) Quantas vezes tem que se repetir o processo anterior para obter um quadrado de área 1024 cm^2?

   Resposta: (a) A cada processo o lado do novo quadrado obtido dobra de tamanho. O quadrado inicial tem 2 cm de lado e após o primeiro processo passa a medir 2^2 cm, após o segundo passa a ter 2^3 cm e após o n-ésimo processo passa a medir 2^{n+1} cm.(20 pontos) Um quadrado cujo perímetro mede 1024 cm possui 256 cm de lado. Como $256 = 2^8$, logo para se ter um quadrado de 1024 cm de lado precisa-se fazer o processo 7 vezes.(10 pontos) (b) De maneira análoga, temos que um quadrado de área 1024 cm^2 possui lado de 32 cm de comprimento. Mas $32 = 2^5$, logo precisa-se repetir o processo 4 vezes para obter o quadrado desejado.(10 pontos)