



32^a

OLIMPIADA CAMPINENSE DE
MATEMÁTICA
PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES
www.mat.ufcg.edu.br/ocm

Prova do Nível 2

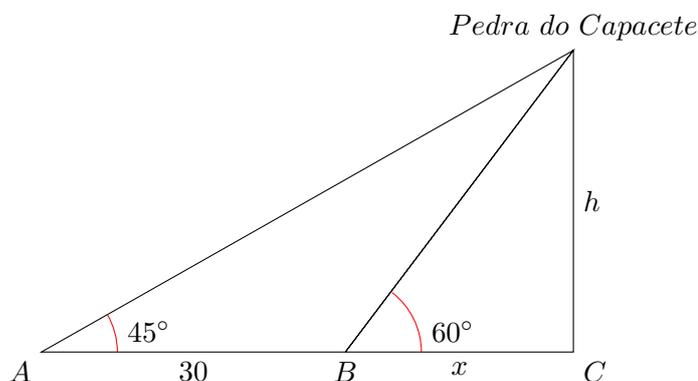
1ª Parte - Questões Objetivas - Gabarito

1) A; 2) C; 3) E; 4) B; 5) B; 6) C; 7) A; 8) B; 9) E; 10) C

2ª Parte - Questões Discursivas - Gabarito

1. Um observador está em um ponto A da cidade de Cabaceiras e visualiza a pedra do capacete no lajedo de Pai Mateus segundo um ângulo de 45° com o plano horizontal. Ele anda na direção do lajedo até um ponto B distante 30 m de A e agora vê a pedra do capacete segundo um ângulo de 60° . Determine a altura h do lajedo em relação ao plano de observação.

Resposta: Observe a figura



(10 pontos) Pela figura anterior, concluímos que

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{30+x} \text{ e } \tan 60^\circ = \frac{h}{x}.$$

Logo,

$$h - 30 = \frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

de onde

$$h = 15(3 + \sqrt{3}) \text{ m. (30 pontos)}$$

2. Determine p e q de modo que $p + q$ e $p - q$ sejam as raízes de

$$x^2 + 4qx + p = 0.$$

Resposta: Sendo $p + q$ raiz da equação, temos que

$$p^2 + 6pq + 5q^2 + p = 0. \quad (5 \text{ pontos}) \quad (1)$$

Por outro lado, sendo $p - q$ raiz da equação, temos que

$$p^2 + 2pq - 3q^2 + p = 0. \quad (5 \text{ pontos}) \quad (2)$$

Fazendo (1)-(2), obtemos

$$4pq + 8q^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4q(p + 2q) = 0. \quad (5 \text{ pontos}) \quad (3)$$

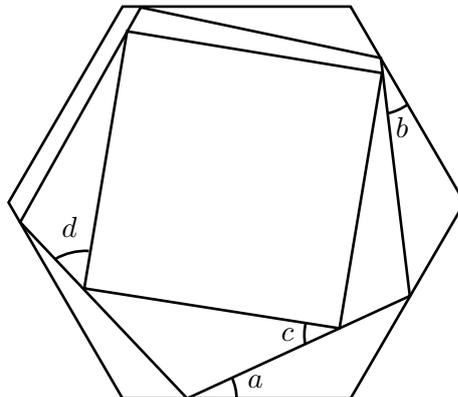
Sendo assim, $q = 0$ ou $p = -2q$. (5 pontos) Desta forma, temos dois casos a considerar:

- Caso $q = 0$: observando (1), temos $p^2 + p = 0$. Assim, ($p = q = 0$) ou ($p = -1$ e $q = 0$). (10 pontos)
- Caso $q = -2p$: observando (1), temos $-q(3q + 2) = 0$. Assim, ($p = q = 0$) ou ($q = -\frac{2}{3}$ e $p = \frac{4}{3}$). (10 pontos)

3. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem sentar-se em 5 bancos de dois lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher.

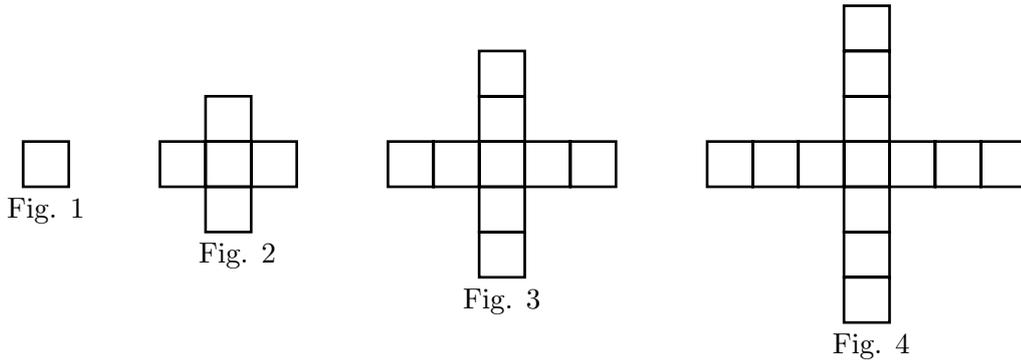
Resposta: Observe de início que a primeira mulher pode ocupar qualquer um dos 10 lugares, portanto há 10 possibilidades. Seguindo o raciocínio, para a segunda, terceira, quarta e quinta mulheres há 8, 6, 4 e 2 possibilidades, respectivamente. (15 pontos) Vamos agora ocupar os lugares com homens. Para o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto homens há 5, 4, 3, 2 e 1 possibilidades respectivamente. (15 pontos) Então, o total de possibilidades é $10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. (10 pontos)

4. A figura abaixo mostra um quadrado cujos vértices tocam os lados de um pentágono regular, por sua vez os vértices do pentágono tocam os lados de um hexágono regular. Ache o valor de $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d}$.



QUESTÃO ANULADA!

5. Observe as figuras abaixo e determine quantos quadrados teremos na figura 100. Escreva também uma função que relacione a posição da figura com a quantidade de quadrados.



Resposta: Observando as figuras, percebemos que na figura 1, temos 1 quadrado ($\#F_1 = 1 = 1 + 4(1 - 1)$), na figura 2, temos 5 quadrados ($\#F_2 = 5 = 1 + 4(2 - 1)$), na figura 3, temos 9 quadrados ($\#F_3 = 9 = 1 + 4(3 - 1)$), na figura 4, temos 13 quadrados ($\#F_4 = 13 = 1 + 4(4 - 1)$), (10 pontos) continuando esse processo, no n-ésimo quadrado temos que $\#F_n = 1 + 4(n - 1)$ (20 pontos), ou seja, a cada figura adicionamos 4 quadrados nas "pontas" da figura como mostra os desenhos. Sendo assim, na figura 100, teremos $\#F_{100} = 1 + 4(100 - 1) = 397$ quadrados. (10 pontos)