32ª Olimpíada Campinense de Matemática
Professor José Vieira Alves
www.mat.ufcg.edu.br/ocm

Prova do Nível 3

1ª Parte - Questões Objetivas - Gabarito

1) C; 2) (ANULADA); 3) C; 4) D; 5) B; 6) A; 7) D; 8) C; 9) D; 10) B

2ª Parte - Questões Discursivas - Gabarito

1. Seja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, uma função satisfazendo às seguintes condições:

   (i) $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$;

   (ii) $f(x) = 0$, se o algarismo das unidades de x é 4, para todo $x \in \mathbb{Z}^+$.

   Encontre $f(2008)$.

   Resposta: Primeiramente, observe que

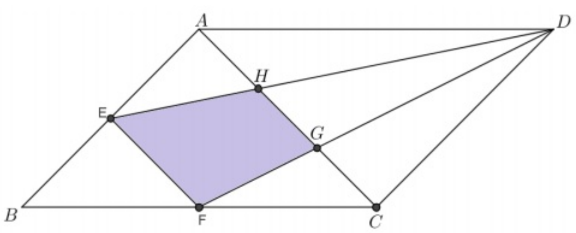
   $$0 = f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 2f(2),$$

   daí $f(2) = 0$. (15 pontos) Por outro lado,

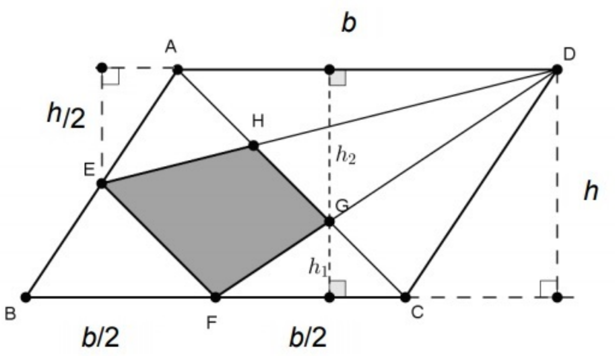
   $$f(2008) = f(2 \cdot 1004) = f(2) + f(1004). \quad \text{(15 pontos)}$$

   Portanto, $f(2008) = 0$. (10 pontos)

2. O paralelogramo $ABCD$ tem área $48cm^2$ e os pontos E e F são os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $EFGH$?



   Resposta: Considere a figura abaixo



(5 pontos) Sejam b a medida da base do paralelogramo e h sua altura, daí $b \times h = 48cm^2$. Então:

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{h}{2} = \frac{1}{8} b \times h \quad \Rightarrow S_{BEF} = 6cm^2. \quad \text{(10 pontos)}$$

Além disso, por semelhança de triângulos, obtemos

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{b}{b/2} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = 2, \quad \text{(10 pontos)}$$

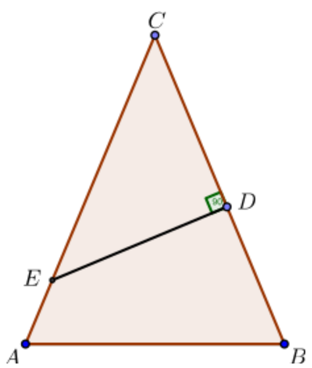
donde segue que $h_2 = 2h_1$ e, portanto,

$$S_{CFG} = \frac{1}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{h}{3} = \frac{1}{12} b \times h \quad \Rightarrow S_{CFG} = 4cm^2 = S_{AEH}. \quad \text{(10 pontos)}$$

Assim, sabendo que $S_{ABC} = 24cm^2$, temos:

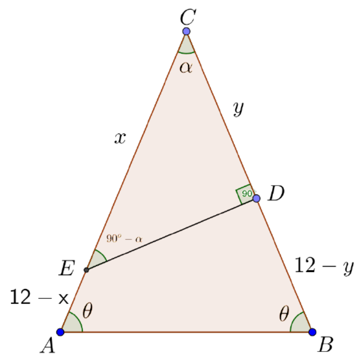
$$\begin{array}{ccccccccccc} S_{ABC} & = & S_{AEH} & + & S_{BEF} & + & S_{CFG} & + & S_{EFGH} & & \\ 24 & = & 4 & + & 6 & + & 4 & + & S_{EFGH} & \Rightarrow & S_{EFGH} = 10cm^2. \quad \text{(5 pontos)} \end{array}$$

3. Considere um triângulo isósceles de base 10 e lados 12. Decide-se cortar o triângulo ortogonalmente a uma dos lados de modo que as duas novas figuras geradas possuam a mesma área e o mesmo perímetro, conforme Figura abaixo. Nestas condições, qual o comprimento do lado $\overline{DE}$?



Resposta: Observando a figura abaixo.

Utilizando a fórmula de Heron, para a área de um triângulo em função do semiperímetro, obtemos:



$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{17(17-12)(17-12)(17-10)} = \sqrt{17\cdot 5\cdot 5\cdot 7} = 5\sqrt{119}. \quad \text{(10 pontos)}$$

Desde que o perímetro do triângulo CDE é igual ao perímetro do trapézio $ABDE$, temos:

$$x + y + w = (12 - x) + 10 + (12 - y) + w \quad \Rightarrow \quad x + y = 17. \quad \text{(5 pontos)}$$

Por outro lado, desde que a área do triângulo CDE é a metade da área do triângulo ABC, temos

$$\frac{xy\cdot \text{sen}(\alpha)}{2} = \frac{1}{2}\frac{12\cdot 12\cdot \text{sen}(\alpha)}{2} \quad \Rightarrow \quad xy = 72. \quad \text{(5 pontos)}$$

Pelas implicações acima, temos que $x = 8$ e $y = 9$ ou $x = 9$ e $y = 8$. Como x representa a hipotenusa no triângulo CDE, concluimos que $x = 9$ e $y = 8$. (10 pontos) Finalmente,

$$\frac{yw}{2} = Area(CDE) = \frac{1}{2}Area(ABC) = \frac{1}{2}5\sqrt{119} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{5\sqrt{119}}{8}. \quad \text{(10 pontos)}$$

4. Seis amigas, entre elas Alice e Raiane, vão juntas jantar em um restaurante, conhecido regionalmente por suas mesas triangulares, cujos lados têm 2, 3 e 4 lugares. De quantas maneiras essas amigas podem sentar-se à mesa de modo que Alice e Raiane fiquem juntas, lado a lado, em um mesmo lado da mesa?

   Resposta: Se Alice e Raiane sentarem no lado com 2 lugares, existe

$$2 \times A_{7,4} \quad \text{(10 pontos)}$$

   maneiras de organizar a mesa, de forma que elas fiquem juntas neste lado. Se Alice e Raiane sentarem no lado com 3 lugares, existe

$$4 \times A_{7,4} \quad \text{(10 pontos)}$$

   maneiras de organizar a mesa, de forma que elas fiquem juntas neste lado. Se Alice e Raiane sentarem no lado com 4 lugares, existe

$$6 \times A_{7,4} \quad \text{(10 pontos)}$$

   maneiras de organizar a mesa, de forma que elas fiquem juntas neste lado. Portanto, existem

$$2 \times A_{7,4} + 4 \times A_{7,4} + 6 \times A_{7,4} = 12 \times A_{7,4} = 12 \times \frac{7!}{3!} = 10.080 \quad \text{(10 pontos)}$$

maneiras delas ficarem juntas, lado a lado, em um mesmo lado da mesa.

5. João e Pedro decidem fazer um jogo de aposta um tanto quanto diferente. Em cada partida do jogo o mesmo é realizado do seguinte modo: Uma moeda honesta será lançada até ocorrer cara pela primeira vez ou então 4 lançamentos terem ocorrido. João aposta 15 reais, por partida, que em até quatro lançamentos ocorrerá alguma vez a face "cara" enquanto Pedro deverá apostar 1 real por rodada que isso não ocorre. Supondo que ambos tenham saldo para jogar mil partidas, quem espera-se que seja o jogador com maior ganho nesse momento e qual o ganho esperado do jogador a frente?

   Resposta: João pode vencer o jogo na primeira, segunda, terceira ou quarta tentativa. A seguir temos as probabilidades de João ganhar:

   - Na primeira tentativa - 1/2 - ou seja, ocorrer cara no primeiro lançamento.
   - Na segunda tentativa - 1/4 - ou seja, ocorrer coroa no primeiro lançamento e cara no segundo.
   - Na terceira tentativa - 1/8 - ou seja, ocorrer coroa nos dois primeiros lançamentos e cara no terceiro.
   - Na quarta tentativa - 1/16 - ou seja, ocorrer coroa nos três primeiros lançamentos e cara no quarto.

   (10 pontos) se separar as possibilidades de vitória de João em cada tentativa! (20 pontos) se calcular adequadamente a probabilidade de vitória para cada caso, sendo (5 pontos) para cada probabilidade calculada corretamente! Assim a probabilidade de João ganhar cada partida é $0,9375$. Em outras palavras espera-se que João ganhe $93,75\%$ das partidas e perca $6,25\%$. Como cada vitória lhe dá um ganho de 1 real e cada derrota um prejuízo 15 espera-se que João tenha um "ganho"de $1000(-15 \times 0.0625 + 1 \times 0.9375) = 843,75$ reais, consequentemente espera-se que pedro tenha um prejuízo de $843,75$. Logo, espera-se que João esteja a frente e o ganho do mesmo seja de $843,75$. (10 pontos)