35ª

OLIMPIADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES

www.mat.ufcg.edu.br/ocm

PROVA NÍVEL III

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO

NÚMERO

COMPLEMENTO

BAIRRO

CIDADE

UF

CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL)

DD

TELEFONE FIXO

ESCOLA

DD

TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	B	C	D	E	F
2	A	B	C	D	E	F
3	A	B	C	D	E	F
4	A	B	C	D	E	F
5	A	B	C	D	E	F
6	A	B	C	D	E	F
7	A	B	C	D	E	F
8	A	B	C	D	E	F
9	A	B	C	D	E	F
10	A	B	C	D	E	F
11	A	B	C	D	E	F
12	A	B	C	D	E	F

Instruções

1. A prova será realizada no dia 19/08/2023 das 14h às 18h.
2. Cada questão vale 10 pontos.
3. Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a notas de livros. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso não graduados.
4. Para cada questão, assinale com X a alternativa que julgar correta na tabela ao lado. Assinale, com caneta, somente uma alternativa para cada questão.

1. Considere um grupo composto por 300 pessoas, dispostas sequencialmente em um círculo com posições 1,2,3,...,300 sequencialmente marcadas no sentido horário. Um jogo consiste em a partir do jogagor 1 o mesmo deve eliminar o jogador que estiver a sua frente até que reste apenas um no círculo (Ex: O jogador 1 elimina o 2, o jogador 3 elimina o 4, ..., o jogador 299 elimina o 300, iniciando assim uma nova rodada de eliminação e seguindo até que reste apenas um jogador). Sabendo desse funcionamento do jogo qual a posição do vencedor?

   a) 1 b) 23 c) 71 d) 89 e) 123 f) 261

2. Quando estudamos probabilidade, se o espaço S **não for enumerável, ou seja, não pudermos listar seus elementos por meio de uma relação de ordem**, o conceito clássico de probabilidade se aplicará ao comprimento de intervalos, medida de áreas ou similares, dando origem ao que é chamado de **probabilidade geométrica**. Por exemplo, considerando S como um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ e A um subconjunto de S temos que

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } S}.$$

   Considere agora que Bruno quebra aleatoriamente uma barra de ferro de cumprimento 1 metro em dois pontos gerando 3 pedaços. Qual a probabilidade de que com esses três pedaços ele possa formar um triângulo?

   a) 0 b) 1/4 c) 1/3 d) 2/3 e) 3/4 f) 1

3. A Megasena é um tradicional jogo de loteria brasileiro no qual um apostador pode marcar de 6 a 15 números distintos (também chamados de dezenas) em um cartão contendo números que vão de 1 a 60. Para ganhar o prêmio máximo é necessário acertar as 6 dezenas sorteadas, sendo possível ganhar premiações secundárias acertando 5 dezenas (quina) ou 4 dezenas (quadra). Uma aposta simples equivale corresponde a marcar 6 em um cartão e cada aposta com mais de 6 dezenas é dita ser uma aposta combinada ou múltipla, por exemplo, uma aposta contendo 9 dezenas equivale a $C_9^6 = 84$ apostas de 6 números. Sabendo que um jogador acertou as 6 dezenas, ao fazer uma aposta marcando 11 dezenas, em quantas apostas simples desse jogo o mesmo fez a quadra?

   a) 0 b) 1 c) 80 d) 150 e) 162 f) 180

4. Qual o número de pares ordenados (x, y) de coordenadas inteiras e positivas que satisfaz a equação

$$x^3 + y^3 = 6021 - 3xy?$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

5. Considere um triângulo equilátero T_1 de lado $l = 1cm$. Em seguida, inscreva, no triângulo T_1 um círculo C_1 e pinte a porção do triângulo T_1 que é exterior ao círculo C_1. Agora, inscreva um triângulo equilátero T_2 no círculo C_1. No triângulo T_2 inscreva um círculo C_2 e pinte a porção do triângulo T_2 que é exterior ao círculo C_2. Tal processo é repetido sucessivamente e infinitas vezes. A soma das áreas das regiões pintadas segundo o algoritmo acima, a partir do primeiro triângulo, T_1, é aproximadamente:

a) $0,52cm^2$ b) $0,43cm^2$ c) $0,34cm^2$ d) $0,27cm^2$ e) $0,23cm^2$ f) $0,21cm^2$

6. Um triângulo tem seus lados em progressão aritmética de razão $r = 1$. Se a área do triângulo é igual a 6 cm^2, então os comprimentos dos lados do triângulo, em centímetros, são

a) 2, 3 e 4. b) 3, 4 e 5. c) 4, 5 e 6. d) 5, 6 e 7. e) 6, 7 e 8. f) 7, 8 e 9.

7. Sejam $x_1, x_2, ..., x_n$ registros numéricos relativos a uma grandeza X. A variância dos valores observados $x_1, x_2, ..., x_n$, denotada por $\text{Var}(X)$, é definida por

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n}\left((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2\right),$$

sendo $\overline{x}$ a média aritmética dos valores observados da grandeza X. Admita que a grandeza Y relaciona-se com X por meio da seguinte lei de formação $Y = aX + b$, em que $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. De modo que para cada x_i tem-se associado um valor $y_i = ax_i + b, \quad i = 1, 2, ..., n$. Assinale a alternativa que relaciona corretamente a variância dos valores das grandeza Y com a variância dos valores da grandeza X.

a) $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X)$ b) $\text{Var}(Y) = |a|\text{Var}(X)$ c) $\text{Var}(Y) = a^2\text{Var}(X)$

d) $\text{Var}(Y) = a\text{Var}(X) + b$ e) $\text{Var}(Y) = |a\text{Var}(X) + b|$ f) $\text{Var}(Y) = (a\text{Var}(X) + b)^2$

8. Em primeiro de janeiro de certo ano, cada trabalhador de uma categoria funcional tinha um salário igual a S_0. Ao longo do ano, os trabalhadores receberam quatro aumentos sucessivos. Mais precisamente, em março, o salário de cada trabalhador aumentou 10%; em maio, um novo aumento de 5% sobre o salário de março; em julho, mais um aumento de 5%, agora sobre o salário de maio; em setembro, um último aumento de 2% sobre o salário de julho. Sabe-se que o poder de compra (P) do trabalhador é diretamente proporcional ao seu salário (S) e inversamente proporcional a inflação (I). Se a inflação para o ano em questão foi de 20%, então o poder de compra anual de cada trabalhador da categoria aumentou em aproximadamente

a) 1.67%. b) 1.83%. c) 1.98%. d) 3.08%. e) 3.70%. f) 4.17%.

9. Dispõem-se de 4 varetas. E cada uma delas é quebrada em duas partes (uma curta e outra longa), resultando em 4 pedaços curtos (c_1, c_2, c_3 e c_4) e 4 pedaços longos (l_1, l_2, l_3 e l_4). Esses pedaços são representados por 8 cartões semelhantes, exceto pela identificação, e levados para uma urna. Se os cartões são retirados, aleatoriamente, dois-a-dois da urna, qual é probabilidade de que cada um dos 4 pares obtidos seja formado por um pedaço curto (c_i) e um longo (l_j)?

a) $\frac{1}{2520}$. b) $\frac{1}{384}$. c) $\frac{1}{210}$. d) $\frac{6}{105}$. e) $\frac{3}{16}$. f) $\frac{8}{35}$.

10. Dado o conjunto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, considere a coleção, $\mathcal{C}$, de subconjuntos de U formada por subconjuntos de 6 elementos, ou seja, $\mathcal{C} = \{A_i \subset U; n(A_i) = 6\}$. Sabe-se que cada um dos subconjuntos $A_i \in \mathcal{C}$ possui um elemento mínimo. Qual é a média aritmética desses elementos mínimos?

a) 1 b) $\frac{11}{7}$ c) $\frac{10}{6}$ d) 2 e) $\frac{11}{5}$ f) 3

11. Dizemos que duas retas (ou segmentos de reta) são *reversas* quando não existe um plano que as contenha simultaneamente. De quantas maneiras podemos escolher três arestas de um cubo de modo que quaisquer duas dessas arestas são reversas?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 15 f) 16

12. Sabe-se que $2x^2 - 12xy + ky^2 \geq 0$ para todos os números reais x e y. Nessas condições, o menor valor que k pode assumir é:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16 f) 18