36ª Olimpíada Campinense de Matemática
Professor José Vieira Alves
www.mat.ufcg.edu.br/ocm

PROVA NÍVEL III

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO

NÚMERO

COMPLEMENTO

BAIRRO

CIDADE

UF

CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL)

DD

TELEFONE FIXO

ESCOLA

DD

TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	B	C	D	E	F
2	A	B	C	D	E	F
3	A	B	C	D	E	F
4	A	B	C	D	E	F
5	A	B	C	D	E	F
6	A	B	C	D	E	F
7	A	B	C	D	E	F
8	A	B	C	D	E	F
9	A	B	C	D	E	F
10	A	B	C	D	E	F
11	A	B	C	D	E	F
12	A	B	C	D	E	F

Instruções

1. A prova será realizada no dia 17/08/2024 das 14h às 18h.
2. Cada questão vale 10 pontos.
3. Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a notas de livros. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso não graduados.
4. Para cada questão, assinale com X a alternativa que julgar correta na tabela ao lado. Assinale, com caneta, somente uma alternativa para cada questão.

1. Um parque possui uma roda gigante com cabines individuais e indistinguíveis e que consegue transportar 20 por viagem, essa roda gigante é conforme descrita na imagem à seguir. Se 40 pessoas chegam para irem nessa roda gigante de quantas maneiras distintas elas podem ser distribuídas em duas viagens (ir na primeira ou segunda viagem é um fator importante) de modo a todas irem uma única vez?

a) $19!19!$ b) $20!20!$ c) $40!$ d) $\frac{40!}{20!}$ e) $\frac{40!}{20!20!}$ f) $\frac{40!19!19!}{20!20!}$

2. Em uma cidade, as pessoas falam a verdade com probabilidade $1/3$. Suponha que A faz uma afirmação e que D diz que C diz que B diz que A falou a verdade. Qual a probabilidade de A ter falado a verdade?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{13}{41}$ d) $\frac{13}{81}$ e) $\frac{28}{81}$ f) $\frac{41}{81}$

3. O quadro "Em Nome do Amor", transmitido no programa Sílvio Santos de 2 de outubro de 1994 a 27 de agosto de 2000, tinha como objetivo principal a formação de casais. A dinâmica envolvia a presença de 7 homens de um lado e 7 mulheres do outro. Se considerarmos que os casais eram formados aleatoriamente, qual seria o número total de combinações possíveis para a formação desses casais em uma edição do programa?

a) $7!$ b) $\frac{14!}{7!7!}$ c) $\frac{14!}{12!2!}$ d) $7!7!$ e) $14!$ f) $7!2!$

4. Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se, para cada elemento y em B, existe pelo menos um elemento x em A tal que $f(x) = y$. Considere o conjunto $A = \{1, 2, ..., n+1\}$ e o conjunto $B = \{1, 2, ..., n\}$ quantas funções sobrejetoras podemos construir de A em B?

a) $(n+1)!$ b) $\frac{(n+1)!}{n}$ c) $n(n+1)!$ d) $\frac{n(n+1)!}{2}$ e) $\frac{(n+1)!}{2n}$ f) $2(n+1)!$

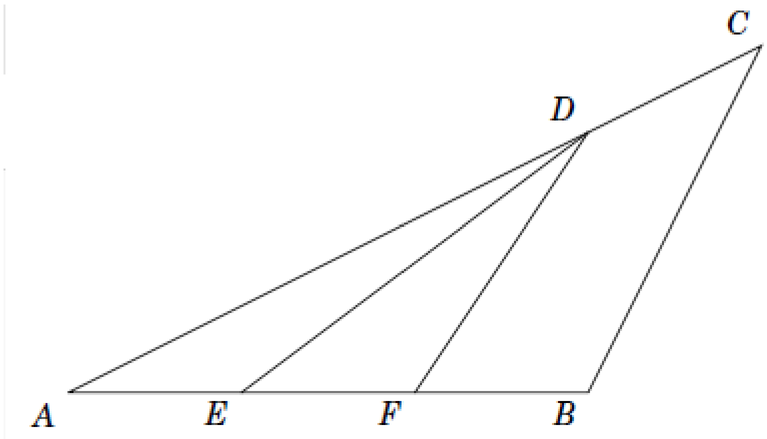
5. O número

$$\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$$

é igual à

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

6. A área do triângulo ABC na figura abaixo é $24\, cm^2$.



Sabendo que os pontos E e F dividem o lado em 3 partes iguais e que $\overline{AD} = 3\overline{DC}$, podemos afirmar que a área do triângulo EFD é igual a:

a) $3\, cm^2$ b) $4\, cm^2$ c) $6\, cm^2$ d) $7\, cm^2$ e) $8\, cm^2$ f) $14\, cm^2$

7. A parte inteira de um número real x é o maior inteiro que é menor do que ou igual a x. O último dígito da parte inteira de

$$(2-\sqrt{3})^{2024} + (2+\sqrt{3})^{2024}$$

é igual a

a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 9

8. Quantos são os anagramas da palavra "CAMPINA" que não possuem vogais adjacentes?

   a) 30. b) 180. c) 240. d) 360. e) 720. f) 1440.

9. Ravi, Lael e Isabele vão a uma sorveteria onde são servidos 3 sabores de sorvete: chocolate, baunilha e morango. Quando perguntados sobre qual sabor escolheram, eles deram as seguintes respostas:
   Ravi: Eu não escolhi baunilha
   Lael: Eu não escolhi chocolate
   Isabele: Eu não escolhi morango.
   Sabendo que cada um escolheu um sabor diferente e que apenas quem escolheu o sabor morango mentiu, quem escolheu os sabores chocolate e baunilha, respectivamente, foram:

   a) Ravi e Lael b) Ravi e Isabele c) Lael e Ravi d) Lael e Isabele e) Isabele e Ravi f) Isabele e Lael

10. Seja a_n o n-ésimo termo da sequência 1 2 7 8 13 14 19 20 25 26 31 32.... Qual o resto da divisão de $a_{51} + a_{52}$ por 6?

    a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

11. Thomas e Estela jogam um jogo de aposta. Em cada rodada, se Estela ganha, Thomas paga R$ 5,00 para Estela. Se Thomas ganha, então Estela paga R$ 10,00 para Thomas. Foram jogadas 13 rodadas, nas quais apenas 2 foram empate. Sabendo que Thomas ganhou R$ 20,00, quantas rodadas Estela venceu?

    a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7 f) 8

12. Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma função que satisfaz:

    1. $f(ab) = f(a)f(b)$, se o máximo divisor comum de a e b é 1,
    2. $f(a+b) = f(a) + f(b)$, se a e b são primos.

    Qual o valor de $f(2024)$?

    a) 2021 b) 2000 c) 2023 d) 2024 e) 1998 f) 1999