37ª

OLIMPIADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA
PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES
www.mat.ufcg.edu.br/ocm

GABARITO DA PROVA NÍVEL I

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO NÚMERO

COMPLEMENTO BAIRRO

CIDADE UF CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL) DD TELEFONE FIXO

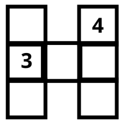
ESCOLA DD TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	B	C	D	E	F
2	A	B	C	D	E	F
3	A	B	C	D	E	F
4	A	B	C	D	E	F
5	A	B	C	D	E	F
6	-	-	-	-	-	-
7	A	B	C	D	E	F
8	A	B	C	D	E	F
9	-	-	-	-	-	-
10	A	B	C	D	E	F
11	A	B	C	D	E	F
12	A	B	C	D	E	F

Observação:
As letras em vermelho no gabarito ao lado correspondem as alternativas corretas.
As questões 6 e 9 foram anuladas.

1. Podemos dispor os números de 1 a 7 no quadro abaixo, de forma que a soma nas três linhas (duas verticais e uma horizontal) seja a mesma. Qual é o valor de x que ocupa o espaço central?



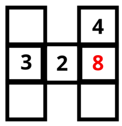
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5 (e) 6 (f) 7

Solução: Seja **S** o valor da soma de cada linha e x o valor do espaço central. Devemos ter

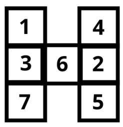
$$2S + x = 1 + 2 + \cdots + 7 = 28,$$

ou seja, x deve ser um número par. Como o número 4 já está disposto na tabela, as únicas opções possíveis são 2 e 6.

- Se $x = 2$, da relação acima, devemos ter que a soma $S = 13$. No entanto, isso é impossível, pois, nesse caso, a soma da linha horizontal deveria ser 8, mas estamos utilizando apenas os números de 1 a 7.



- Se $x = 6$, a soma de cada linha (vertical e horizontal) deverá ser $S = 11$, o que é possível. Assim, a solução é:



E o valor do espaço central procurado é 6.

Resposta: (e) 6

2. Sabendo que a soma

$$\textbf{AMAR} + \textbf{RAMA} = \textbf{9328}$$

satisfaz a condição de que cada letra codifica um número ímpar e que letras distintas codificam números distintos, o maior valor possível para o número formado pelas letras **MAR** é

(a) 935 (b) 395 (c) 539 (d) 953 (e) 593 (f) 359

Solução: Dado que a soma

$$\begin{array}{ccccc} & A & M & A & R \\ + & R & A & M & A \\ \hline & 9 & 3 & 2 & 8 \end{array}$$

é válida, podemos deduzir que $R + A = 8$ e que $M + A = 12$. Para obter o maior valor possível para o número formado pelas letras **MAR**, escolhemos $M = 9$. A partir das equações acima, encontramos que $A = 3$ e $R = 5$. Portanto, o valor procurado é

MAR=935.

Resposta: (a) 935

3. Se a e b são números distintos tais que

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2.$$

Qual é o valor de $\frac{a}{b}$?

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{5}{8}$ (e) $\frac{7}{3}$ (f) $\frac{8}{3}$

Solução: Multiplicando ambos os lados da igualdade por $b(b + 10a)$, obtemos

$$2ab + 10a^2 + 10b^2 = 2b^2 + 20ab,$$

o que pode ser reescrito como

$$10a^2 - 18ab + 8b^2 = 0 \Rightarrow 5a^2 - 9ab + 4b^2 = 0.$$

Sabemos que o caso $a = b$ é uma solução do problema, portanto, podemos fatorar a equação acima da seguinte forma

$$(a - b)(5a - 4b) = 0.$$

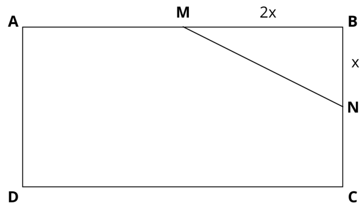
Assim, obtemos a razão $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$.

Resposta: (b) $\frac{4}{5}$

4. Em um retângulo $ABCD$, sejam M e N os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Se $MB = 2NB$ e se a área do triângulo MBN é $36m^2$, é possível afirmar que a área do polígono $AMNCD$ é:

(a) $144m^2$ (b) $237m^2$ (c) $252m^2$ (d) $288m^2$ (e) $370m^2$ (f) $274m^2$

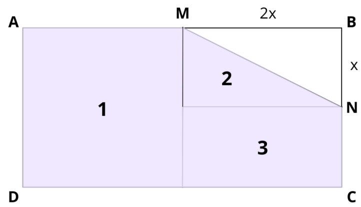
Solução: Tomando o segmento NB de tamanho x, temos a seguinte região Além disso,



sabendo que a área do triângulo MBN é $36m^2$, temos, por definição que

$$A_T = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{2x.x}{2} = x^2 = 36,$$

ou seja, $x = 6m$. Para determinar a área do polígino $AMNCD$ vejamos cada parte separadamente:



- Área 1: $A_1 = \text{base} \cdot \text{altura} = 2x.2x = 4x^2 = 144m^2$
- Área 2: Observe que $A_2 = A_T = 36m^2$
- Área 3: $A_1 = \text{base} \cdot \text{altura} = 2x.x = 2x^2 = 72m^2$

Portanto,

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 + A_3 = 144 + 36 + 72 = 252m^2$$

Resposta: (c) $252m^2$

5. Seja A a soma de todos os números pares de três dígitos em que todos os três dígitos são iguais. Seja B a soma de todos os números ímpares de três dígitos em que todos os dígitos são iguais. O valor de $\dfrac{A}{B}$ é

   (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$ (e) $\frac{5}{3}$ (f) $\frac{3}{5}$

   Solução: Os possíveis números pares de três dígitos com dígitos iguais são 222, 444, 666, 888 e sua soma é $A = 2220$. Os possíveis números ímpares de três dígitos com dígitos iguais são 111, 333, 555, 777, 999 com soma B = 2775. Assim,

$$\frac{A}{B} = \frac{2220}{2775} = \frac{444}{555} = \frac{4 \cdot 111}{5 \cdot 111} = \frac{4}{5}.$$

   Resposta: (a) $\frac{4}{5}$

6. Em um jardim, 21 plantas de rosas, 42 plantas de trevo roxo e 56 plantas de bambu da sorte devem ser plantadas em fileiras de modo que cada fileira contenha o mesmo número de plantas de apenas uma variedade. O número mínimo de linhas em que as plantas acima podem ser plantadas é

   (a) 4 (b) 6 (c) 3 (d) 5 (e) 2 (f) 7

   Solução: QUESTÃO ANULADA

   Resposta: QUESTÃO ANULADA

7. Qual é o menor inteiro positivo que deve ser subtraído de 1936 para que o número resultante, quando dividido por 9, 10 e 15, tenha o mesmo resto?

   (a) 44 (b) 13 (c) 38 (d) 36 (e) 46 (f) 32

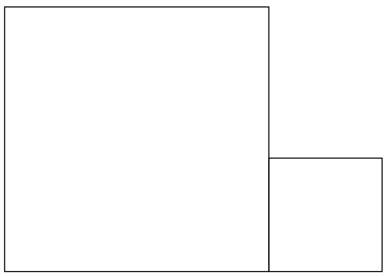
Solução: Suponha que s seja o menor inteiro positivo a ser subtraído de 1936, de modo que $1936 - s$ tenha o mesmo resto r quando dividido por 9, 10 e 15. Como r é o resto da divisão de $1936 - s$ por 9, temos que $0 \leq r \leq 8$. Note que $1936 - s - r$ é divisível por 9, 10 e 15, daí $1936 - s - r$ divisível por $m.m.c(9, 10, 15) = 90$. O maior múltiplo de 90 que é menor do que ou igual a 1936 é $1890 = 21 \times 90$. Portanto,

$$1936 - s - r = 1890.$$

Donde $s = 46 - r$. O valor de s será mínimo quando r for máximo. O maior valor possível de r é 8 e, portanto, $s = 46 - 8 = 38$. Observe que, $1936 - 38 = 1898$ deixa o mesmo resto 8 quando dividido por 9, 10 e 15.

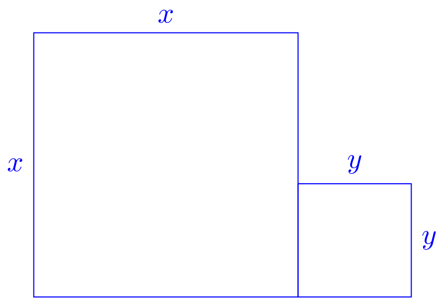
Resposta: (c) 38

8. A figura abaixo é formada por dois quadrados. O lado de cada quadrado é um número inteiro. Se a área da figura é de 58 cm^2, seu perímetro é



(a) 58 (b) 116 (c) 34 (d) 29 (e) 54 (f) 44

Solução: Como os lados dos quadrados são números inteiros, a área de cada quadrado é um número quadrado perfeito.
Os números quadrados perfeitos são: 1, 4, 9, 16, 25, 49, 64, ... Temos que:



$$58 = x^2 + y^2 = 49 + 9$$

é a única possibilidade. Logo,

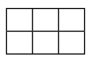
$$x = 7 \quad \text{e} \quad y = 3.$$

O perímetro p é dado por:

$$\begin{aligned} p &= 3x + (x - y) + 3y \\ &= 4x + 2y \\ &= 4 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \\ &= 28 + 6 \\ &= 34 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Resposta: (c) 34

9. Dispõe-se de ladrilhos na forma de quadrados pretos 1×1 (□) e dominós vermelhos 1×2 (□□). Quantos são os ladrilhamentos (coberturas) possíveis para o tabuleiro fixo 2×3 exibido na figura a seguir?



(a) 6 (b) 10 (c) 12 (d) 14 (e) 16 (f) 20

Solução: Consideremos a partição $\mathcal{P}$, segundo o número de dominós do tipo 2×1 que são utilizados no ladrilhamento. Logo, temos os seguintes caso excludentes:

i) nenhum dominó do tipo 2x1: 1 caso possível;

ii) exatamente 1 dominó do tipo 2x1. Neste caso, ele deve figurar ou na horizontal (4 casos) ou na vertical (3 casos), totalizando 7 casos;

iii) exatamente dois dominós do tipo 2x1. Neste situação, tem-se os seguintes casos:
   - 0 na horizontal e 2 na vertical: 3 casos;
   - 1 na horizontal e 1 na vertical: 4 casos;
   - 2 na horizontal e 0 na vertical: 4 casos;

   Logo, no caso iii há 11 casos possíveis.

iv) Exatamente 3 dominós do tipo 2x1: 3 casos possíveis.

Portanto, o número de ladrilhamento possíveis para o tabuleiro é 1+7+11+3=22.

Resposta: QUESTÃO ANULADA (nenhuma alternativa corresponde à solução.)

10. Maguila é um filhote de pastor alemão muito esperto e que, rapidamente, adaptou-se a sua rotina de alimentação, passeios e banhos. Sabe-se que ele faz três refeições diárias, cada uma delas com 100 gramas de ração. Neste caso, qual é a quantidade mínima de ração necessária para manter a rotina de alimentação do cachorrinho por um período de 30 dias?

    (a) 0.3 kg. (b) 0.9 kg. (c) 3 kg. (d) 9 kg. (e) 10 kg. (f) 20 kg.

    Solução: O consumo diário de ração do cachorro é de 300 gramas por dia. A fim de que a rotina seja mantida durante 30 dias, serão necessários $30 \cdot 300 = 9000$ gramas, que equivale a 9 kg.

    Resposta: (d) 9 kg

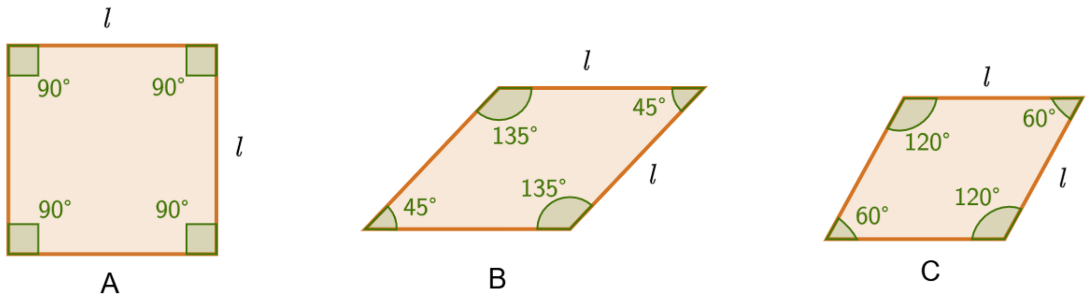
11. O número 2025 é um quadrado perfeito, pois $45^2 = 2025$, sendo 45 um número natural. Quantos divisores de 2025 são quadrados perfeitos?

    (a) 15 (b) 8 (c) 6 (d) 4 (e) 2 (f) 1

    Solução: Observa-se que 2025 possui a seguinte fatoração: $2025 = (45)^2 = (3^2 \cdot 5)^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Logo, os divisores de 2025 possuem a forma $3^n \cdot 5^m$, com $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $m \in \{0, 1, 2\}$. Consequentemente, a fim de que os divisores possuam a propriedade adicional de que seja um quadrado perfeito, exige-se que n seja par e m seja par. Portanto, 2025 possui $3 \cdot 2 = 6$ divisores que são quadrados perfeitos, a saber 1, 9, 25, 81, 225 e 2025.

    Resposta: (c) 6

12. Cada um dos três polígonos, A, B e C, representados na figura abaixo, é formado por segmentos de reta de mesmo comprimento (l).



Se S_A, S_B e S_C denotam as áreas dos polígonos A, B e C, respectivamente, então é correto afirma que

(a) $S_A = S_B = S_C$.

(b) $S_A > S_B > S_C$.

(c) $S_A < S_B < S_C$.

(d) $S_A > S_B$ e $S_B < S_C$.

(e) $S_A = S_C$ e $S_C > S_B$.

(f) $S_A > S_B$ e $S_B = S_C$.

Solução: as áreas dos polígonos A, B e C são iguais a $S_A = l^2$, $S_B = \frac{\sqrt{2}}{2}l^2$ e $S_C = \frac{\sqrt{3}}{2}l^2$. Logo, a única alternativa correta é (d).

Resposta: (d) $S_A > S_B$ e $S_B < S_C$