

1. Um certo cilindro, de volume V , tem seu o raio da base aumentado em 20% e sua altura diminuída em 50%. Qual será o novo volume em relação ao original?

(a) 30% V (b) 216% V (c) 100% V (d) 72% V (e) 36% V (f) 40% V

Solução: $V = \pi(1,2r)^2 \cdot (0,5h) = (1,44 \cdot 0,5)\pi r^2 h = 0,72V = 72\%V$.

Resposta: (d) 72% V

2. Uma bandeira é formada por 4 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e vermelho. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?

(a) 24 (b) 81 (c) 11 (d) 12 (e) 6 (f) 36

Solução: Há 3 possibilidades de colorir a primeira listra; para as demais, apenas duas, pois não se pode repetir cores adjacentes. Portanto, há $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ modos de colorir as listras da bandeira.

Resposta: (a) 24

3. A escala N de temperaturas foi feita com base nas previsões de máxima e mínima em Campina Grande no mês de maio. A correspondência com a escala Celsius é afim e sabemos o seguinte:

$^{\circ}N$	$^{\circ}C$
0	19
100	31

Em que temperatura ferve a água na escala N ?

(a) 0 (b) 2 (c) 120 (d) 100 (e) 200 (f) 675

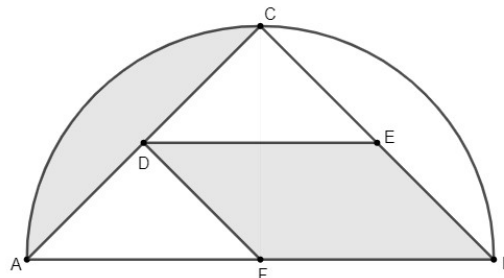
Solução: Sendo afim a relação entre as tabelas, então existem números reais a e b tais que $N = aC + b$. Assim, chega-se ao sistema

$$\begin{cases} 0 = 19a + b \\ 100 = 31a + b, \end{cases}$$

cuja solução nos permite escrever $N = \frac{25}{3}(C - 19)$. Logo, para $C = 100$, a temperatura em que a água ferve, temos $N = 675$.

Resposta: (f) 675

4. Na figura abaixo, o semicírculo de centro F tem raio 1cm. Sabendo-se que AB é diâmetro, CF é raio, o triângulo ABC é isósceles e os triângulos CDE e DAF são congruentes, qual a área da região cinza?



- (a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) 1 (d) 2 (e) 2π (f) $1/2$

Solução: Da congruência de ADF e DCE , tem-se $DE \parallel AB$ e $DF \parallel CB$. Daí, $FDEB$ é um paralelogramo que, pelo Teorema de Tales, tem altura e base iguais à metade da altura e da base do triângulo ABC . Portanto, a área de $FDEB$ é igual à metade da área de ABC , ou seja, a área do paralelogramo é igual à área do triângulo AFC . Por fim, a área cinza é igual à do setor circular AFC , que mede $\pi/4$.

Outra solução: Tendo em vista a congruência dos triângulos AFD e DEC , note que $FBED$ é um paralelogramo. Com efeito, tem-se, pelo Teorema do Ângulo Externo, $\widehat{BED} \equiv \widehat{BFD}$. Além disso, pelo fato de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser π radianos, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEC}$. Ademais, sendo $\widehat{ADC}$ raso, então $\widehat{FDE} \equiv \widehat{FBE}$. Logo, como os ângulos opostos de $FBED$ são congruentes, o quadrilátero é um paralelogramo.

Agora, observe que $CDFE$ é um losango. De fato, como consequência do que foi mostrado acima, CDE também é isósceles ($\hat{D}\hat{E}C \equiv \hat{A}\hat{B}C \equiv \hat{B}\hat{A}C \equiv \hat{E}\hat{D}C$) e os triângulos DEC e DEF são congruentes, pelo caso LAL ($FD \equiv CE$, $ED \equiv DE$ e $\hat{F}\hat{D}E \equiv \hat{F}\hat{B}E \equiv \hat{D}\hat{E}C$). Portanto, sendo DF, FE, EC e CD congruentes, $DFEC$ é um losango. Por fim, a área de AFD é igual à de FEB , pois são triângulos com base e altura de mesma medida; as áreas de CFD e DEF são iguais à metade da área do losango $DFEC$. Sendo assim, a área cinza é igual a um quarto do círculo de raio 1, ou seja, tem área $\pi/4$.

Resposta: (b) $\pi/4$

5. A expressão

$$(x - 9)(2y - 1) + (1 - y)(-2z - 1) + \left(-\frac{1}{2}z - 1\right)(4x + 4) + (x - y + z)^2$$

é válida para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$. O menor valor possível para tal expressão pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros relativamente primos. Então, $p \cdot q$ tem o valor:

- (a) -123 (b) 211 (c) -345 (d) -314 (e) 93 (f) 501

Solução: Após completamento de quadrados, a expressão dada é equivalente a

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{2}\right)^2 + (z - 2)^2 - \frac{314}{4}.$$

O menor valor possível para tal expressão é

$$-\frac{314}{4} = -\frac{157}{2}.$$

Como $\text{mdc}(-157, 2) = 1$, $p = -157$ e $q = 2$ (ou $p = 2$ e $q = -157$). Portanto, em qualquer caso,

$$p \cdot q = -314.$$

Resposta: (d) -314

6. No sistema *indo-arábico*, ou *posicional de base 10*, utilizamos as potências inteiras não-negativas de 10, ou seja, $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$, para representar um número natural. Por exemplo, $129 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 9 \cdot 1$ é a representação nesse sistema para o número que consiste de 129 unidades. Sistemas posicionais em outras bases $b > 1$ também podem ser considerados. Por exemplo, $(129)_2 = 10000001$ é a representação do mesmo número em base 2. Dito isso, suponha $b > 1$ e que um dado número inteiro n satisfaça

$$(n)_b = 727 \text{ e } (n)_{b+2} = 660.$$

O valor de b é:

- (a) 10 (b) 21 (c) 29 (d) 12 (e) 60 (f) 34

Solução: Tem-se

$$7b^2 + 2b + 7 = 6(b+2)^2 + 6(b+2).$$

Ou seja,

$$b^2 - 28b - 29 = 0.$$

Portanto, $b = 29$.

Resposta: (c) 29

7. Sejam $N \geq 3$ inteiro e a sequência crescente $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ de todos os inteiros positivos menores do que N tais que

$$\text{mdc}(N, a_i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Por exemplo, se $N = 6$, então $a_1 = 1 < a_2 = 5$.

Relativamente às afirmativas seguintes, classifique-as segundo os valores V , se verdadeira, e F , se falsa.

- (I) Se a sequência acima possui $N - 1$ termos, isto é, $n = N - 1$, então N é primo.
 (II) Se $N = 2^k$, para algum $k \geq 2$ inteiro, então $\text{mdc}(N, a_i + a_{i+1}) \geq 4$, $\forall i = 1, \dots, 2^{k-1} - 1$.
 (III) Se $N = 3^k$, para algum $k \geq 1$ inteiro, $\text{mdc}(N, a_i + a_{i+1}) \geq 9$, $\forall i = 1, \dots, 2 \cdot 3^{k-1} - 1$.

A correspondência correta entre os valores V e F e as afirmativas, respeitando a ordem em que foram apresentadas, é:

- (a) V-F-F (b) V-V-F (c) V-V-V (d) F-F-V (e) V-V-V (f) F-V-F

Solução:

(I) Se a sequência descrita possui $N - 1$ termos, então $a_i = i$, para $i = 1, \dots, N - 1$.

Assim,

$$\text{mdc}(N, i) = 1, \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Ou seja, $\nexists 1 < a < N$ tal que $a \mid N$. Portanto, N é primo. Ou seja, (I) é verdadeiro.

(II) Se $N = 2^k$, para $k \geq 2$ inteiro, então

$$\text{mdc}(N, 2i) \geq 2 \quad \text{e} \quad \text{mdc}(N, 2i - 1) = 1, \quad \forall i \geq 1.$$

Assim, $a_i = 2i - 1$, para $i = 1, \dots, 2^{k-1}$, e

$$a_i + a_{i+1} = 2i - 1 + 2(i + 1) - 1 = 4i, \quad i = 1, \dots, 2^{k-1} - 1.$$

Portanto,

$$\text{mdc}(N, a_i + a_{i+1}) \geq 4, \quad \forall i = 1, \dots, 2^{k-1} - 1.$$

Ou seja, (II) é verdadeiro.

(III) Se $N = 3^k$, para $k \geq 1$ inteiro, então

$$\text{mdc}(N, 3i) \geq 3 \quad \text{e} \quad \text{mdc}(N, 3i - 1) = \text{mdc}(N, 3i - 2) = 1, \quad \forall i \geq 1.$$

Assim,

$$a_{2i-1} = 3i - 2 \quad \text{e} \quad a_{2i} = 3i - 1, \quad i = 1, \dots, 3^{k-1}.$$

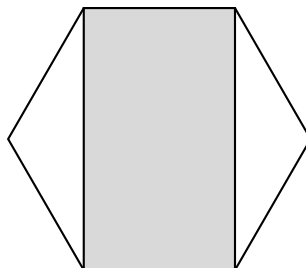
Segue daí $a_1 + a_2 = 3$ e, portanto,

$$\text{mdc}(N, a_1 + a_2) = 3.$$

Ou seja, (III) é falso.

Resposta: (b) V-V-F

8. A figura abaixo exibe um hexágono regular que contém um retângulo em seu interior (pintado em cinza).



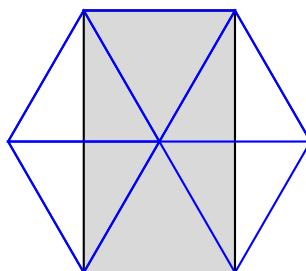
Percentualmente, quão maior é a área do hexágono relativamente à área do retângulo ?

- (a) 50% (b) 38% (c) 41% (d) 35% (e) 20% (f) 55%

Solução: Como o hexágono é regular, podemos decompô-lo em 6 triângulos isósceles congruentes, conforme figura abaixo. Então, tais triângulos têm todos a mesma área A e observe que

$$\frac{A_{\text{hexágono}}}{A_{\text{retângulo}}} = \frac{6A}{4A} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ou seja, $A_{\text{hexágono}}$ é 150% vezes $A_{\text{retângulo}}$. Sendo assim, percentualmente, $A_{\text{hexágono}}$ é 50% maior do que a área do retângulo.



Resposta: (a) 50%

9. A medida dos ângulos A,B,C e D de um quadrilátero ABCD estão na razão de 1:2:3:4. A medida do menor ângulo em graus é:

- (a) 30° (b) 60° (c) 20° (d) 45° (e) 18° (f) 36°

Solução: Vamos chamar os ângulos A, B, C e D de acordo com a razão dada: $A = x$, $B = 2x$, $C = 3x$, $D = 4x$. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360 graus:

$$A + B + C + D = 360^\circ$$

Substituindo os valores:

$$x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$$

$$(1 + 2 + 3 + 4)x = 360^\circ$$

donde

$$10x = 360^\circ$$

ou seja

$$x = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

O menor ângulo é o A, que é $x = 36^\circ$.

Resposta: (f) 36°

10. Uma turma fez uma prova. Se a nota mais alta, 96, for retirada, a média da turma inteira diminui para 75. Se a nota mais baixa, 42, for retirada, a média da turma inteira aumenta para 78. Quantos alunos há na turma?

(a) 10 (b) 25 (c) 12 (d) 19 (e) 32 (f) 18

Solução: Seja n o número total de alunos e S a soma total das notas. Removendo a nota mais alta (96): Ao remover 96, a média dos $n - 1$ alunos restantes é 75:

$$\frac{S - 96}{n - 1} = 75 \quad (1)$$

Multiplicando ambos os lados por $n - 1$:

$$S - 96 = 75(n - 1) \quad (1')$$

Removendo a nota mais baixa (42): Ao remover 42, a média dos $n - 1$ alunos restantes é 78:

$$\frac{S - 42}{n - 1} = 78 \quad (2)$$

Multiplicando ambos os lados por $n - 1$:

$$S - 42 = 78(n - 1) \quad (2')$$

Subtraindo as equações (2') e (1'):

$$(S - 42) - (S - 96) = 78(n - 1) - 75(n - 1)$$

$$S - 42 - S + 96 = (78 - 75)(n - 1)$$

$$54 = 3(n - 1)$$

$$n - 1 = 18 \Rightarrow n = 19$$

Portanto o número de alunos na turma é 19.

Resposta: (d) 19

11. A solução da equação

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2$$

é:

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 3 (e) $\frac{2}{3}$ (f) 4

Solução: Para resolver a equação

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = 2,$$

:

$$u + v = 2.$$

Agora, vamos elevar ambos os lados da equação vamos começar isolando um dos termos. Primeiro, denotamos:

$$u = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}},$$

$$v = \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}.$$

Assim, a equação se torna ao quadrado:

$$u^2 + 2uv + v^2 = 4.$$

Sabemos que:

$$u^2 = x + \sqrt{2x-1}, \quad v^2 = x - \sqrt{2x-1}.$$

Portanto,

$$u^2 + v^2 = (x + \sqrt{2x-1}) + (x - \sqrt{2x-1}) = 2x.$$

Assim, substituindo na equação elevada ao quadrado, temos:

$$2x + 2uv = 4.$$

Para encontrar uv , multiplicamos u e v :

$$\begin{aligned} uv &= \sqrt{(x + \sqrt{2x-1})(x - \sqrt{2x-1})} = \sqrt{x^2 - (2x-1)} = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \\ &= \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|. \end{aligned}$$

Agora, substituindo uv na equação:

$$2x + 2|x-1| = 4.$$

Vamos considerar os dois casos para $|x-1|$:

Caso 1: $x-1 \geq 0$ (ou seja, $x \geq 1$) Neste caso, $|x-1| = x-1$:

$$2x + 2(x-1) = 4 \implies 2x + 2x - 2 = 4 \implies 4x - 2 = 4 \implies 4x = 6 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Como $\frac{3}{2} \geq 1$, essa solução é válida.

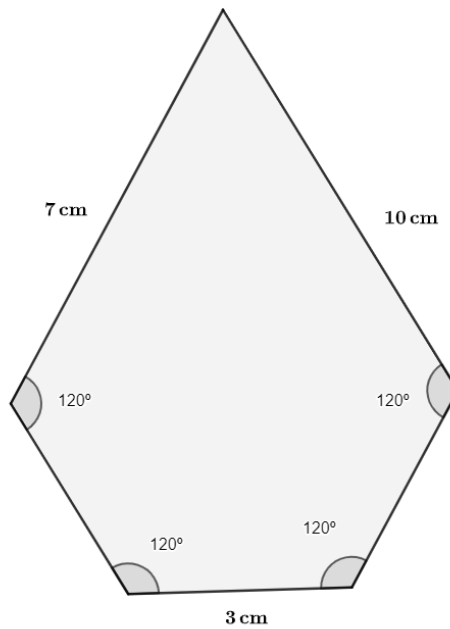
Caso 2: $x-1 < 0$ (ou seja, $x < 1$) Neste caso, $|x-1| = 1-x$:

$$2x + 2(1-x) = 4 \implies 2x + 2 - 2x = 4 \implies 2 = 4,$$

o que é uma contradição. Portanto, não há soluções neste caso.

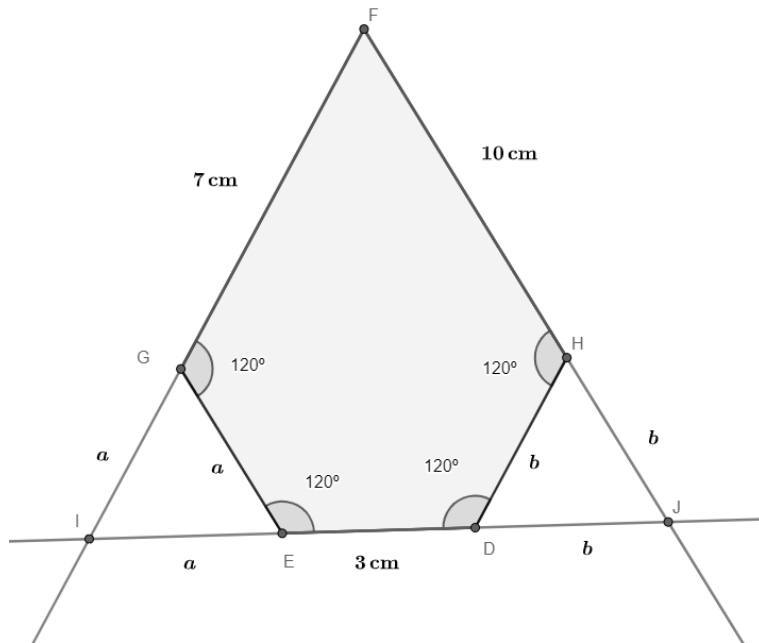
Resposta: (c) $\frac{3}{2}$

12. A medida do perímetro do polígono abaixo é:



- (a) 27 cm (b) 31 cm (c) 29 cm (d) 32 cm (e) 34 cm (f) 30 cm

Solução:



Os triângulos $\triangle GIE$, $\triangle HDJ$ e $\triangle FIJ$ são equiláteros. Denotando $GE = a$ e $HD = b$, valem as seguintes relações

$$a + 7 = 10 + b = a + b + 3,$$

De onde segue que $a = 7$ e $b = 4$. Assim, o perímetro do polígono é $7 + 7 + 3 + 4 + 10 = 31$.

Resposta: (b) 31 cm