

1. Considere a sequência definida por $c_1 = 1$ e $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{n(n+1)}$, para $n > 1$. O valor de c_{100} é:

(a) $\frac{99}{100}$ (b) $\frac{201}{99}$ (c) $\frac{199}{100}$ (d) $\frac{100}{99}$ (e) $\frac{100}{199}$ (f) $\frac{99}{199}$

Solução: Observe que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Assim, podemos escrever

$$c_{n+1} = c_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Calculando alguns termos da sequência, temos:

$$c_2 = c_1 + 1 - \frac{1}{2}$$

$$c_3 = c_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = c_1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = c_1 + 1 - \frac{1}{3}$$

$$c_4 = c_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = c_1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = c_1 + 1 - \frac{1}{4}$$

De modo geral, podemos escrever

$$c_n = c_1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Como $c_1 = 1$, ficamos com:

$$c_n = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$

Logo,

$$c_{100} = 2 - \frac{1}{100} = \frac{200 - 1}{100} = \frac{199}{100}.$$

Resposta: (c) $\frac{199}{100}$

2. Qual o resto da divisão de $5^{2025} + 7^{2025}$ por 6?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4 (f) 5

Solução: Temos que $7 = 6 + 1$, ou seja, é um número da forma $6q + 1$, com $q \in \mathbb{Z}$. Observe que o quadrado de todo número da forma $6q + 1$ também é da forma $6q + 1$, pois

$$(6q + 1)^2 = 36q^2 + 12q + 1 = 6(6q^2 + 2q) + 1 = q_1 + 1,$$

onde $q_1 = 6q^2 + 2q$. De modo geral, toda potencia de 7 é da forma $6q + 1$, em particular, $7^{2025} = 6q' + 1$, com $q' \in \mathbb{Z}$. Observe agora que $5 = 6 - 1$, ou seja, é um número da forma $6k - 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Temos

$$(6k - 1)^2 = 36k^2 - 12k + 1 = 6(6k^2 - 2k) + 1 = 6k_1 + 1,$$

onde $k_1 = 6k^2 - 2k$. Além disso,

$$(6k - 1)(6q + 1) = 36kq + 6k - 6q - 1 = 6(6kq + k - q) + 1 = 6q_2 + 1,$$

onde $q_2 = 6kq + k - q$. Assim, as potencias par de 5 são da forma $6q + 1$ e as potências impar são da forma $6k - 1$. Como 2025 é ímpar, segue que $5^{2025} = 6k' - 1$, com $k' \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$5^{2025} + 7^{2025} = 6k' - 1 + 6q' + 1 = 6k' + 6q' = 6(k' + q')$$

e portanto, deixa resto 0 na divisão por 6.

Resposta: (a) 0

3. Qual a quantidade máxima de números distintos de dois dígitos que se pode escrever sem que a soma de quaisquer dois deles seja 52?

(a) 73 (b) 62 (c) 74 (d) 57 (e) 16 (f) 16

Solução: Existem 90 números de dois dígitos:

$$\underbrace{10 \ 11 \ 12 \ \dots \ 42}_{33 \text{ números}} \quad \underbrace{43 \ 44 \ \dots \ 99}_{57 \text{ números}}$$

Todos os 57 números maiores ou iguais a 43 podem aparecer, pois não existe outro número de 2 dígitos que somando com eles resultará em 52. Para os números entre 1 e 42, existem 16 possibilidades de pares que somados resultam em 52, são eles:

$$(10, 42), (11, 41), (12, 40), (13, 39), \dots, (25, 27).$$

Dentre esses, apenas um de cada par pode aparecer, ou seja, temos mais 16 números que podem ser escritos. Por fim, observe que o número 26 também pode ser escrito, pois $26 + 26 = 52$ e só pode aparecer números distintos. Portanto, podemos escrever $57 + 16 + 1 = 74$ (ou, analogamente, $90 - 16 = 74$) números distintos sem que a soma de qualquer dois seja 52.

Resposta: (c) 74

4. Em uma escola, foi feita uma pesquisa com 200 alunos e obtiveram os seguintes dados:

- 130 alunos praticam natação
- 90 alunos praticam vôlei
- 50 alunos não praticam nenhum dos esportes

Marque a alternativa INCORRETA:

- (a) 150 alunos praticam pelo menos um dos dois esportes.
- (b) 70 alunos praticam vôlei e natação.
- (c) 60 alunos praticam apenas natação.
- (d) A quantidade de alunos que praticam os dois esportes é o dobro da quantidade dos alunos que praticam apenas vôlei.
- (e) A quantidade de alunos que praticam vôlei e natação é maior que a quantidade que praticam apenas natação.
- (f) A quantidade de alunos que praticam apenas natação é maior que a quantidade de alunos que praticam apenas vôlei.

Solução: Como 50 alunos não praticam nenhum dos esportes, isso significa que o restante pratica um dos dois esportes, ou seja,

$$200 - 50 = 150 \text{ alunos praticam pelo menos um dos esportes.}$$

Logo, o item (a) é verdadeiro.

Denotando por N o conjunto dos alunos que fazem natação e por V o conjunto dos alunos que fazem vôlei, temos que

$$|N \cup V| = |N| + |V| - |N \cap V|.$$

Como $|N| = 130$, $|V| = 90$ e $|N \cup V| = 150$, segue que

$$|N \cap V| = 130 + 90 - 150 = 70.$$

Logo, 70 alunos praticam vôlei e natação e portanto o item (b) também é verdadeiro.

Concluimos também que o número de alunos que praticam apenas natação é dado por

$$130 - 70 = 60,$$

e assim os itens (c) e (e) também estão corretos. Já o número de alunos que praticam apenas vôlei é dado por

$$90 - 70 = 20,$$

o que mostra que o item (f) também está correto e o item (d) incorreto.

Resposta: (d) A quantidade de alunos que praticam os dois esportes é o dobro da quantidade dos alunos que praticam apenas vôlei.

5. Joana investiu R\$ 1.000,00 em um fundo de ações de alto risco durante dois anos. O rendimento foi:

- **Ano 1:** ganho de 44%
- **Ano 2:** perda de 19%

Ela quer saber:

”Qual foi o **rendimento médio anual**, de forma que, se eu tivesse esse mesmo rendimento em ambos os anos, teria terminado com o mesmo valor final?”

- (a) ganho de **12,5%** ao ano (c) ganho de **31,5%** ao ano (e) ganho de **8%** ao ano
(b) perda de **12,5%** ao ano (d) perda de **31,5%** ao ano (f) perda de **8%** ao ano

Solução: Calcular o **rendimento médio composto anual**.

- Ano 1: $+44\% \Rightarrow 1,44$
- Ano 2: $-19\% \Rightarrow 0,81$

Fator de correção após dois anos

$$F = 1,44 \times 0,81 = 1,2^2 \times 0,9^2 = 1,1664$$

Ou seja, o capital final foi:

$$R\$1.000 \times 1,1664 = R\$1.166,40$$

Qual seria o único fator x tal que $x^2 = 1,1664$?

Agora, calculamos a **raiz quadrada** de 1,1664:

$$\sqrt{1,1664} = \sqrt{1,2^2 \times 0,9^2} = 1,2 \times 0,9 = 1,08$$

o que nos leva a um reajuste médio anual de

$$1,08 - 1 = 0,08 = 8\%$$

Resposta: (e) ganho de **8%** ao ano

6. Em um tabuleiro 8×8 (como um de xadrez), um **caminho matemático** é definido como uma sequência de movimentos começando no canto inferior esquerdo e terminando no canto superior direito, onde em cada movimento você pode:

- Ir para a direita ($\rightarrow$),
- Ir para cima ($\uparrow$),
- Ou ir na diagonal superior direita ($\nearrow$).

Quantos caminhos matemáticos distintos existem se não houver restrições?

- (a) 12870 (b) 24310 (c) 32192 (d) 48620 (e) 64184 (f) 84320

Solução: Definimos:

- d : número de movimentos diagonais
- r : movimentos para direita
- u : movimentos para cima

As restrições são:

$$\begin{cases} r + d = 7 & \text{(total de incrementos na coluna)} \\ u + d = 7 & \text{(total de incrementos na linha)} \end{cases}$$

Logo, $r = u = 7 - d$, e o número total de passos é $14 - d$. Para cada d (de 0 a 7), o número de caminhos é:

$$C_d = \frac{(14 - d)!}{(7 - d)! \cdot (7 - d)! \cdot d!}$$

$$d = 0 : C_d = \frac{14!}{7!7!} = 3432$$

$$d = 1 : C_d = \frac{13!}{6!6!1!} = 12012$$

$$d = 2 : C_d = \frac{12!}{5!5!2!} = 16632$$

$$d = 3 : C_d = \frac{11!}{4!4!3!} = 11550$$

$$d = 4 : C_d = \frac{10!}{3!3!4!} = 4200$$

$$d = 5 : C_d = \frac{9!}{2!2!5!} = 756$$

$$d = 6 : C_d = \frac{8!}{1!1!6!} = 56$$

$$d = 7 : C_d = \frac{7!}{0!0!7!} = 1$$

Total de caminhos

$$\begin{aligned}C_{\text{total}} &= 3432 + 12012 + 16632 + 11550 \\&\quad + 4200 + 756 + 56 + 1 \\&= \boxed{48639}\end{aligned}$$

Resposta: QUESTÃO ANULADA (nenhuma alternativa corresponde à solução.)

7. Selecionando ao acaso um divisor do número 3600 qual a probabilidade do mesmo ser um quadrado perfeito?

(a) $1/5$ (b) $4/15$ (c) $2/9$ (d) $1/3$ (e) $5/18$ (f) $3/10$

Solução: Primeiro, fatoramos 3600 em seus fatores primos:

$$\begin{aligned}3600 &= 36 \times 100 \\&= (6 \times 6) \times (10 \times 10) \\&= (2 \cdot 3)^2 \times (2 \cdot 5)^2 \\&= 2^4 \times 3^2 \times 5^2\end{aligned}$$

Portanto, a forma fatorada é:

$$3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$$

O número total de divisores positivos é dado por:

$$(\text{Expoente de } p_1 + 1) \times (\text{Expoente de } p_2 + 1) \times \cdots$$

Para $3600 = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$:

$$(4 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 5 \times 3 \times 3 = 45 \text{ divisores}$$

Um divisor é quadrado perfeito quando todos os expoentes em sua fatoração são pares.

- Para 2^a : $a \in \{0, 2, 4\}$ (3 opções)
- Para 3^b : $b \in \{0, 2\}$ (2 opções)
- Para 5^c : $c \in \{0, 2\}$ (2 opções)

Total de divisores quadrados perfeitos:

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

A probabilidade P é dada por:

$$P = \frac{\text{Número de divisores quadrados perfeitos}}{\text{Total de divisores}} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

A probabilidade é $\boxed{\frac{4}{15}}$.

Resposta: (b) 4/15

8. A **Mega-Sena** é uma das loterias mais populares do Brasil. Para participar, o apostador deve escolher **de 6 a 20 números** dentre os **60 disponíveis** no volante (numerados de 01 a 60). O jogo básico consiste em escolher 6 números, e o apostador ganha prêmios se acertar:

- 4 números: **Quadra**
- 5 números: **Quina**
- 6 números: **Sena** (o prêmio principal)

O valor da aposta varia conforme a quantidade de dezenas marcadas:

Quantidade de dezenas	Valor da aposta (R\$)
6 (aposta simples)	5,00
7	35,00
8	140,00
9	420,00
10	1.050,00

Quando o apostador marca mais de 6 dezenas, ele está fazendo uma **aposta múltipla**. Nesse caso, ele está automaticamente jogando com **todas as combinações possíveis de 6 dezenas** entre as dezenas escolhidas.

Por exemplo, se alguém marca 7 dezenas, está fazendo todas as combinações possíveis de 6 números entre esses 7, ou seja, está jogando com $\binom{7}{6} = 7$ jogos ao mesmo tempo.

Um apostador faz uma **aposta múltipla com 10 dezenas**. No sorteio, ele acerta exatamente as 6 dezenas sorteadas (ou seja, faz uma Sena).

Sabendo que ele está, na prática, jogando com todas as combinações de 6 dezenas entre as 10 escolhidas, **quantas Quadras ele fez nesse sorteio?**

- (a) 60 (b) 75 (c) 84 (d) 90 (e) 105 (f) 120

Solução:

O apostador marcou 10 dezenas e acertou as 6 dezenas sorteadas. Ele fez uma **aposta múltipla**, o que significa que está concorrendo com todas as combinações possíveis de 6 dezenas entre as 10 escolhidas:

$$\binom{10}{6} = 210 \quad \text{apostas de 6 dezenas}$$

Nosso objetivo é saber quantas dessas 210 apostas contêm **exatamente 4 das 6 dezenas sorteadas**, ou seja, quantas fazem **Quadra**.

Para isso:

- Escolhemos 4 das 6 dezenas sorteadas: $\binom{6}{4}$
- Escolhemos 2 das 4 dezenas restantes (as que não foram sorteadas): $\binom{4}{2}$

$$\text{Quadras} = \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = \boxed{90}$$

Resposta: (d) 90

9. Para cada número real x , defina a operação $\langle x \rangle = \frac{x}{x+1}$. Seja

$$M = \left\langle \frac{1}{2025} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2024} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2023} \right\rangle + \cdots + \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \langle 1 \rangle + \langle 2 \rangle + \cdots + \langle 2025 \rangle.$$

Dessa forma, o valor de $2M$ é:

- (a) 2024 (b) 2025 (c) 2026 (d) 4051 (e) 4049 (f) 4050

Solução: Note que

$$\langle x \rangle = 1 - \frac{1}{x+1}$$

e que

$$\frac{1}{1+A} + \frac{1}{1+\frac{1}{A}} = 1$$

Reordenando a soma, obtemos

$$M = \left\langle \frac{1}{2025} \right\rangle + \langle 2025 \rangle + \left\langle \frac{1}{2024} \right\rangle + \langle 2024 \rangle + \cdots + \langle 2 \rangle + \left\langle \frac{1}{2} \right\rangle + \langle 1 \rangle$$

Assim,

$$\begin{aligned} M = & \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2025}} \right) + \left(1 - \frac{1}{1 + 2025} \right) + \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2024}} \right) + \left(1 - \frac{1}{1 + 2024} \right) + \\ & \cdots + \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \right) + \left(1 - \frac{1}{1 + 2} \right) + \frac{1}{1 + 1} \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$M = 2 \cdot 2024 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2025}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2025}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2024}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2024}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 + 2} \right) + \frac{1}{2}$$

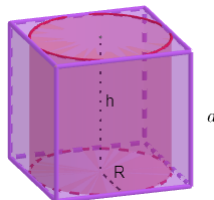
Finalmente

$$M = 2 \cdot 2024 - 2024 + \frac{1}{2} = 2024 + \frac{1}{2}$$

e $2M = 4048 + 1 = 4049$.

Resposta: (e) 4049

10. Um cilindro equilátero está inscrito em um cubo de arestas medindo $a\text{ cm}$, conforme figura abaixo. Então, calculando a área total desse cilindro em função de a , obtemos:



- (a) $\frac{3\pi a^2}{2} \text{ cm}^2$ (c) $3\pi a^3 \text{ cm}^2$; (e) $\frac{3\pi a^2}{3} \text{ cm}^2$
(b) $3\pi a^2 \text{ cm}^2$ (d) $\frac{3\pi a^3}{2} \text{ cm}^2$ (f) $\frac{3\pi a^3}{3} \text{ cm}^2$

Solução: Seja a a medida da aresta do cubo. Então

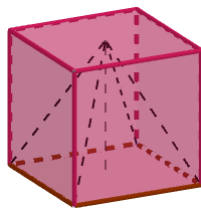
$$S = 6a^2.$$

Como o cilindro está inscrito no cubo, suas bases são círculos inscritos em duas bases opostas do cubo. Logo o raio do círculo da base do cilindro é $R = \frac{a}{2}$. Além disso, a altura do cilindro será igual a medida da aresta do cubo, ou seja $h = a$. Daí, a área total do cilindro é dada por

$$S_{ci} = 2\pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2}a \right) = 2\pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Resposta: (a) $\frac{3\pi a^2}{2} \text{ cm}^2$

11. Um cubo de arestas medindo 4cm contém uma pirâmide regular, a qual tem como base uma das faces do cubo e seu vértice na face oposta. Calcule o volume da região interior ao cubo e exterior a pirâmide.



- (a) 128; (b) 64; (c) 32; (d) $\frac{64}{3}$; (e) $\frac{32}{3}$; (f) $\frac{128}{3}$;

Solução: O volume de um cubo de aresta medindo $a \text{ cm}$ é $a^3 \text{ cm}^3$. Logo, o volume do cubo de arestas medindo 4cm será:

$$V_{\text{cubo}} = 4^3 = 64\text{cm}^3.$$

Por outro lado, o volume da Pirâmide é dado por

$$V_{\text{pir}} = \frac{1}{3}S_{\text{base}}H,$$

onde S_{base} denota a área da base da pirâmide e H a altura do pirâmide.

Mas, neste caso, a base é um quadrado de lados medindo 4cm , cuja área é dada $S_{\text{base}} = 16\text{cm}^2$. Além disso, como a pirâmide é regular, a altura H é igual a medida da aresta do cubo, ou seja, $H = 4\text{cm}$. Assim,

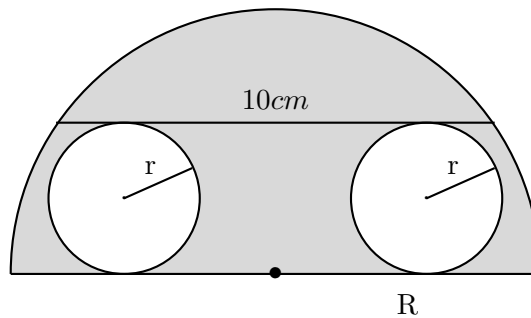
$$V_{\text{pir}} = \frac{1}{3}(16).4 = \frac{64}{3} \text{ cm}^3.$$

Portanto, o volume procurado é:

$$V = V_{\text{cubo}} - V_{\text{pir}} = \left(64 - \frac{64}{3}\right) = \frac{128}{3} \text{ cm}^3$$

Resposta: (f) $\frac{128}{3}$;

12. Na figura abaixo temos um semicírculo de raio R que contém em seu interior dois círculos de mesmo raio r , os quais tangenciam o diâmetro e uma corda do semicírculo.



Sabendo que o comprimento da corda é de 10 cm, a área da região acinzentada mede:

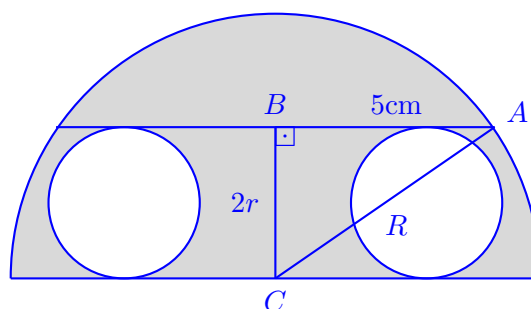
- | | | |
|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| a) $10\pi \text{ cm}^2$ | c) $12\pi \text{ cm}^2$ | e) $12,5\pi \text{ cm}^2$ |
| b) $10,5\pi \text{ cm}^2$ | d) $13\pi \text{ cm}^2$ | f) $11,3\pi \text{ cm}^2$ |

Solução:

A área A procurada é dada pela fórmula

$$A = \frac{1}{2}\pi R^2 - 2\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(R^2 - 4r^2).$$

Por outro lado, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo retângulo ABC da figura a seguir,



obtemos

$$R^2 - 4r^2 = 25.$$

Desse modo,

$$A = \frac{25\pi}{2} \text{ cm}^2 = 12,5\pi \text{ cm}^2.$$

Resposta: (e) $12,5\pi \text{ cm}^2$