38ª edição.

OLIMPIADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA

PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES

www.mat.ufcg.edu.br/ocm

GABARITO DA PROVA NÍVEL II

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO

NÚMERO

COMPLEMENTO

BAIRRO

CIDADE

UF

CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL)

DD

TELEFONE FIXO

ESCOLA

DD

TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	B	C	D	**E**	F
2	A	B	C	**D**	E	F
3	A	B	C	D	E	**F**
4	A	**B**	C	D	E	F
5	A	B	**C**	D	E	F
6	**A**	B	C	D	E	F
7	A	B	**C**	D	E	F
8	A	**B**	C	D	E	F
9	A	B	C	D	**E**	F
10	A	B	C	**D**	E	F
11	A	B	**C**	D	E	F
12	A	**B**	C	D	E	F

Observação:
As letras em vermelho no gabarito ao lado correspondem as alternativas corretas.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz

$$f(f(x)) = x^2 - x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Qual(is) do(s) seguinte(s) valor(es) pode(m) ser $f(0)$?

(a) 0. (c) 2. (e) 0 ou 2.
(b) 1. (d) 0 ou 1. (f) 1 ou 2.

Solução: Definamos $a = f(0)$. Substituindo $x = 0$ na equação, obtemos

$$f(f(0)) = 0^2 - 0 = 0,$$

ou seja, $f(a) = 0$. Agora substituímos $x = a$ na equação, deduzimos

$$f(f(a)) = a^2 - a.$$

Como $f(a) = 0$, segue que

$$f(0) = a^2 - a.$$

Mas $f(0) = a$, então

$$a = a^2 - a.$$

Logo,

$$a^2 - 2a = 0$$

Assim,

$$a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 2.$$

Portanto, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$.

Resposta: (e) 0 ou 2

2. Sejam a, b, c, d inteiros positivos tais que

$$\frac{37}{27} = 1 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}}.$$

O valor de $abcd$ é:

(a) 0. (b) 4. (c) 6. (d) 12. (e) 15. (f) 24.

Solução: Primeiro, subtraímos 1 dos dois lados, obtemos

$$\frac{37}{27} - 1 = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}},$$

isto é,

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{27}{10}.$$

Como a é inteiro positivo e

$$\frac{27}{10} = 2 + \frac{7}{10},$$

concluímos que

$$a = 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{7}{10}.$$

Consequentemente,

$$b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}} = \frac{10}{7}.$$

Como $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$, segue que

$$b = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{c + \frac{1}{d}} = \frac{3}{7}.$$

Invertendo,

$$c + \frac{1}{d} = \frac{7}{3}.$$

Como $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, temos

$$c = 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{3}.$$

Assim,

$$d = 3.$$

Portanto,

$$abcd = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Resposta: (d) 12.

3. Assinale a alternativa correta. Qual é o algarismo das unidades de 7^{2026}?

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 5. (e) 7. (f) 9.

Solução: Basta observar o padrão dos algarismos das unidades das potências de 7:

$$7^1 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$7^3 = 343 \equiv 3 \pmod{10},$$

$$7^4 = 2401 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Portanto, os algarismos das unidades se repetem em ciclos de 4 são

$$7, 9, 3, 1.$$

Agora como

$$2026 = 4 \cdot 506 + 2,$$

segue que

$$2026 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Assim, o algarismo das unidades de 7^{2026} é o mesmo de 7^2, isto é, 9.

Resposta: (f) 9.

4. Determine o valor de

$$\frac{1}{2^{-2026}+1} + \frac{1}{2^{-2025}+1} + \frac{1}{2^{-2024}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{2024}+1} + \frac{1}{2^{2025}+1} + \frac{1}{2^{2026}+1}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) 2026. (b) $2026,5$. (c) 2027. (d) $2027,5$. (e) 2028. (f) $2028,5$.

Solução: Considere a soma

$$S = \sum_{k=-2026}^{2026} \frac{1}{2^k+1}.$$

A ideia principal é agrupar termos com expoentes opostos: k e $-k$. Para $k \neq 0$, temos

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^{-k}+1} = \frac{1}{2^k+1} + \frac{2^k}{2^k+1} = 1.$$

Assim, cada par

$$\left(\frac{1}{2^k+1}, \frac{1}{2^{-k}+1}\right)$$

contribui com 1 para a soma. Como k varia de 1 até 2026, existem 2026 pares desse tipo. Além disso, sobra o termo central correspondente a $k = 0$:

$$\frac{1}{2^0+1} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$S = 2026 + \frac{1}{2},$$

isto é,

$$S = 2026,5.$$

Resposta: (b) $2026,5$.

5. Determine o valor de x que satisfaz

$$\sqrt[5]{\frac{3^{14}+3^x}{3^x+3^4}} = 3.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) 7. (b) 8. (c) 9. (d) 10. (e) 11. (f) 12.

Solução: Elevando ambos os lados da equação à quinta potência, obtemos

$$\frac{3^{14}+3^x}{3^x+3^4} = 3^5.$$

Multiplicando os dois lados por $3^x + 3^4$, temos

$$3^{14} + 3^x = 3^5(3^x + 3^4),$$

ou seja,

$$3^{14} + 3^x = 3^{x+5} + 3^9.$$

Reorganizando os termos,

$$3^{14} - 3^9 = 3^{x+5} - 3^x,$$

e então,

$$3^9(3^5 - 1) = 3^x(3^5 - 1).$$

Simplificando,

$$3^9 = 3^x.$$

Logo,

$$x = 9.$$

Resposta: (c) 9.

6. Em uma sala de aula, a média das notas de 35 alunos foi exatamente 8. Sabe-se que:

   - 5 alunos tiraram exatamente a nota 8;
   - a média das notas dos alunos que tiraram nota maior que 8 foi 9;
   - a média das notas dos alunos que tiraram nota menor que 8 foi 6.

   Quantos alunos tiraram nota maior que 8?

   (a) 20. (b) 15. (c) 18. (d) 22. (e) 25. (f) 10.

   Solução: Sejam x o número de alunos que tiraram nota maior que 8 e y o número de alunos que tiraram nota menor que 8. Como há 35 alunos no total e 5 tiraram exatamente 8, temos

$$x + y = 30.$$

A soma total das notas da turma é

$$35 \cdot 8 = 280.$$

Os 5 alunos que tiraram exatamente 8 contribuem com $5 \cdot 8 = 40$. Logo, a soma das notas dos outros 30 alunos é $280 - 40 = 240$. Agora usamos as médias dos dois grupos. Os alunos com nota maior que 8 têm média 9, logo a soma de suas notas é $9x$. Os alunos com nota menor que 8 têm média 6, logo a soma de suas notas é $6y$. Portanto,

$$9x + 6y = 240.$$

Substituindo $y = 30 - x$, obtemos

$$9x + 6(30 - x) = 240.$$

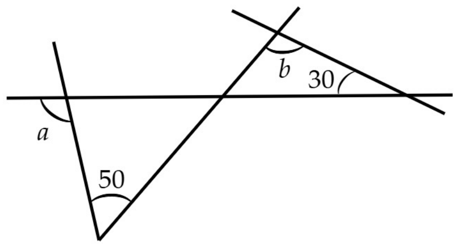
Resolvendo a equação do 1ª grau obtemos

$$x = 20.$$

Assim, o número de alunos que tiraram nota maior que 8 é $x = 20$.

Resposta: (a) 20.

7. Na figura abaixo, os ângulos indicados medem 50° e 30°. Os outros dois ângulos destacados são a e b.



Assinale a alternativa que representa a centésima parte de $a + b$:

(a) 1,6°. (b) 1,8°. (c) 2°. (d) 2,2°. (e) 2,4°. (f) 2,6°.

Solução: Considere a reta horizontal como referência. A reta inclinada da direita forma um ângulo de 30° com a horizontal. Logo, sua direção para a esquerda faz com a horizontal o ângulo

$$180° - 30° = 150°.$$

Seja θ o ângulo que a reta inclinada que sobe para a direita faz com a horizontal. Como o ângulo no vértice inferior mede 50°, segue que

$$a = \theta + 50°.$$

O ângulo b é o ângulo entre a direção de 150° e a reta de inclinação θ. Assim,

$$b = 150^\circ - \theta.$$

Somando as duas expressões,

$$a + b = (\theta + 50^\circ) + (150^\circ - \theta).$$

Portanto,

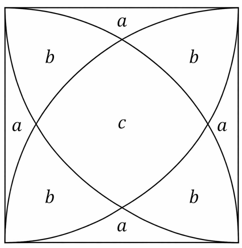
$$a + b = 200^\circ.$$

Logo, a centésima parte de $a + b$ é 2°.

Resposta: (c) 2°.

8. Considere um quadrado de lado 1. No interior desse quadrado, são traçados quatro arcos de circunferência de raio 1, cada um com centro em um dos vértices do quadrado, particionando a figura em regiões cujas áreas são indicadas por a, b e c, conforme a figura. Suponha ainda que

$$c - a = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$



Determine o valor de $2a + b$.

(a) $1 - \frac{\pi}{3}$. (b) $1 - \frac{\pi}{4}$. (c) $1 - \frac{\pi}{6}$. (d) $\frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}$. (e) $\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}$. (f) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Solução: Como a área do quadrado é 1, temos

$$4a + 4b + c = 1.$$

Além disso, cada arco é um quarto de circunferência de raio 1, cuja área é $\frac{\pi}{4}$. Observando a decomposição de um desses quartos de círculo, obtemos

$$2a + 3b + c = \frac{\pi}{4}.$$

Do enunciado,

$$c - a = \frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} := d.$$

Assim, $c = a + d$. Substituindo em na primeira equação, obtemos

$$5a + 4b = 1 - d.$$

Ademais, usando $c = a + d$ na segunda equação, temos

$$3a + 3b = \frac{\pi}{4} - d.$$

Logo,

$$a + b = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - d\right).$$

Agora, substituindo o valor de d, tem-se

$$a + b = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}.$$

De $5a + 4b = 1 - d$,

$$a + 4(a + b) = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Mas $4(a + b) = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$. Logo,

$$a = 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Assim, desde que $2a + b = a + (a + b)$, concluímos que

$$2a + b = \left(1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}.$$

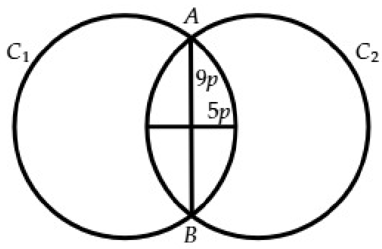
Simplificando,

$$2a + b = 1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Logo, $2a + b = 1 - \frac{\pi}{4}$.

Resposta: (b) $1 - \frac{\pi}{4}$.

9. Sejam C_1 e C_2 duas circunferências congruentes de raio r cujos centros pertencem a uma mesma reta horizontal. As circunferências se intersectam em dois pontos A e B. Sabe-se que $AB = 9p$ e a distância entre os dois arcos da região de interseção medida sobre a reta que une os centros é $5p$.



Determine o valor de $\dfrac{p}{r}$ e assinale a alternativa correta:

(a) $\dfrac{p}{r} = \dfrac{5}{58}$.
(b) $\dfrac{p}{r} = \dfrac{9}{53}$.
(c) $\dfrac{p}{r} = \dfrac{5}{53}$.
(d) $\dfrac{p}{r} = \dfrac{53}{10}$.
(e) $\dfrac{p}{r} = \dfrac{10}{53}$.
(f) $\dfrac{p}{r} = \dfrac{53}{5}$.

Solução: Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências, e sejam A e B os pontos de interseção. Como as circunferências são congruentes, o segmento AB é perpendicular ao segmento O_1O_2 e o intercepta em seu ponto médio M. Como $AB = 9p$, segue que

$$AM = MB = \frac{9p}{2}.$$

Além disso, a distância entre os dois arcos da "lente", medida sobre a reta que une os centros, é $5p$. Como M é o ponto médio dessa largura horizontal, cada metade mede $\dfrac{5p}{2}$. Seja

$$d = O_1O_2.$$

Então a distância de O_1 até M é

$$O_1M = \frac{d}{2}.$$

Por outro lado, sobre a reta O_1O_2, a parte da interseção que vai de um arco ao outro mede $5p$. Logo,

$$r - \frac{d}{2} = \frac{5p}{2}.$$

Agora, no triângulo retângulo O_1MA, temos

$$O_1A = r, \qquad O_1M = \frac{d}{2}, \qquad AM = \frac{9p}{2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{9p}{2}\right)^2,$$

isto é,

$$\left(r - \frac{d}{2}\right)\left(r + \frac{d}{2}\right) = \frac{81p^2}{4}.$$

Desde que $r - \frac{d}{2} = \frac{5p}{2}$, deduzimos

$$\frac{5p}{2}\left(r + \frac{d}{2}\right) = \frac{81p^2}{4}.$$

Simplificando,

$$r + \frac{d}{2} = \frac{81p}{10}.$$

Consequentemente,

$$\left(r - \frac{d}{2}\right) + \left(r + \frac{d}{2}\right) = \frac{5p}{2} + \frac{81p}{10}.$$

Logo,

$$2r = \frac{25p}{10} + \frac{81p}{10} = \frac{106p}{10} = \frac{53p}{5}.$$

Portanto,

$$\frac{p}{r} = \frac{10}{53}.$$

Resposta: (e) $\frac{p}{r} = \frac{10}{53}$.

10. Um bloco retangular possui base retangular de área 48 unidades quadradas e altura h. Sabe-se que, ao aumentar em 2 unidades o comprimento e em 2 unidades a largura da base, a área da nova base passa a ser 28 unidades quadradas maior que a área original. Além disso, a área total da superfície do bloco é igual a 144 unidades quadradas. Determine o volume do bloco.

(a) 72. (b) 84. (c) 88. (d) 96. (e) 98. (f) 102.

Solução: Sejam x e y as dimensões da base do bloco. Então

$$xy = 48.$$

Ao aumentar ambas as dimensões em 2 unidades, a nova área da base passa a ser $(x + 2)(y + 2)$. Como esse aumento foi de 28 unidades quadradas, temos

$$(x + 2)(y + 2) - xy = 28.$$

Simplificando, obtemos

$$x + y = 12.$$

Por outro lado, usando a informação sobre a área total do bloco retangular, deduzimos

$$2(xy + xh + yh) = 144.$$

Substituindo $xy = 48$ e $x + y = 12$, obtemos

$$2(48 + 12h) = 144.$$

Então

$$h = 2.$$

O volume do bloco é dado por

$$V = 48 \cdot 2 = 96.$$

Resposta: (d) 96.

11. Considere todas as sequências finitas compostas por seis números os quais pertencem ao conjunto $\{-1, 0, 1\}$. Quantas dessas sequências têm soma igual a 2, sabendo que o primeiro e o último termos são distintos e pertencem ao conjunto $\{-1, 1\}$?

(a) 10. (b) 16. (c) 20. (d) 24. (e) 30. (f) 36.

Solução: Como o primeiro e o último termos devem ser distintos e pertencem a $\{-1, 1\}$, existem apenas duas possibilidades:

$$(1, -1) \quad \text{ou} \quad (-1, 1).$$

Em ambos os casos, a soma dos extremos é 0. Portanto, os 4 termos centrais devem ter soma igual a 2. Agora contamos as sequências de comprimento 4 com termos em $\{-1, 0, 1\}$ cuja soma é 2. Sejam:

- p o número de termos iguais a 1,
- q o número de termos iguais a -1,
- z o número de termos iguais a 0.

Então,

$$p - q = 2 \quad \text{e} \quad p + q + z = 4.$$

Substituindo $p = q + 2$ na segunda igualdade

$$(q+2) + q + z = 4 \Rightarrow 2q + 2 + z = 4 \Rightarrow z = 2 - 2q.$$

Como $z \geq 0$, temos $q = 0$ ou $q = 1$. Se $q = 0$, então

$$p = 2, \quad z = 2.$$

Número de sequências:

$$\frac{4!}{2!\,0!\,2!} = 6.$$

Se $q = 1$, então

$$p = 3, \quad z = 0.$$

Número de sequências:

$$\frac{4!}{3!\,1!\,0!} = 4.$$

Total de sequências para os termos centrais:

$$6 + 4 = 10.$$

Como há 2 escolhas para os extremos, o total é

$$2 \cdot 10 = 20.$$

Resposta: (c) 20.

12. Quantos números naturais de dois algarismos possuem a propriedade de que a soma de seus algarismos é igual ao produto de seus algarismos menos 1?

(a) 1. (b) 2. (c) 3. (d) 4. (e) 5. (f) 6.

Solução: Seja o número $10a + b$ de dois dígitos a e b, com $a \neq 0$ e $0 \leq b \leq 9$. A condição dada é

$$a + b = ab - 1.$$

Assim, podemos escrever

$$ab - a - b + 1 = 2.$$

Logo,

$$(a-1)(b-1) = 2.$$

As decomposições de 2 em fatores inteiros não negativos são:

$$2 = 1 \cdot 2 \quad \text{ou} \quad 2 = 2 \cdot 1.$$

Portanto, temos dois casos para analisar. Primeiro caso é $(a-1, b-1) = (1, 2)$. Assim,

$$a = 2, \quad b = 3,$$

o que implica no número 23. Já no segundo caso $(a-1, b-1) = (2, 1)$, devemos ter

$$a = 3, \quad b = 2,$$

acarretando no número 32. Portanto, existem exatamente dois números que satisfazem a condição.

Resposta: (b) 2.