38ª edição.

OLIMPIADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA

PROFESSOR JOSÉ VIEIRA ALVES

www.mat.ufcg.edu.br/ocm

GABARITO DA PROVA NÍVEL III

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE | CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

UNIDADE ACADÊMICA DE MATEMÁTICA - UAMat

NOME COMPLETO DO ALUNO

ENDEREÇO

NÚMERO

COMPLEMENTO

BAIRRO

CIDADE

UF

CEP

ENDEREÇO ELETRÔNICO (EMAIL)

DD

TELEFONE FIXO

ESCOLA

DD

TELEFONE CELULAR

GABARITO

1	A	**B**	C	D	E	F
2	A	B	**C**	D	E	F
3	**A**	B	C	D	E	F
4	A	B	**C**	D	E	F
5	A	**B**	C	D	E	F
6	A	B	**C**	D	E	F
7	A	B	C	D	E	**F**
8	A	B	C	D	**E**	F
9	**A**	B	C	D	E	F
10	A	B	C	D	**E**	F
11	A	**B**	C	D	E	F
12	A	B	**C**	D	E	F

Observação:
As letras em vermelho no gabarito ao lado correspondem as alternativas corretas.

1. Considere o conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Escolhem-se três números distintos de S ao acaso. Qual a probabilidade de que esses três números, em alguma ordem, formem uma Progressão Aritmética?

   (a) 1/19 (b) 3/38 (c) 1/20 (d) 9/114 (e) 1/10 (f) 7/40

   Solução: Para que $\{a, b, c\}$ seja uma PA, devemos ter $a + c = 2b$. Isso implica que $a + c$ deve ser par, o que ocorre se a e c forem ambos pares ou ambos ímpares. No conjunto $\{1, \ldots, 20\}$, temos 10 pares e 10 ímpares. O número de formas de escolher 2 pares é $\binom{10}{2} = 45$ e 2 ímpares é $\binom{10}{2} = 45$. Pelo princípio aditivo o total de PAs é $45 + 45 = 90$. O espaço amostral possui $\binom{20}{3} = 1140$ elementos. Assim a probabilidade procurada é $90/1140 = 3/38$.

   Resposta: (b) 3/38

2. Lançam-se dois dados de 6 faces tradicionais (honestos). O resultado do primeiro dado é S e o do segundo é P. Qual a probabilidade de que a equação quadrática $t^2 - St + P = 0$ possua raízes reais?

   (a) 17/36 (b) 1/2 (c) 19/36 (d) 5/12 (e) 7/36 (f) 1/6

   Solução: Para raízes reais, $\Delta = S^2 - 4P \geq 0 \Rightarrow S^2 \geq 4P$. Desse modo, testando os valores de $S \in \{1, \ldots, 6\}$ para cada $P \in \{1, \ldots, 6\}$ temos:
   $S = 1 \Rightarrow 1 \geq 4P$ (0 casos);
   $S = 2 \Rightarrow 4 \geq 4P$ (1 caso: $P = 1$);
   $S = 3 \Rightarrow 9 \geq 4P$ (2 casos: $P = 1, 2$);
   $S = 4 \Rightarrow 16 \geq 4P$ (4 casos: $P = 1, 2, 3, 4$);
   $S = 5 \Rightarrow 25 \geq 4P$ (6 casos: $P = 1...6$);
   $S = 6 \Rightarrow 36 \geq 4P$ (6 casos: $P = 1...6$).
   Total: $0 + 1 + 2 + 4 + 6 + 6 = 19$ casos possíveis favoráveis a ocorrência do evento de interesse. Como há 36 possibilidades de valores para os pares (S, P) conforme o princípio multiplicativo, segue que a probabilidade procurada é $19/36$.

   Resposta: (c) 19/36

3. A média aritmética de 50 números é 38. Se dois desses números, 45 e 55, forem removidos do conjunto, qual será a nova média aritmética dos 48 números restantes?

(a) $37,5$ (b) $37,0$ (c) $36,5$ (d) $38,0$ (e) $38,2$ (f) $39,0$

Solução: A média dos 50 números é a soma deles, S_{50}, dividido por 50. Assim, $S_{50} = 50 \times 38 = 1900$. Removendo os valores 45 e 55, a nova soma, dos 48, é $S_{48} = 1900 - (45 + 55) = 1800$. A nova média é $S_{48}/48 = 1800/48 = 37,5$.

Resposta: (a) $37,5$

4. Um joalheiro possui duas ligas de ouro. A liga A tem 18 quilates (75% de pureza) e a liga B tem 24 quilates (100% de pureza). Ele deseja criar uma nova liga de 20 quilates fundindo as duas anteriores. Qual deve ser a razão entre a massa da liga A e a massa da liga B na mistura?

(a) $1:1$ (b) $1:2$ (c) $2:1$ (d) $2:3$ (e) $3:2$ (f) $4:1$

Solução: Considere m_A e m_B as massas das ligas A e B, respectivamente. A média ponderada dos quilates deve ser 20:

$$\frac{18m_A + 24m_B}{m_A + m_B} = 20 \Rightarrow 18m_A + 24m_B = 20m_A + 20m_B \Rightarrow 4m_B = 2m_A \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = 2,$$

ou seja, 2:1.

Resposta: (c) $2:1$

5. Sabe-se que $a_1 = 2026$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + \frac{a_n}{n^2+n}}$, $\forall n \geq 1$. O valor de a_{2026} é:

(a) 2 (b) 1 (c) 1,5 (d) 1,2 (e) 1/2 (f) 1/3

Solução: Seja $b_n = \dfrac{1}{a_n}$, para $n \geq 1$. Então,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \; n \geq 1$$

Sendo as somas telescópicas, obtemos

$$b_{2026} - b_1 = \sum_{n=1}^{2025} (b_{n+1} - b_n) = \sum_{n=1}^{2025} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2026} = 1 - b_1.$$

Ou seja,

$$b_{2026} = 1$$

Daí,

$$a_{2026} = 1$$

Resposta: (b) 1

6. O resto da divisão de $1^{12} + 2^{12} + \cdots + 2026^{12}$ por 13 é:

   (a) 10 (b) 1 (c) 12 (d) 9 (e) 7 (f) 3

   Solução: Seja
   $$S = 1^{12} + 2^{12} + \cdots + 2026^{12}.$$
   Como $\left\lfloor \dfrac{2026}{13} \right\rfloor = 155$, do pequeno Teorema de Fermat, segue-se que $S \equiv 1871 \equiv 12 \pmod{13}$.
   Logo, $r = 12$ é o resto procurado.

   Resposta: (c) 12

7. Se a, b, $c \in \mathbb{R}$ são tais que $a + b + c = 4$, $a^2 + b^2 + c^2 = 26$ e $a^3 + b^3 + c^3 = 64$, o valor de $a^4 + b^4 + c^4$ é:

   (a) 256,5 (b) 260 (c) 264 (d) 268 (e) 288 (f) 306

   Solução: Observando inicialmente que $(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, obtemos que a, b, e c verificam
   $$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c).$$
   Porém, é dado que $(a + b + c)^3 = 4^3 = 64 = a^3 + b^3 + c^3$. Logo,
   $$(a + b)(a + c)(b + c) = 0.$$

Sem perda de generalidade, suponha $a+b=0$. Neste caso, $c=4$ e, portanto,

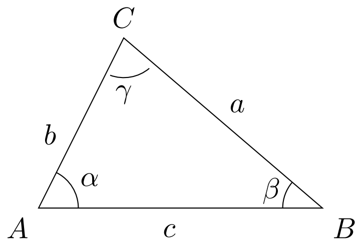
$$a^2+b^2=10.$$

Então, $a=-\sqrt{5}$ e $b=\sqrt{5}$ ou $a=\sqrt{5}$ e $b=-\sqrt{5}$. Em qualquer situação,

$$a^4+b^4+c^4=(\sqrt{5})^4+(\sqrt{5})^4+4^4=306.$$

Resposta: (f) 306

8. Considere o triângulo ABC, onde $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ e os ângulos em A, B e C são α, β e γ, respectivamente.



Analise as afirmativas seguintes:

(I) $\operatorname{sen}\alpha < \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma$.

(II) Existe um triângulo de lados $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}\beta$ e $\operatorname{sen}\gamma$.

(III) $\dfrac{a+b+c}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma} = 2R$, onde R é o raio do circuncírculo de ABC.

Estão corretas:

(a) Apenas a afirmativa (III).

(b) Apenas as afirmativas (I) e (II).

(c) Apenas as afirmativas (I) e (III).

(d) Apenas as afirmativas (II) e (III).

(e) As afirmativas (I), (II) e (III).

(f) Nenhuma das afirmativas é correta.

Solução: Pela lei dos senos, obtemos

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R,$$

onde R é o raio do circuncírculo de ABC. Daí,

$$2R \cdot \text{sen } \alpha = a \overset{desig.triang.}{<} b + c = 2R \cdot (\text{sen } \beta + \text{sen } \gamma),$$

ou seja,

$$\text{sen } \alpha < \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma.$$

Observe que, igualmente,

$$\text{sen } \beta < \text{sen } \alpha + \text{sen } \gamma, \quad \text{sen } \gamma < \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta.$$

Assim, existe um triângulo de lados sen α, sen β e sen γ. Para a terceira afirmativa, observe que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}.$$

Daí,

$$\frac{a+b+c}{\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \gamma} = 2R.$$

Resposta: (e) As afirmativas (I), (II) e (III).

9. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 1, \; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $f(1) = -1$, o valor de $f(26)$ é:

(a) 649 (b) 760 (c) 564 (d) 345 (e) 987 (f) 500

Solução: Como $f(1) = -1$, tomando $y = 1$ na relação dada, obtemos

$$f(x+1) = f(x) + 2x, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ou seja,

$$f(x+1) - f(x) = 2x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daí, por propriedade de soma telescópica,

$$f(26) - f(1) = \sum_{n=1}^{25} [f(n+1) - f(n)] = \sum_{n=1}^{25} 2n = 2(1 + \cdots + 25) = 25 \cdot 26 = 650.$$

Logo, $f(26) = 649$.

Resposta: (a) 649.

10. Sejam a, b e c números inteiros positivos satisfazendo o sistema

$$\begin{aligned} ab + c &= 2026 \\ a + bc &= 2027 \end{aligned}$$

então o valor de a é:

(a) 405 (b) 506 (c) 574 (d) 645 (e) 675 (f) 680

Solução: Fazendo a segunda equação menos a primeira obtemos

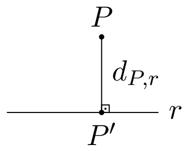
$$a - ab + bc - c = 1 \Longrightarrow a - b(a-c) - c = 1 \Longrightarrow (1-b)(a-c) = 1.$$

Dessa forma, $(1-b)$ e $(a-c)$ são ambos iguais a 1 ou ambos iguais a -1.
Mas $1 - b = 1 \Longrightarrow b = 0$, o que não pode ocorrer, pois b é positivo.
Sendo assim, temos $1 - b = -1 \Longrightarrow b = 2$ e $a - c = -1 \Longrightarrow c = a + 1$.
Substituindo esses valores na primeira equação, obtemos

$$2a + a + 1 = 2026 \Longrightarrow 3a = 2025 \Longrightarrow a = 675.$$

Resposta: (e) 675.

11. Dados um ponto P e uma reta r, a *distância* $d_{P,r}$ *de* P *à* r é a distância de P a P', onde P' é o pé da perpendicular baixada de P sobre r.



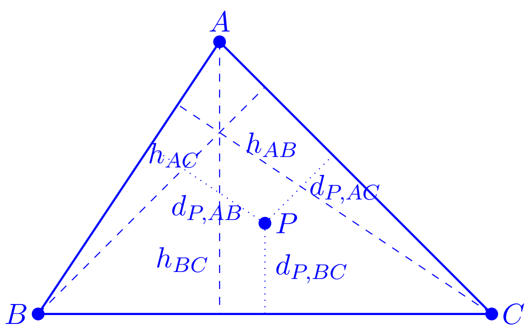
Dito isto, seja ABC um triângulo e P um ponto em seu interior. Se h_{BC}, h_{AC} e h_{AB} são as alturas relativas aos lados BC, AC e AB respectivamente, podemos afirmar que o valor de

$$\frac{d_{P,BC}}{h_{BC}} + \frac{d_{P,AC}}{h_{AC}} + \frac{d_{P,AB}}{h_{AB}},$$

é:

(a) 1,5 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\pi/2$ (e) $2/3$ (f) 2

Solução: Seja $S = [ABC]$.



Observe que

$$BC \cdot h_{BC} = AC \cdot h_{AC} = AB \cdot h_{AB} = 2S.$$

Logo,

$$BC = \frac{2S}{h_{BC}}, \quad AC = \frac{2S}{h_{AC}}, \quad AB = \frac{2S}{h_{AB}}. \tag{1}$$

Por outro lado,

$$BC \cdot d_{P,BC} + AC \cdot d_{P,AC} + AB \cdot d_{P,AB} = 2S \tag{2}$$

e, substituindo (1) em (2), obtemos

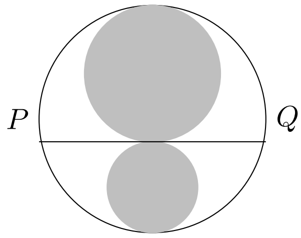
$$\frac{2S}{h_{BC}} \cdot d_{P,BC} + \frac{2S}{h_{AC}} \cdot d_{P,AC} + \frac{2S}{h_{AB}} \cdot d_{P,AB} = 2S.$$

Ou seja,

$$\frac{d_{P,BC}}{h_{BC}} + \frac{d_{P,AC}}{h_{AC}} + \frac{d_{P,AB}}{h_{AB}} = 1.$$

Resposta: (b) 1.

12. Três círculos são tangentes entre si, como na figura abaixo.



Sabendo que a região do disco exterior que não está coberta pelos dois discos interiores tem área igual a 2π, o comprimento de PQ é:

(a) 3 (c) 4 (e) 3/2

(b) 1 (d) o número de ouro ϕ (f) 2

Solução: Denote por R e r os raios das círculos interiores. Os centros dos três círculos estão alinhados em uma reta perpendicular a PQ. Desse modo, o raio do círculo exterior é $R+r$. A área não da região não coberta pelos discos interiores é

$$\pi(R+r)^2 - \pi R^2 - \pi r^2 = 2\pi Rr.$$

Assim,

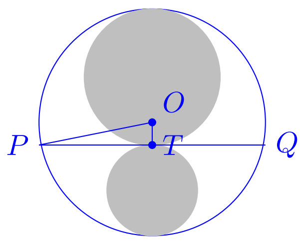
$$2\pi Rr = 2\pi,$$

ou seja,

$$Rr = 1.$$

Seja agora O o centro do círculo exterior e T o ponto de tangência dos círculos interiores. Observe que o triângulo OTP é retângulo em T, com

$$OP = R+r, \quad OT = 2R - (R+r) = R - r.$$



Do Teorema de Pitágoras,

$$PT^2 = OP^2 - OT^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr = 4.$$

Portanto,

$$PT = 2,$$

e, daí,

$$PQ = 4.$$

Resposta: (c) 4.