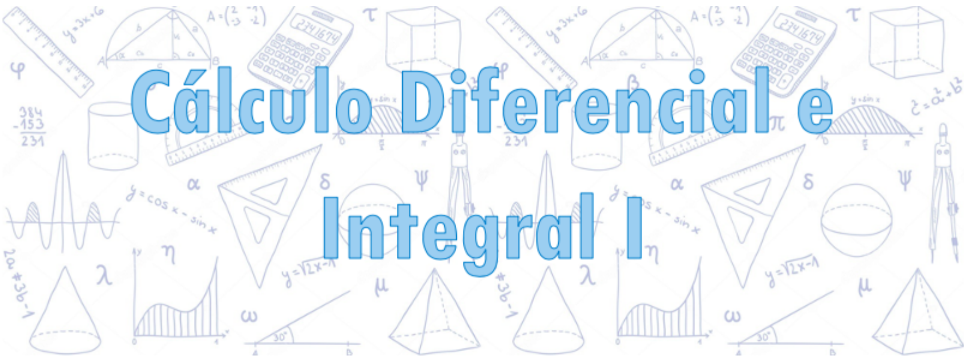


Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral I

PROFª. DRª. PAMMELLA QUEIROZ DE SOUZA

Campina Grande, PB

UAMat/CCT/UFCG – Av. Aprígio Veloso, 785 – Bodocongó – Campina Grande-PB, CEP 58.429-970 – Brasil
F +55 83 2101-1030 – mat.ufcg.edu.br/pessoal/professores-efetivos/pamella-queiroz-de-souza/ –
pammellaqueiroz@mat.ufcg.edu.br

Sumário

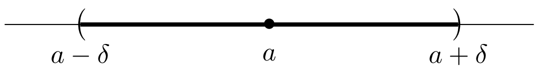
1 Limites de funções reais de uma variável

1.1 Definições importantes

a) Vizinhança: Chama-se vizinhança (ou entorno) de centro em a e raio δ o intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$, onde $\delta > 0$.

Notação: $V(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \in \mathbb{R};\ \ |x-a| < \delta\}$.

Representação gráfica:

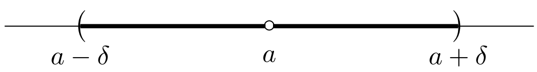


b) Vizinhança perfurada: É o intervalo $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$. Ou seja, é um entorno de raio δ onde o centro a não está incluído.

Notação: $V_p(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$

$$V_p(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R};\ \ a-\delta < x < a+\delta \ \text{ e } \ x \neq a\}.$$

Representação gráfica:



c) Ponto de acumulação ou ponto limite: Um número a é dito ponto de acumulação de um conjunto C se, e somente se, para toda vizinhança perfurada $V_p(a,\delta)$ de centro a, existe pelo menos um ponto $x \neq a$ tal que $x \in C$ e $x \in V_p(a,\delta)$.

Exemplo: Se $C = \mathbb{R}$, então todo elemento de C é ponto de acumulação, pois toda vizinhança de qualquer elemento de C contém uma infinidade de elementos de C.

d) Ponto isolado: Um ponto a pertencente a C é ponto isolado de C se existe $V_p(a,\delta)$ tal que para todo $x \in C$, $x \neq a$ então $x \notin V_p(a,\delta)$.

Exemplo: Represente a vizinhança $|x-5| < \dfrac{1}{2}$.

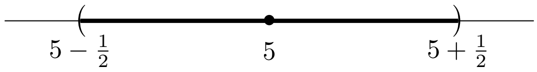
Solução: Comparando com a definição de vizinhança, tem-se que o centro é $a = 5$ e o raio é $\delta = \dfrac{1}{2}$. Para comprovar, utiliza-se a definição de módulo para encontrar o intervalo que representa a vizinhança:

$$|x-5| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-5 < \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\begin{array}{rcccl} -\dfrac{1}{2} & < & x-5 & < & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}+5 & < & x-5+5 & < & \dfrac{1}{2}+5 \\ \dfrac{9}{2} & < & x & < & \dfrac{11}{2}. \end{array}$$

Portanto, a vizinhança é representada por $V\left(5, \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$. A representação gráfica pode ser vista da seguinte forma:



1.2 Limite de funções reais

Motivação para a definição de limite

A idéia de limite aparece intuitivamente em muitas situações. Na Física, por exemplo, para definir a velocidade instantânea de um móvel utiliza-se o cálculo da velocidade média para o caso onde o intervalo de tempo seja muito próximo de zero. A velocidade média v_m é calculada como $v_m = \dfrac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, onde s é a posição e t é o tempo. Então, a velocidade instantânea v_i é definida como:

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

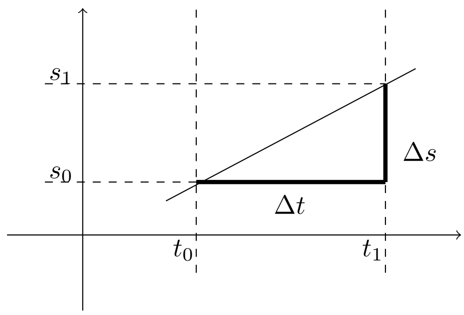


Figura 1: Gráfico da posição de um móvel ao longo do tempo.

Em outras palavras, a velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando Δt tende a zero.

O estudo de limites serve para descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor.

O matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi a primeira pessoa a atribuir um significado matematicamente rigoroso às frases "$f(x)$ se aproxima arbitrariamente de L" e "x se aproxima de a".

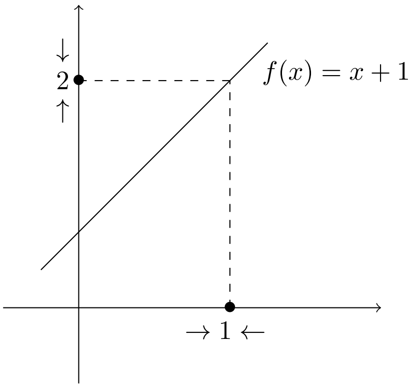
Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p. Consideremos, por exemplo, a função $f(x) = x + 1$. Para valores de x próximos de 1, $f(x)$ assume os seguintes valores:

x	x+1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

x	x+1
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
$\downarrow$	$\downarrow$
1	2

Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (de qualquer lado de 1) $f(x)$ estará próximo de 2. De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos tomando x suficientemente próximo de 1. Expressamos isso dizendo que o limite da função $f(x) = x + 1$ quando x tende a 1 é igual a 2.



Definição 1.2.1. *(Intuitiva). Escrevemos*

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

e dizemos o limite de $f(x)$, quando x tende a p, é igual a L se pudermos tomar valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente próximo de p, mas não igual a p.

Observação: Ao procurar o limite quando x tende a p não consideramos $x = p$. Estamos interessados no que acontece próximo de p e a função $f(x)$ não necessariamente precisa estar definida para $x = p$. Consideremos o seguinte exemplo.

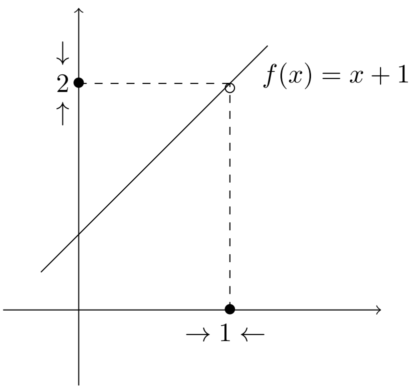
Exemplo: Encontre $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Solução: Observe que $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ não está definida quando $x = 1$. Temos que para $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1.$$

Como os valores das duas funções são iguais para $x \neq 1$, então os seus limites quando x tende a 1 também. Portanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$



Exemplo: Descreva o comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 1$ quando x se aproximar cada vez mais de 2.

Solução: A determinação do comportamento de $f(x)$ para valores próximos de 2 pode ser analisada de várias formas. Inicialmente, atribuem-se valores que se aproximam de 2 para x e, calculando $f(x)$ para cada um desses valores, pode-se construir a seguinte tabela:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	1	1,75	2,71	2,9701	2,997001	-	3,003001	3,0301	3,31	4,75	7

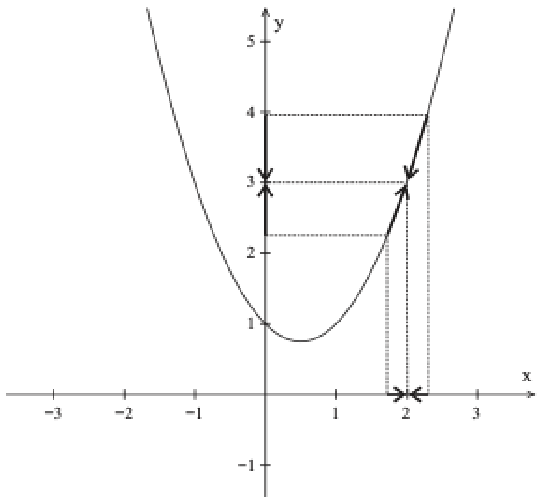
aproximação à esquerda $\rightarrow$		$\leftarrow$ aproximação à direita

Primeiramente, observe que não foi colocado na tabela acima o valor de $f(x)$ quando $x = 2$. Esse valor foi omitido, pois se deseja estudar apenas os valores de $f(x)$ quando x está próximo de 2, e não o valor da função quando $x = 2$.

Percebe-se que quando x se aproxima de 2 (em qualquer sentido) $f(x)$ se aproxima de 3. Logo, pode-se dizer que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3.$$

Observando a figura abaixo comprova-se que o gráfico da função se aproxima para o mesmo valor quando x está se aproximando de 2, tanto para valores maiores quanto para valores menores do que 2.



Nesse caso, o valor do limite coincidiu com o valor da função quando $x = 2$, pois $f(2) = 3$. Mas nem sempre esse comportamento vai se verificar, como pode ser visto no próximo exemplo.

Exemplo: Descreva o comportamento da função $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 3, & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ quando x estiver cada vez mais próximo de 3.

Solução: Assim como no exemplo anterior, primeiramente atribuem-se valores para x e, encontrando os valores de $f(x)$ correspondentes, pode-se construir a tabela:

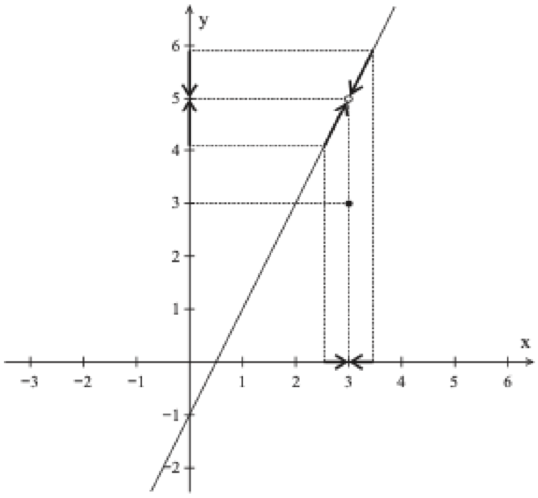
x	2	2,5	2,9	2,99	2,999	3	3,001	3,01	3,1	3,5	4
$f(x)$	3	4	4,8	4,98	4,998	-	5,002	5,02	5,2	6	7

aproximação à esquerda $\rightarrow$		$\leftarrow$ aproximação à direita

Percebe-se que quando x se aproxima de 3 em ambos os sentidos, $f(x)$ se aproxima cada vez mais de 5. Logo,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5.$$

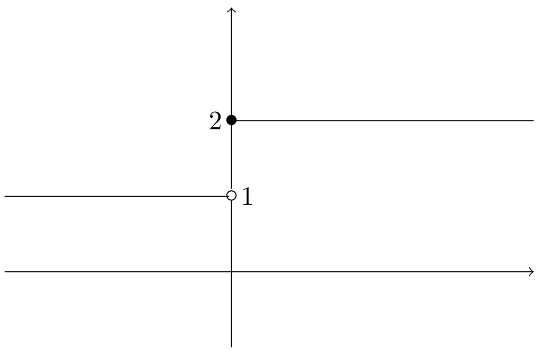
Esse comportamento pode ser observado na figura abaixo:.



Observe que nesse caso, o valor de $f(x)$ quando $x = 3$ é $f(3) = 3$, justamente o ponto que se encontra fora da curva descrita por $f(x)$. Ou seja, $f(3) \neq \lim_{x \to 3} f(x)$. Por isso, enfatiza-se o fato de que o limite descreve o comportamento da função à medida em que x se aproxima de 3, e não no próprio $x = 3$.

Exemplo: Como será o comportamento da função $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$ quando x estiver cada vez mais próximo de 0?

Solução: Observe o gráfico da função



Percebe-se que quando x se aproxima de 0 por valores menores do que 0, $f(x)$ se aproxima de 1 e quando x se aproxima de 0 por valores maiores do que 0, $f(x)$ se aproxima de $f(0) = 2$. Ou seja, não há um único valor ao qual $f(x)$ se aproxima quando x tende a 0.

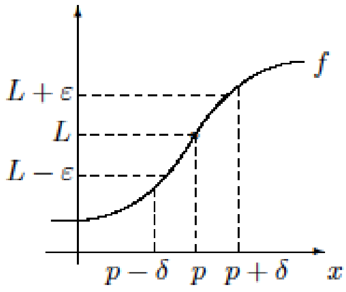
Definição 1.2.2. *Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número p, exceto possivelmente o próprio p. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende p é L e escrevemos*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

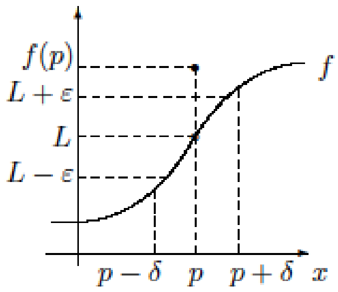
se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

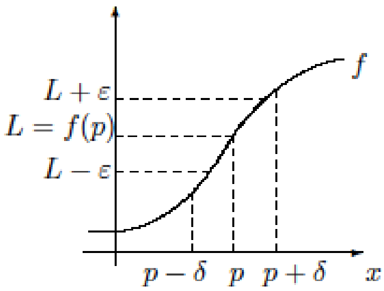
Interpretação geométrica do limite



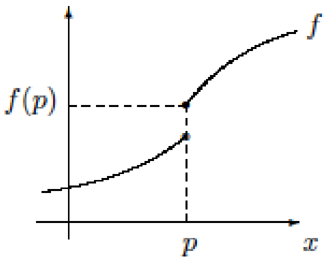
$\lim_{x \to p} f(x) = L$



$\lim_{x \to p} f(x) = L \neq f(p)$



$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$



Não existe o limite de f em p

Exemplo: Prove que

$$\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4.$$

Solução: Devemos fazer uma análise preliminar para conjecturar o valor de δ. Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2|$. Portanto,

$$3|x - 2| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

ou

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Isto sugere que podemos escolher $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Provemos que a escolha de δ funciona. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3(x - 2)| = 3|x - 2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim,

$$|(3x-2)-4| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x-2| < \delta$$

logo, pela definição, $\lim_{x \to 2}(3x-2) = 4$.

O próximo Teorema garante que o valor L satisfazendo a definição é único.

Teorema 1.2.1 (Unicidade do limite)**.** *Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número p, exceto possivelmente o próprio p. Suponha que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to p} f(x) = M.$$

Então, $L = M$.

Propriedades do limite

Sejam L, M, p e k números reais e $\lim_{x \to p} f(x) = L$ e $\lim_{x \to p} g(x) = M$. Então, as seguintes propriedades são válidas:

- Limite da constante: $\lim_{x \to p} k = k$;
- Limite da soma: $\lim_{x \to p}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x) = L \pm M$;
- Limite do produto: $\lim_{x \to p}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to p} f(x) \cdot \lim_{x \to p} g(x) = L \cdot M$;
- Limite do quociente: $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p} g(x)} = \dfrac{L}{M}$;
- Limite da multiplicação por uma constante: $\lim_{x \to p} kf(x) = kL$;

Utilizando a propriedade do produto repetidamente obtemos:

$$\lim_{x \to p}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to p} f(x)\right]^n = L^n, \quad \text{onde } n \text{ é um inteiro positivo.}$$

E, de forma mais geral, temos as seguintes propriedades, para um número n inteiro positivo,

- $\lim_{x \to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$, se n for par supomos que $p > 0$;
- $\lim_{x \to p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to p} f(x)}$, se n for par supomos que $\lim_{x \to p} f(x) > 0$.

Exercícios:

1. Calcule os limites abaixo:

- $\lim_{x \to 2}(5x^3 - 8)$; **[R: 32]**;
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$; **[R: $\frac{1}{4}$]**;
- $\lim_{x \to 2} \sqrt[5]{3x}$; **[R: $\sqrt[5]{6}$]**;
- $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; **[R:$\frac{1}{2\sqrt{3}}$]**;
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$; **[R:$\frac{1}{6}$]**.

2. Prove que $\lim_{x \to p} x^n = p^n$, onde n é um inteiro positivo

3. Se f é uma função definida em $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, mostre que:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x} = 3$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x^2)}{x} = 0$

Teorema 1.2.2 (Teste da Comparação). *Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está próximo de p (exceto possivelmente em p) e os limites de f e g existem quando x tende a p, então:*

$$\lim_{x \to p} f(x) \leq \lim_{x \to p} g(x).$$

Teorema 1.2.3 (Teorema do confronto ou Sanduiche). *Sejam f, g e h funções e suponha que existe $r > 0$ tal que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \textit{para} \ \ 0 < |x - p| < r.$$

Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x)$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$

Exemplo: Mostre que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \text{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Solução: Como $-1 \leq \text{sen} \frac{1}{x} \leq 1$, multiplicando por x^2 temos

$$-x^2 \leq x^2 \text{sen} \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Passando ao limite na desigualdades acima, obtemos

$$-\lim_{x \to 0} x^2 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \text{sen} \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0} x^2.$$

Por outro lado, sabemos que

$$-\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x^2.$$

Assim, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \to 0} x^2 \text{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Segue do Teorema do Confronto a seguinte propriedade:

Corolário 1.2.4. *Suponha que $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq M$ para x próximo de p. Então*

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0.$$

Exercício: Calcule:

a) $\lim_{x \to 0} x \text{sen} \frac{1}{x}$;

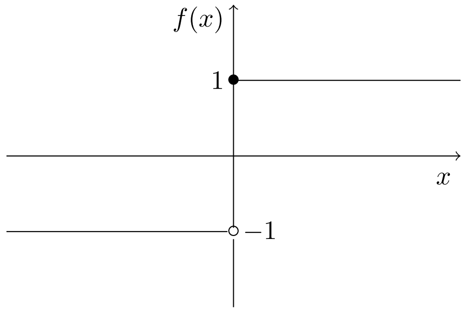
b) $\lim_{x \to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2}$.

1.3 Limites Laterais

Considere a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

cujo gráfico pode ser descrito abaixo



Quando x tende a 0 pela esquerda, $f(x)$ tende a -1. Quanto x tende a 0 pela direita, $f(x)$ tende a 1. Não há um número único para o qual $f(x)$ se aproxima quando x tende a 0. Portanto, $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe. Porém, nesta situação podemos definir os limites laterais.

Definição 1.3.1 (Intuitiva)**.**

- *Escrevemos*

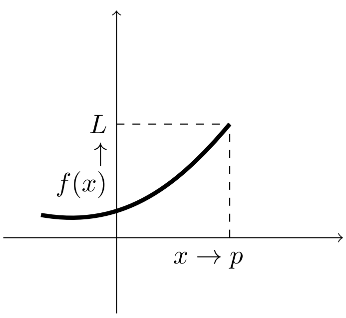
$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$$

e dizemos que o ***limite de*** $f(x)$ ***quando*** x ***tende a*** p ***pela esquerda*** *é igual a* L *se pudermos tomar os valores de* $f(x)$ *arbitrariamente próximos de* L*, tomando* x *suficientemente próximo de* p *e* x *menor do que* p*.*

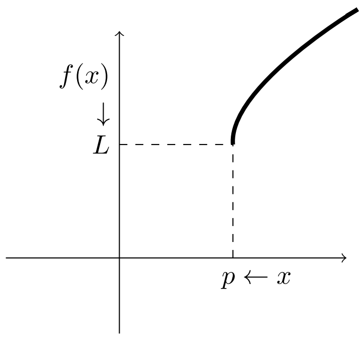
- *Escrevemos*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$$

e dizemos que o ***limite de*** $f(x)$ ***quando*** x ***tende a*** p ***pela direita*** *é igual a* L *se pudermos tomar os valores de* $f(x)$ *arbitrariamente próximos de* L*, tomando* x *suficientemente próximo de* p *e* x *maior do que* p*.*



$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L$$

Definição 1.3.2 (Limite Lateral Esquerdo).

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$p - \delta < x < p \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 1.3.3 (Limite Lateral Direito).

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$p < x < p + \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema 1.3.1 (Existência do limite finito). *O limite* $\lim_{x\to p} f(x) = L$ *existe e é igual a* L *se, e somente se, os limites laterais* $\lim_{x\to p^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to p^+} f(x)$ *existirem e ambos forem iguais a* L.

Demonstração. Tem-se que $\lim_{x\to p} f(x) = L$. Portanto, pela definição de limite, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - p| < \delta, \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Note que

$$0 < |x - p| < \delta \quad \text{se e somente se} \quad -\delta < |x - p| < 0 \;\text{ ou }\; 0 < x - p < \delta.$$

Assim, pode-se afirmar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad -\delta < x - p < 0, \;\text{ então }\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

e

$$\text{se }\; 0 < x - p < \delta, \;\text{ então }\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = L = \lim_{x\to p^+} f(x).$$

□

Corolário 1.3.2. *Segue do Teorema anterior que*

- *se* f *admite limites laterais em* p, *e*

$$\lim_{x\to p^-} f(x) \neq \lim_{x\to p^+} f(x),$$

  então ***não*** *existe* $\lim_{x\to p} f(x)$;

- *se* f ***não*** *admite um dos limites laterais em* p, *então* ***não*** *existe* $\lim_{x\to p} f(x)$.

Exemplo: Considere as funções $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e $g(x) = |x|$. Calcule, se houver:

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

e) $\lim_{x\to 0^-} g(x)$

f) $\lim_{x\to 0} g(x)$

Solução: Antes de determinar os limites solicitados, construiremos o gráfico da função $f(x)$. Considere um número real $a > 0$, calculando o valor de $f(x)$ para $x = a$, temos

$$f(a) = \frac{|a|}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

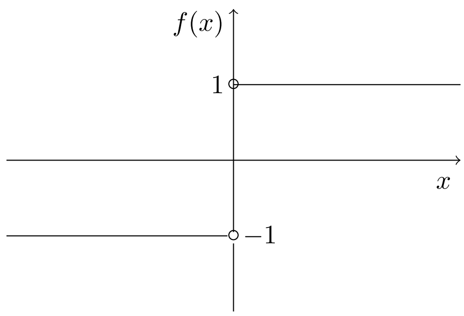
Calculando $f(x)$ quando $x = -a$, segue

$$f(-a) = \frac{|-a|}{-a} = \frac{a}{-a} = -1.$$

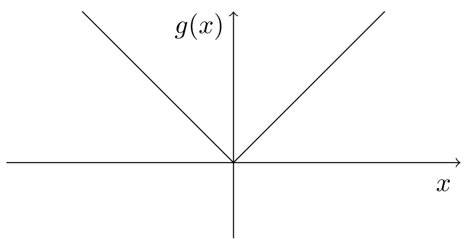
Como o denominador de $f(x)$ não pode ser nulo, então essa função não está definida para $x = 0$. Assim, a função $f(x)$ pode ser reescrita como:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad x < 0 \\ 1, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

e seu gráfigo tem a seguinte representação:



O gráfico da função $g(x) = |x|$ é representado por



Estudando cada um dos ítens:

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ corresponde ao limite lateral para x tendendo a 0 pela direita. Observando o gráfico de $f(x)$, pode-se ver que quando x se aproxima de 0 pela direita, o valor de y se mantém igual a 1. Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ corresponde ao limite lateral para x tendendo a 0 pela esquerda. Observando o gráfico de

$f(x)$, pode-se ver que quando x se aproxima de 0 pela esquerda, o valor de y se mantém igual a -1. Assim,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1.$$

c) Para $\lim_{x \to 0} f(x)$ existir, os limites laterais para x tendendo a 0 pela direita e pela esquerda devem existir e serem iguais. Entretando, como visto nos itens anteriores, esses limites existem, mas **são diferentes**. Logo, $\lim_{x \to 0} f(x)$ **não** existe. Observe no gráfico como os valores da função não se aproximam de um mesmo valor para valores x próximos de 0.

d) Para calcular $\lim_{x \to 0^+} g(x)$ deve-se analisar o limite lateral para x tendendo a 0 pela direita. Observando o gráfico de $g(x)$, pode-se ver que quando x se aproxima de 0 pela direita, o valor de y fica cada vez mais próximo de 0. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0.$$

e) $\lim_{x \to 0^-} g(x)$ é obtido observando o limite lateral para x tendendo a 0 pela esquerda. Observando o gráfico de $g(x)$, pode-se ver que quando x se aproxima de 0 pela esquerdo, o valor de y fica cada vez mais próximo de 0. Assim,

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0.$$

f) Para $\lim_{x \to 0} g(x)$ existir, os limites laterais para x tendendo a 0 pela direita e pela esquerda devem existir e serem iguais. Como visto nos itens anteriores, esses limites existem e ambos são iguais a 0. Assim é possível concluir que, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

Exercícios:

1. Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Calcule, se houver:

a) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ **[R.0]**

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ **[R.2]**

c) $\lim_{x \to 1} f(x)$ **[R. Não existe]**

2. Quais das seguintes afirmações sobre a função $y = f(x)$ ilustrada abaixo são verdadeiras e quais são falsas? Justifique.

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe. **[R. V]**

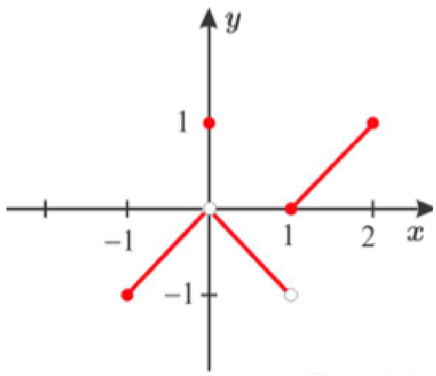
b) $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. **[R. V]**

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. **[R. F]**

d) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. **[R. F]**

e) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$. **[R. F]**

f) $\lim_{x \to p} f(x)$ existe no ponto p em $(-1, 1)$. **[R. V]**



3. Considere a função g definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ -1, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Investigue a existência dos limites $\lim_{x \to 0} g(x)$ e $\lim_{x \to 0} x^2 g(x)$.

1.4 Continuidade

Definição 1.4.1 (Continuidade)**.** *Sejam f uma função e $p \in D(f)$. Então f é contínua em p se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$, tal que*

$$|x - p| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon,$$

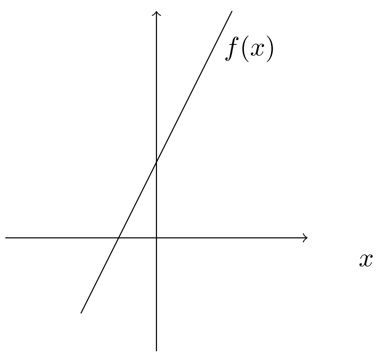
ou seja, se e somente se,

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Observação: Diremos que f é **contínua em** $A \subset D(f)$, se f for contínua em todo ponto $p \in A$. Diremos simplesmente que f é **contínua**, se f for contínua em todo ponto de seu domínio.

Exemplo: Estude a continuidade da função $f(x) = 2x + 1$ em $x = 1$.

Solução: Vejamos que a representação do gráfico da função f é:



Além disso,

$$\lim_{x \to 1} 2x + 1 = 3 = f(1)$$

donde é possível concluir que $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

Exemplo: Estude a continuidade da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ em $x = 2$.

Solução: Observe inicialmente que para $x \neq 2$, temos

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2.$$

E, portanto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4.$$

Entretanto, é possível perceber que, apesar do limite existir, a função não é contínua em $x=2$, pois $f(x)$ não está definida no ponto 2.

Exemplo: Determine L para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ L, & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

seja contínua.

Solução: Como foi visto no exercício anterior, sabemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4,$$

ou seja, basta tomar $L=4$.

Exemplo: Considere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 3, & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Esta função é contínua em $x=1$? Caso não seja, a descontinuidade pode ser removida?

Solução: Devemos observar inicialmente que para $x \neq 1$, temos

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1.$$

E, portanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2.$$

Logo, a função $f(x)$ é descontínua em $x=1$, pois

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \neq 3 = f(1).$$

Para remover a descontinuidade basta considerar $f(1)=2$.

O conceito de limite lateral possibilita estender a definição de continuidade para intervalos fechados.

Definição 1.4.2 (Continuidade em um Intervalo Fechado)**.** *Uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ se é contínua no intervalo (a,b) e*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad e \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Propriedades das funções Contínuas

Seguem das propriedades do limite, as seguintes propriedades das funções contínuas. Sejam f e g funções contínuas em p e seja k uma constante real. Então:

- $f+g$ é contínua em p.
- kf é contínua em p.
- $f \cdot g$ é contínua em p.
- $\dfrac{f}{g}$ é contínua em p, se $g(p) \neq 0$.

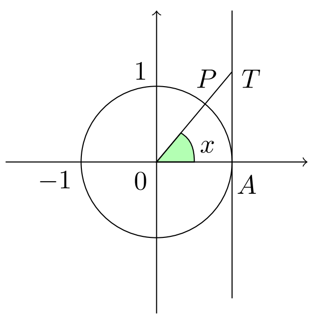
Exemplo: $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, é uma função contínua.

Exemplo: Toda função polinomial é contínua pois é soma de funções contínuas.

Exemplo: Toda função racional é contínua em $p$se o denominador não se anular em p, pois toda função racional é quociente de duas funções polinomiais.

Teorema 1.4.1. *As funções trigonométricas são contínuas.*

Demonstração. Assumamos inicialmente que x pertence ao primeiro quadrante, ou seja, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e consideremos a seguinte figura:



Área do $\triangle OPA <$ Área do setor $OPA <$ Área do $\triangle OTA$

$$\boxed{\text{Área } \triangle = \frac{b.h}{2} \qquad \text{Área setor} = \frac{r^2\alpha}{2}}$$

ou seja

$$\frac{\text{sen } x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg } x}{2}$$

e, portanto,

$$\text{sen} x < x < \text{tg} x.$$

Se $x < 0$, então $-x > 0$. Aplicando a desigualdade acima para $-x$, segue

$$0 < \text{sen}(-x) = -\text{sen } x < -x = |x|,$$

isto é,

$$-|x| < \text{sen } x < |x|.$$

Pelo Teorema do Confronto e sabendo que $\lim\limits_{x \to 0} \pm|x| = 0$, é possível concluir que $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen } x = 0$. Além disso, como $\text{sen } 0 = 0$, concluímos que a função seno é contínua em 0.

Ideias similares nos permite provar a continuidade da função cosseno em 0.

Em geral, para p qualquer, devemos mostrar que $\lim_{x\to p} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} p$. Para fazer isto tome $x = p + h$ de modo que $h = p - x$ e, portanto, temos que $h \to 0$ quando $x \to p$. Assim,

$$\lim_{x\to p} \operatorname{sen} x = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(p+h)$$

e precisamos mostrar, apenas que o último limite é igual a sen p.

Aplicando a fórmula do seno da soma, segue

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(p+h) = \lim_{h\to 0} \operatorname{sen} p \cos h + \operatorname{sen} h \cos p = \operatorname{sen} p \left(\lim_{h\to 0} \cos h\right) + \cos p \left(\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h\right).$$

Como as funções seno e cosseno são contínuas no zero (primeira parte da demonstração), temos que

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen} h = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \cos h = 1$$

e, portanto,

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(p+h) = \operatorname{sen} p$$

o que prova a continuidade da função seno para qualquer x real.

A prova da continuidade da função cosseno é feita de maneira similar. A continuidade das outras funções trigonométricas seguem das propriedades das funções contínuas. □

Teste da continuidade: Uma função $f(x)$ é contínua em um ponto $x = p$ interior do seu domínio se, e somente se, obedecer as seguintes condições:

1. $f(p)$ existir;
2. $\lim_{x\to p} f(x)$ existir;
3. $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Teorema 1.4.2.

- *A função inversa de uma função contínua é contínua;*
- *As funções exponenciais e logaritmica são contínuas.*

1.5 Limite de funções compostas

Sejam f e g duas funções tais que $\mathrm{Im} f \subset D_g$ onde $\mathrm{Im} f$ é a imagem de f, ou seja, $\mathrm{Im} f = \{f(x); x \in D_f\}$. Nosso objetivo é estudar o limite

$$\lim_{x\to p} g(f(x)).$$

Supondo que $\lim_{x\to p} f(x) = a$, é razoável esperar que, fazendo $u = f(x)$, temos

$$\lim_{x\to p} g(u) = \lim_{u\to a} g(u) \tag{1}$$

desde que $\lim_{u\to a} g(u)$ exista. Veremos que (1) verifica se:

1. g for contínua em a
2. g não estiver definida em a

O resultado abaixo mostra como iremos trabalhar com o limite de função composta.

Teorema 1.5.1. *Suponha que existem funções f e g tais que* $\mathrm{Im}f \subset D_g$. *Se g é contínua em a ou não está definida em a, tal que*

$$u = f(x), \quad x \in D_f, \quad \lim_{x \to p} f(x) = a$$

e, além disso, $\lim_{u \to a} g(u)$*exista. Então*

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = \lim_{u \to a} g(u).$$

Exemplo: Calcule $\lim_{x \to 1} \exp\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.
Solução: Considere

$$\exp\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \exp\ u \quad \text{onde} \quad u = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, \quad x > 0, \quad x \neq 1.$$

Observe que

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Daí,

$$\lim_{x \to 1} \exp\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \lim_{u \to \frac{1}{2}} \exp\ u = \exp\frac{1}{2}.$$

Exercício: Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x-1}}$ **[R.**$\sqrt{2}$**]**

b) $\lim_{x \to 1} \dfrac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}$ **[R.**-32**]** [Use: $u = 3 - x^3$ e aplique produto notável.]

c) $\lim_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$ **[R.**$1/3$**]** [Use: $u = \sqrt[3]{x+2}$ e lembre da seguinte relação: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$]

Limites Fundamentais

O primeiro limite fundamental, também conhecido como limite fundamental trigonométrico, relaciona um ângulo com o seu seno nas proximidades de 0 radianos.

Teorema 1.5.2 (O primeiro limite fundamental)**.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Demonstração. Já vimos que para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ vale a desigualdade $0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$. Dividindo por $\operatorname{sen} x$ obtemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

e consequentemente, sendo $\cos x > 0$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Por outro lado, se $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, aplicando a desigualdade para $-x$, obtemos

$$\cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} < 1.$$

Utilizando a paridade de funções concluimos que

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1, \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Pelo Teorema do Confronto e sabendo que $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, segue o desejado. $\square$

Exemplo: Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}5x}{x}$.

Solução:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}5x}{x} = 5 \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}5x}{5x}$$

Fazendo $u = 5x$ é possível perceber que $u \to 0$ quando $x \to 0$, assim

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}5x}{x} = 5 \lim_{u \to 0} \frac{\text{sen}u}{u} = 5.$$

Exercícios: Calcule os limites abaixo:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(7x)}{x}$ **[R.7]**

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$ **[R.1]**

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(2x)}{x}$ **[R. 2]**

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ **[R.1/2]** [Use: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$]

Observação: (Extensão contínua a um ponto) A função $y = f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ é contínua em qualquer ponto, exceto em $x = 0$. Nesse ponto ela é como a função $y = \frac{1}{x}$. Mas, $y = \frac{\text{sen } x}{x}$ é diferente de $y = \frac{1}{x}$ porque possui limite finito quando $x \to 0$. Portanto, é possível estender o domínio da função para incluir o ponto $x = 0$, de modo que a função estendida seja contínua em $x = 0$. Defina a função:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

A função $F(x)$ é contínua em $x = 0$ pois

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 = F(0).$$

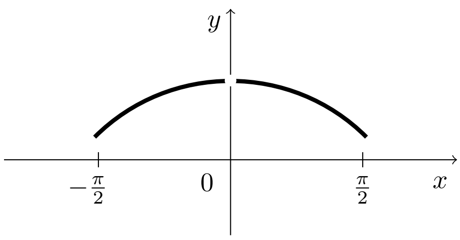


Gráfico de $f(x)$

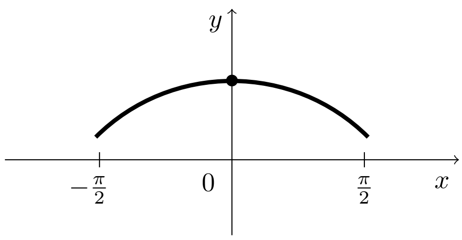


Gráfico de $F(x)$

O segundo limite fundamental, ou limite fundamental exponencial, define o número de Euler como o valor para o qual se aproxima o termo $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ quando x tende a 0.

Teorema 1.5.3 (O segundo limite fundamental)**.** *Seja a função $f(x) = (1+x)^{1/x}$ definida em $x \in \mathbb{R}$ tal que $-1 < x$ e $x \neq 0$, então*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

Do Teorema anterior decorrem os seguintes corolários:

Corolário 1.5.4. *Seja a função $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ definida em $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -1$ ou $x > 0$, então*

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Corolário 1.5.5. *Seja a função $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ definida em $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -1$ ou $x > 0$, então*

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Exercício: Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$ **[R.** e^3**]**

b) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}$ **[R.** e^{-5}**]**

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ **[R.** $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$**]**

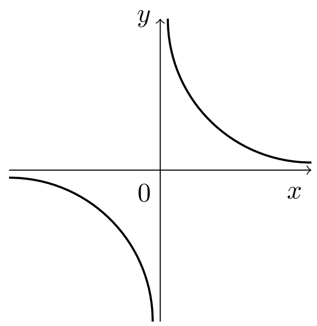
d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+10x)}{x}$ **[R.** 10**]**

e) $\lim\limits_{x\to 0}[1+\operatorname{sen} x]\dfrac{\ln(1)}{\operatorname{sen} x}$ **[R.** e**]**

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$ **[R.** e^2**]**

1.6 Limites Infinitos

Consideremos a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Quando x se aproxima de 0 pela direita a função $\dfrac{1}{x}$ fica muito grande. De fato, os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente grandes se tomarmos valores de x próximos de 0. Para indicar este comportamento observamos a representação gráfica da função $f(x)$



e usamos a notação

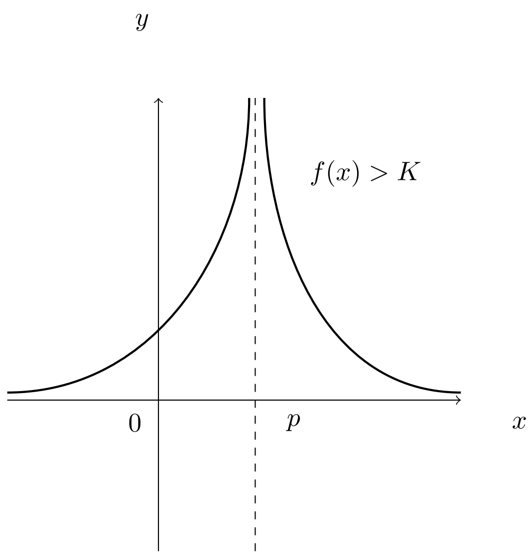
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

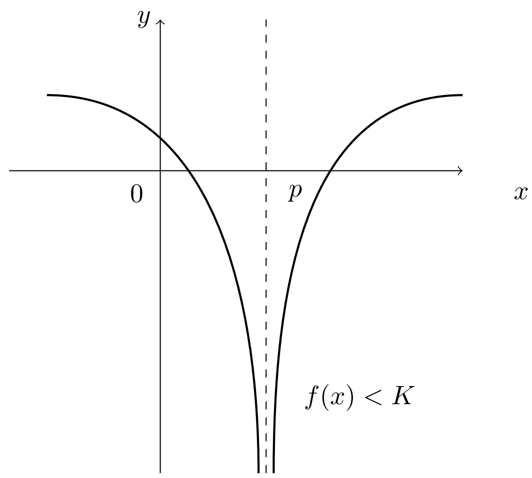
Definição 1.6.1 (Limite Infinito)**.** *Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo p, exceto possivelmente no próprio p. Então diremos que*

- *o limite de $f(x)$ quando x tende a p é $+\infty$ se, dado $K > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $f(x) > K$ para todo $0 < |x-p| < \delta$;*

- *o limite de $f(x)$ quando x tende a p é $-\infty$ se, dado $K < 0$, existir $\delta > 0$ tal que $f(x) < K$ para todo $0 < |x - p| < \delta$.*

Graficamente o que temos é o seguinte:





$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x \to p} f(x) = -\infty$

Definição 1.6.2. *A reta $x = p$ é chamada de **assíntota vertical** da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita:*

$$\lim_{x \to p} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to p^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to p^-} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty$$

Voltemos agora para o primeiro exemplo desta seção, ou seja, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Queremos mostrar que o limite de $f(x)$ quando $x \to 0^+$ é $+\infty$ e calcular, se houver as assíntotas verticais.

Dado $K > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$f(x) = \frac{1}{x} > K \qquad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta,$$

ou seja,

$$x < \frac{1}{K} \quad \text{sempre que} \quad 0 < x < \delta.$$

Isto sugere que devemos considerar $\delta = \dfrac{1}{K}$. De fato, seja $K > 0$ e escolha $\delta = \dfrac{1}{K}$. Se $0 < x < \delta$, então

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = K.$$

O que mostra que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Com respeito a definição de assíntota vertical e pelo resultado obtido acima, conclui-se que $x = 0$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriedades dos limites infinitos

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = L \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty, & L > 0 \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty, & L < 0 \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = L \\ \lim_{x\to p} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to p} (f+g)(x) = +\infty$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = L \\ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f+g)(x) = -\infty \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \lim_{x\to p} f(x) = L \\ \lim_{x\to p} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = -\infty, & L > 0 \\ \lim_{x\to p} (f\cdot g)(x) = +\infty, & L < 0 \end{cases}$$

Observação: As propriedades acima são válidas se, em lugar de $x \to p$, usarmos $x \to p^+$ ou $x \to p^-$.

Exemplos: Use as propriedades dos limites infinitos para calcular os limites abaixo:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x}{x-4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^4}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{1}{|x-3|}$

Solução:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x}{x-4}$

Para estudar o limite acima deve-se, primeiramente, obter os limites laterais, uma vez que para $x = 4$ o denominador é nulo.

Estudar o limite quando x tende a 4 pela esquerda significa determinar o comportamento da função quando x assume valores muito próximos de 4, mas menores que 4. Substituindo x por $(4-h)$ e note que quando $x \to 4$ devemos ter $h \to 0$ daí obtém-se,

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{x-4} = \lim_{h\to 0} \frac{4-h}{(4-h)-4} = \lim_{h\to 0} \frac{4-h}{-h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{4}{-h} + 1\right).$$

Aplicando as propriedades operatórias de limites, segue

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{x-4} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{-h}+1\right) = 1 - 4\lim_{h\to 0}\frac{1}{h} = -\infty.$$

Repetindo o processo para obter o limite lateral à direita, ou seja, determinar o comportamento da função quando x assume valores muito próximos de 4, mas maiores que 4. Para determinar o limite lateral à direita, substitui-se x por $(4+h)$ e obtendo,

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x}{x-4} = \lim_{h\to 0}\frac{4+h}{(4+h)-4} = \lim_{h\to 0}\frac{4+h}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{4}{h}+1\right) = +\infty.$$

Entretanto, como

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{x-4} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4^+} \frac{x}{x-4} = +\infty,$$

podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x}{x-4}$ não existe. Além disso, pode-se afirmar que $x = 4$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$.

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Devemos, primeiramente, obter os limites laterais, uma vez que para $x = 3$ o denominador é nulo.

Para determinar o limite lateral à esquerda, substitui-se x por $(3-h)$ e, portanto, quando $x \to 3^-$, $h \to 0$, daí

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(3-h-3)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(-h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2} = +\infty.$$

Por outro lado, para determinar o limite lateral à direita, usando o mesmo raciocínio obtém-se,

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(3+h-3)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2} = +\infty.$$

Como

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2}.$$

pode-se afirmar que $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ e, ademais, $x = 3$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

Calculando os limites laterais, uma vez que para $x = 0$ o denominador é nulo. O limite lateral à esquerda é obtido substituindo x por $(0-h)$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+(0-h)^2}}{0-h} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h^2}}{h} = -\lim_{h\to 0}\sqrt{\frac{3+h^2}{h^2}} = -\sqrt{\lim_{h\to 0}\left(\frac{3}{h^2}+1\right)} = -\infty.$$

Para determinar o limite lateral à direita, substituindo x por $(0+h)$ e obtemos,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = +\infty.$$

E, como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x} = +\infty$$

pode-se afirmar que $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$ não existe e que $x = 0$ é assíntota vertical de $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$.

Exercícios:

1. Use as propriedades dos limites infinitos para calcular os limites dos ítens d), e), f), g) e h) no exemplo acima.

2. Estude os limites abaixo
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$$

1.7 Limites no infinito

Vamos analisar o comportamento de uma função $f(x)$ quando os valores de x ficam arbitrariamente grandes. Consideremos a função $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Então f assume os valores:

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 10	$0,98$
± 100	$0,9998$
± 1000	$0,99999$

Observemos que, quando x for muito grande, então $f(x)$ será aproximadamente igual a 1. Este fato pode ser escrito seguinte forma
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} = 1.$$

Definição 1.7.1. (Limites no infinito).

- *Seja f uma função definida em algum intervalo $(a, +\infty)$. Então*
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$
se, dado $\varepsilon > 0$, existir $R > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x > R$.

- *Seja f uma função definida em algum intervalo $(-\infty, a)$. Então*
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$
se, dado $\varepsilon > 0$, existir $R < 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x < R$.

Definição 1.7.2. *A reta $y = L$ é chamada de **assíntota horizontal** da curva $y = f(x)$ se ou*
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad \textit{ou} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L.$$

Exemplo:
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $R > 0$ suficientemente grande tal que
$$x > R > 0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Tomando $R = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, temos
$$x > R > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{R} = \varepsilon.$$

Portanto, segue da definição que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. A prova para $x\to-\infty$ é análoga.

Observação: As propriedades do limite também são válidas se substituirmos $x\to p$ por $x\to+\infty$ ou $x\to-\infty$.

Exemplo: Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}$ onde n é um inteiro positivo.

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0.$$

Em geral, temos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^r}=0$ onde r é um número racional positivo.

Exemplos: Use as propriedades dos limites infinitos para calcular os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}5+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=5+0=5.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\pi\sqrt{3}}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}.\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}.\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\pi\sqrt{3}.0.0=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$

Para resolver o limite infinito acima, basta colocar em evidência a mais alta potência de x no numerador e proceder da mesma forma no denominador. Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\left[1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^5}\right]}{x^5\left[2+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right]}=\frac{1}{2}.$$

Observação: A estratégia para calcular limites no infinito de uma função racional consiste em colocar em evidência a mais alta potência de x no denominador e numerador.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\text{sen}\dfrac{1}{x}$.

Fazendo $u=\dfrac{1}{x}$ temos que quando $x\to+\infty$, $u\to0$. Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}x\text{sen}\frac{1}{x}=\lim_{u\to0}\frac{\text{sen }u}{u}=1$$

Exercícios:

1. Calcule os limites abaixo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x+5}$ **[R.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$**]**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{\text{sen}}{(x}\right)$ **[R.** 2**].**

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}$ **[R. 0].**

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ **[R. 0].**

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ **[R. Não faz sentido. JUSTIFIQUE!]**

2. O preço de um certo aparelho eletrônico sofre uma desvalorização ao longo do tempo t de acordo com a função $p(t)=40+\dfrac{40}{2+t}$ unidades monetárias. O que acontecerá com o preço desse aparelho quando o tempo crescer indefinidamente? **[R.** 40**].**

2 Derivadas de funções reais de uma variável

Estudaremos o conceito de derivada de uma função real de uma variável. A derivada envolve a variação ou a mudança no comportamento de vários fenômenos. Para melhor compreender a definição de derivada, abordaremos três problemas do Cálculo que envolvem variação e movimento:

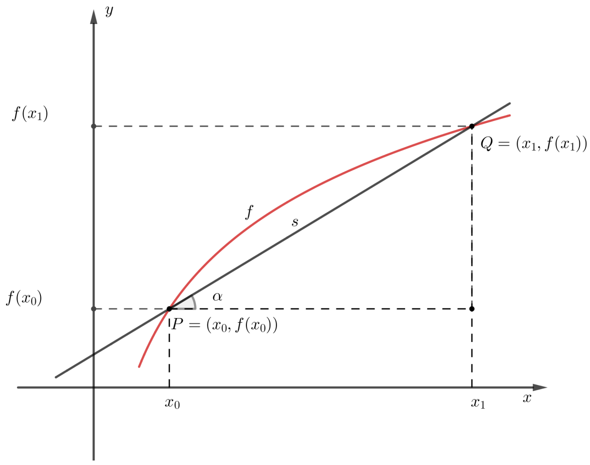
- O problema da reta tangente: sejam $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e $x_0 \in D(f)$, como obter a equação da reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$?
- O problema da velocidade e da aceleração: seja $s : D(s) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real que descreve o deslocamento de um objeto no plano e $t_0 \in D(s)$, como determinar a velocidade e a aceleração do objeto em $t = t_0$?
- O problema de máximos e mínimos: seja $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real qualquer. Como encontrar os pontos extremos do gráfico de f?

Tais problemas são definidos a partir do conceito de limite que foi abordado anteriormente. É importante observar que para uma função real $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o que chamaremos de "derivada da função f" será também uma função. A função "derivada da função f" é obtida através do cálculo de um limite que será estudado mais adiante.

Interpretação geométrica

De forma intuitiva podemos dizer que uma reta tangente a uma curva em um ponto P, é uma reta na qual toca a curva em apenas em um ponto, a saber, no ponto P. Desta forma, estudar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função f, no ponto $(x_0, f(x_0))$ é equivalente a tomar o limite das declividades de uma sequência de retas secantes que convergem para a tangente.

Consideremos a curva f e a reta s passando por $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$. Por definição dizemos que s é reta secante a f (veja gráfico abaixo).



Da geometria analítica, podemos escrever o coeficiente angular da reta secante à curva,

$$m_s = \tan \alpha$$

onde α é o ângulo que s faz com à reta $y = 0$ e $\tan \alpha$ é a razão incremental de f relativa ao ponto x.

Da trigonometria é sabido que a tangente de um ângulo α em um tiângulo retângulo, é dado pelo quociente, cateto oposto sobre cateto adjacente, e escrevemos:

$$\tan\alpha = \frac{C.O}{C.A}.$$

e, portanto, de acordo com a figura acima, podemos calcular o coeficiente angular (m_s) da reta secante a curva assim como se segue

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{2}$$

Agora em (2) façamos o ponto Q tender ao ponto P, isto é, devemos fazer x_1 tender a x_0, nestas condições obtemos o limite,

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{3}$$

se o limite em (3) existe, a este chamamos de coeficiente angular da reta tangente a curva f no ponto P, e denotamos por m, isto é,

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Desta forma sempre podemos determinar a reta tangente a uma curva passando por um ponto P da mesma, basta que tomemos um segundo ponto Q genérico que pertença a cuva, e então fazemos o processo de limite expresso em (3), se este existir ele é o coeficiente angular da reta procurada e com isto podemos determina-la.

O que o processo de limite faz, é tornar um segundo ponto escolhido sobre a curva tão próximo do primeiro, quanto necessário. Nestas condições, quando o segundo ponto assume posição de limite com relação ao primeiro, então a reta que era inicialmente secante torna-se uma reta tangente.

Ainda podemos na equação (3) fazer, $h = x_1 - x_0$. Se $x_1 \to x_0$, então $h \to 0$, ainda $x_1 = x_0 + h$. E escrevemos o coeficiente angular da reta tangente à curva da seguinte forma

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4}$$

Em resumo, estudar a derivada de uma função f no ponto x_0 é equivalente a estudar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

2.1 Derivada de funções reais

Seja $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real.

Definição 2.1.1. *A derivada de f no ponto de abscissa $x = x_0$ é definida como o número*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

supondo que o limite exista. Quando o limite (5) existir, diz-se que a função é derivável em $x = x_0$.

Pode-se pensar na derivada como uma função cuja entrada é o número x_0 e cuja saída é o valor $f'(x_0)$. Portanto, sem perda de generalidade, tomemos uma função $f(x)$ qualquer, já sabemos que a derivada de f em um ponto, é dada pela equação (5), para encontrarmos uma função derivada de f devemos aplicar a equação (5) em todos os elementos do domínio de f (onde o limite (5) existir). Assim substituindo x_0 por x, temos que a derivada de f é a seguinte função

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{6}$$

O processo para calcular uma derivada é chamado **derivação** ou **diferenciação**.

Outras notações que representam a derivada da função f são

$$Df(x)\,,\,\frac{df}{dx}(x)$$

ou para a derivada aplicada em um ponto

$$Df(x_0)\,,\,\frac{df}{dx}(x_0)\ \text{ e }\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Observação: Eventualmente é possível que sejam usadas duas notações distintas para representar a derivada de uma função real no corpo do texto, a saber: f' e $\dfrac{df}{dx}$. Esse fato ocorrerá quando houver necessidade de explicitar a variável a qual estamos derivando ou apenas por uma questão de uniformidade no texto.

Exemplo: Mostre que a derivada de $f(x) = x^2 + 3x$ é $f'(x) = 2x + 3$.
Solução: Pela definição de derivada em (6) primeiro devemos calcular $f(x + \Delta x)$:

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) \end{aligned}$$

Substituindo a equação acima em (6) segue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - [x^2+3x]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - x^2 - 3x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} 2x + \Delta x + 3 \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Exemplo: Determine a derivada de $m(x) = \sqrt{x}$.
Solução: Por (6), tem-se:

$$m'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Tem-se uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como a função é irracional, deve-se multiplicar e dividir a função pelo conjugado (do numerador) para levantar a indeterminação. Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})}{\Delta x} \cdot \frac{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x - x)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada de $m(x) = \sqrt{x}$ é $m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.2 Derivadas laterais

Uma função que possui derivada em todos os pontos de seu domínio, chama-se derivável. Em geral, podemos tomar o domínio da função como sendo um intervalo aberto, seja ele finito ou infinito, a definição de função derivada não se altera e, portanto, dizemos que a função será derivável no intervalo aberto se possuir derivadas em todos os seus pontos.

No entanto com respeito a um intervalo fechado $[a, b]$, temos o problema dos extremos, nestas condições torna-se necessário as definições

Definição 2.2.1 (Derivadas laterais). *Seja f uma função. Dizemos que f possui* ***derivada lateral à direita*** *em um ponto a de seu domínio, denotada por $f'(a^+)$, se o limite*

$$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existir. De modo análogo, dizemos que f possui ***derivada lateral à esquerda*** *em um ponto a de seu domínio, denotada por $f'(a^-)$, se o limite*

$$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existir.

Com isto podemos dizer que uma função f é derivável no intervalo fechado $[a, b]$, se é derivável em (a, b), à esquerda de a e a direita de b.

Com respeito aos limites laterais devemos observar que a derivada de uma função só existe, se as derivadas laterais existirem e coincidirem , isto é, $f'(x)$ existe se, e somente se, $f'(x^+)$ e $f'(x^-)$ existirem e $f'(x^+) = f'(x^-)$, nestas condições $f'(x)$ será igual as derivadas laterais.

Cosideremos a função $f(x) = |x|$, ou ainda

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x < 0 \\ x, \text{ se } x \geq 0. \end{cases}$$

Já vimos geométricamente o gráfico de f. Mostraremos agora que f não é derivável em $x = 0$. Para fazer isto utilizaremos as derivadas laterais no ponto desejado. Daí, com relação a derivada pela direita temos

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

ou seja $f'(0^+) = 1$. Com relação a derivada lateral a esquerda temos

$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

isto, é $f'(0^-) = -1$. Mas devemos notar que $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, como as derivadas laterais não coincidem notamos que a função não é derivável no ponto $x = 0$, assim como queríamos mostrar.

Observação: Devemos notar que a função f anteriormente definida não é derivável no ponto de abscissa 0, no entanto f é derivável em todos os demais pontos do domínio, ou seja, f é derivável em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Exercício:

1. Mostre que uma dificuldade semelhante ao exemplo anterior ocorre com a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

2. Mostre que a função $f(x) = |x-2|$ não possui derivada em $x = 2$.

3. Mostre que a função $m(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$.

2.3 Regras de derivação

Anteriormente definimos a derivada de uma função via limite, o que na maioria das vezes é complicado de ser calculado. Se quiséssemos por exemplo calcular a derivada da função $f(x) = x$, deveríamos calcular o limite,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

que neste caso é bastante simples. Mas se tivéssemos a função, $g(x) = e^{\text{sen}(x)}$, o nosso limite seria,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{\text{sen}(x+h)} - e^{\text{sen}(x)}}{h}$$

o que com certeza não é algo trivial.

Neste sentido se torna necessário a utilização de regras de derivação para facilitar os cálculos. Algumas das principais regaras de derivação são exibidas a seguir,

Regras elementares

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções e k uma constante, temos:

1. **Derivada da função constante:**
$$[k]' = 0$$

2. **Derivada da multiplicação de uma função por uma constante:**
$$[kf(x)]' = k[f(x)]'$$

3. **Derivada da soma algébrica de funções:**
$$[f(x) \pm g(x)]' = [f(x)]' \pm [g(x)]'$$

4. **Derivada do produto de funções:**
$$[f(x)g(x)]' = f(x)[g(x)]' + [f(x)]'g(x)$$

5. **Derivada do quociente:**
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

6. **Derivada da potência:**
$$[x^n]' = nx^{n-1}.$$

Exemplos: Calcule as derivadas das funções:

a) $f(x) = 5x^4 + 6x^3 - 20$

b) $g(x) = -\frac{1}{3}x^{15} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

c) $h(x) = x^{2020}(x^2+1)$

d) $i(x) = 2x(x^2+4)$

e) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

f) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

Solução:

a)

$$f'(x) = \left[5x^4 + 6x^3 - 20\right]' = 5.4x^{4-1} + 6.3x^{3-2} - 0 = 20x^3 + 18x^2$$

b)

$$g'(x) = \left[-\frac{1}{3}x^{15} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right]' = -\frac{15}{3}x^{15-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} - 3\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}\right) = -5x^{14} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{4}{3}}$$

c)

$$h'(x) = \left[x^{2020}(x^2+1)\right]' = 2020x^{2019}\left(x^2+1\right) + x^{2020}\left(2x\right)$$

d)

$$i'(x) = \left[2x(x^2+4)\right]' = 2(x^2+4) + 2x(2x) = 6x^2 + 8$$

e)

$$f'(x) = \left[\frac{x+1}{2x+1}\right]' = \frac{(x+1)'(2x+1) - (x+1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-2(x+1)}{(2x+1)^2} = -\frac{1}{(2x+1)^2}$$

f)

$$h'(x) = \left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Derivadas de funções trigonométricas

Com respeito às funções trigonométricas, temos as seguintes regras de derivação

1. **Derivada da função seno:**

$$[\text{sen }(x)]' = \cos(x)$$

2. **Derivada da função cosseno:**

$$[\cos(x)]' = -\text{sen }(x)$$

As respectivas demonstrações são feitas a seguir,

Demonstração. 1. Aplicando diretamente a definição de derivada obtemos,

$$[\text{sen}(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

e usando a identidade trigonométrica

$$\text{sen}(x+h) = \text{sen } x \cos h + \text{sen } h \cos x$$

é possível reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned}
[\text{sen}(x)]' &= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \text{sen}(h)\cos(x) - \text{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h) - 1) + \text{sen}(h)\cos(x)}{h} \\
&= \text{sen}(x) \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\
&= \text{sen}(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1
\end{aligned}$$

$$= \cos(x),$$

ou seja, $[\text{sen}(x)]' = \cos(x)$.

2. Analogamente, aplicando diretamente a definição de derivada obtemos,

$$[\cos(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

e usando a identidade trigonométrica

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
[\cos(x)]' &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \text{sen}(x)\text{sen}(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \text{sen}(x)\text{sen}(h)}{h} \\
&= \cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \text{sen}(x) \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\
&= \cos(x) \cdot 0 - \text{sen}(x) \cdot 1 \\
&= -\text{sen}(x),
\end{aligned}$$

ou seja, $[\cos(x)]' = -\text{sen}(x)$.

□

Como consequência das regras da derivada do seno e da derivada do cosseno, obtemos as regras das demais funções trigonométricas:

1. **Derivada da função tangente:**
$$[\text{tg}(x)]' = \sec^2(x)$$

2. **Derivada da função cotangente:**
$$[\cot(x)]' = -\csc^2(x)$$

3. **Derivada da função secante:**
$$[\sec(x)]' = \sec(x)\text{tg}(x)$$

4. **Derivada da função cossecante:**
$$[\csc(x)]' = -\csc(x)\cot(x)$$

Demonstração. Não é difícil verificar as regras acima, basta combinar a regras de derivação usual com as derivadas do seno e cosseno. De fato,

1. Sabemos que $\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, sendo assim para derivarmos tangente vamos aplicar a regra do quociente, desta forma temos,

$$[\text{tg}(x)]' = \left[\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}\right]'$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos(x)\,[\mathrm{sen}(x)]' - \mathrm{sen}(x)\,[\cos(x)]'}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x)}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}\\
&= \sec^2(x),
\end{aligned}
$$

ou seja, $[\mathrm{tg}(x)]' = \sec^2(x)$.

2. Podemos escrever $\cot(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)}$, com isto apliquemos a regra de derivação do quociente para obter a derivada, temos

$$
\begin{aligned}
[\cot(x)]' &= \left[\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\right]'\\
&= \frac{-\sec^2(x)}{\mathrm{tg}^2(x)}\\
&= -\frac{\cos^2(x)}{\mathrm{sen}^2(x)\cos^2(x)}\\
&= -\csc^2(x),
\end{aligned}
$$

ou seja, $[\cot(x)]' = -\csc^2(x)$.

3. Por definição sabemos que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, daí podemos calcular a derivada

$$
\begin{aligned}
[\sec(x)]' &= \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]'\\
&= \frac{-[\cos(x)]'}{\cos^2(x)}\\
&= \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos^2(x)}\\
&= \sec(x)\mathrm{tg}(x),
\end{aligned}
$$

ou seja, $[\sec(x)]' = \sec(x)\mathrm{tg}(x)$.

4. Por definição sabemos que $\csc(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)}$, daí podemos calcular a derivada

$$
\begin{aligned}
[\csc(x)]' &= \left[\frac{1}{\mathrm{sen}(x)}\right]'\\
&= \frac{-[\mathrm{sen}(x)]'}{\mathrm{sen}^2(x)}\\
&= \frac{-\cos(x)}{\mathrm{sen}^2(x)}\\
&= -\csc(x)\cot(x),
\end{aligned}
$$

ou seja, $[\sec(x)]' = -\csc(x)\cot(x)$.

$\square$

Derivadas de funções exponenciais e logarítmicas

Após termos demostrado as regras de derivação para funções trigonométricas, devemos comentar a respeito das derivadas das funções exponenciais e logarítmicas. Devemos começar inicialmente a trabalhar com a função exponencial natural, a saber, $y = e^x$, onde e é conhecido como número de Euler. Desta forma temos a regra derivação para a função exponencial, $f(x) = e^x$.

Proposição: A derivada da função exponencial é a própria exponencial, isto é,

$$[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x.$$

Demonstração. Dada a função $f(x) = e^x$, apliquemos a definição de derivada, donde devemos obter,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x} - \mathrm{e}^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \mathrm{e}^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

usando o limite fundamental segue que

$$f'(x) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \ln e = e^x \qquad \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a}$$

assim como deveríamos mostrar. □

Agora trataremos da derivada das funções logarítmicas, mais especificamente, neste momento, da função logarítmica natural. Para isto temos a seguinte proposição.

Proposição: A derivada da função $f(x) = \ln x$ é, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Demonstração. Seja $f(x) = \ln x$, para obtermos a derivada de f apliquemos diretamente a definição de derivada,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \ln \lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

fazendo $\dfrac{h}{x} = t$, obtemos $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{tx}$, além disso quando $h \to 0$ temos $t \to 0$, daí

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{tx}} \\ &= \ln \left(\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x} \ln \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{x} \ln \mathrm{e} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

assim como deveríamos demonstrar. □

Observação: Devemos observar que nas derivadas das funções exponencial e logaritmica não abordamos a função exponencial de uma base $a \in \mathbb{R}^{+} \backslash \{1\}$ qualquer, ou também a função logarítmica da mesma forma. Isto ocorre pois sempre podemos escrever $a^x = e^{x \ln a}$ e $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, e então, com respeito ao $\log_a x$ já temos ferramentas para fazer tal derivada. Em relação a a^x, adiante veremos um teorema que permitirá obter sua derivada, mas a saber, esta será $[a^x]' = a^x \ln a$.

2.4 Regra da cadeia

Na seção anterior tratamos de várias regras de derivação, no entanto, não consideramos o caso de derivação de funções compostas. Nesta seção será apresentado o teorema que nos diz como derivar funções compostas. Mas antes disto vejamos um exemplo em que surge a necessidade de uma forma para se derivar a composição de funções.

Exemplo: Determine a derivada da função $f(x) = (x+a)^3$, onde a é uma constante.
Solução: Devemos observar que a função assim como se encontra não se encaixa em nenhuma das regras de derivação conhecidas até o momento. Então, usando produto notável, podemos reescrever f obtendo

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^2$$

e agora podemos derivar, de onde obtemos

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3a^2 = 3(x^2 + 2ax + a^2) = 3(x+a)^2.$$

Observação: Devemos observar que no exemplo anterior não foi difícil expandir a função f, mas se tivéssemos por exemplo $f(x) = (x+a)^{10}$, deveríamos fazer uso do binômio de Newton e as contas se tornariam mais complicadas.

Entretanto, podemos notar que, se definirmos $u = x + a$, f devemos escrever $f(u) = u^{10}$, que na realidade é uma função composta, uma vez que u depende de x.

Agora vamos enunciar o teorema conhecido como regra da cadeia, que nos ensina como derivar a composição de funções.

Teorema 2.4.1 (Regra da cadeia)**.** *Se a função g é derivável em x e a função f é derivável em $g(x)$, então a função composta, $f \circ g$, será derivável em x e*

$$(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

Devido às posições que f e g ocupam na expressão $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ podemos ver uma função composta como sendo uma função externa aplicada em uma segunda função que podemos chamar de função interna. E, por sua vez, a regra da cadeia diz que a derivada da composição será a derivada da função externa aplicada na interna multiplicado por a derivada da função interna.

Exemplo: Calcule a derivada das funções abaixo:

a) $y = \left(2x^2 + 4x - 2\right)^3$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3+4x}$

c) $g(x) = (2x+1)(x^2+8)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

e) $i(t) = \ln(4t-2)$

f) $f(x) = \mathrm{sen} 4x$

Solução:

a) Usaremos a regra da cadeia para calcular a derivada da função $y = \left(2x^2 + 4x - 2\right)^3$. Assim,

$$y' = \left[\left(2x^2 + 4x - 2\right)^3\right]' = 3(2x^2 + 4x - 2)^2(4x + 4)$$

b) Combinando a regra da cadeia com a derivada de função exponencial, temos

$$f'(x) = \left[\mathrm{e}^{x^3+4x}\right]' = \mathrm{e}^{x^3+4x}\left(3x^2 + 4\right)$$

c) Pela regra do produto

$$g'(x) = \left[(2x + 1)(x^2 + 8)\right]' = 2(x^2 + 8) + (2x + 1)2x = 2x^2 + 16 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x + 16$$

d) Pela regra do quociente

$$f'(x) = \left[\frac{1}{3x}\right]' = \frac{0.3x - 1.3}{(3x)^2} = -\frac{3}{9x^2} = -\frac{1}{3x^2}$$

e) Usando a regra da cadeia segue

$$i'(t) = [\ln(4t - 2)]' = \frac{1}{4t - 2}.4 = \frac{4}{4t - 2} = \frac{2}{2t - 1}$$

f) Derivada de funções trigonométrica combinada com a regra da cadeia nos dá

$$f'(x) = [\operatorname{sen}(4x)]' = 4\cos(4x)$$

Exercícios:

1. Calcule os limites abaixo:

a) $g(x) = 5x^5 + \sqrt{x^3} - x^{\frac{3}{5}}$ **[R.** $25x^4 + \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$**]**

b) $i(x) = \dfrac{(x^2 + x)}{2}(2\sqrt{x} - 3x)$ **[R.** $\frac{1}{2}\left(5x^{3/2} - 9x^2 + 3x^{1/2} - 6x\right)$**].**

c) $f(x) = 4x^2 + x\sqrt{x}$ **[R.** $8x + \frac{3\sqrt{x}}{2}$**].**

d) $h(x) = \log_a x$ **[R.** $\dfrac{1}{x\ln a}$**].**

e) $g(x) = x\cos x$ **[R.** $\cos x - x\operatorname{sen} x$ **]**

f) $i(t) = \cos(\sqrt{t})$ **[R.** $-\operatorname{sen}(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}}$**]**

2. Encontre a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$ no ponto $\left(1, \dfrac{\mathrm{e}}{2}\right)$. **[R.** $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$**].**

2.5 Derivação implícita

Em geral, as funções são dadas na forma $y = f(x)$. Entretanto, algumas funções são definidas implicitamente por uma relação entre x e y. Por exemplo,

$$x^2 + y^2 = 25,$$

Em alguns casos é possível resolver uma equação para y em função de x. Na equação anterior, obteremos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Logo, teremos duas funções determinadas pela equação implícita. Algumas vezes não é fácil resolver a equação para y em termos de x, tal como $x^3 + y^3 = 6xy$. Para calcular a derivada de y utilizamos a derivação implícita, que consiste em derivar ambos os lados da equação em relação a x e então resolver a equação resultante para y'.

Exemplo: Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando ambos os lados da equação com respeito a x, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25,$$

ou seja,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Exemplo: Se $xy + \text{sen } y = 4$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

Solução: Derivando ambos os lados da equação com respeito a x, temos:

$$\frac{d}{dx}(xy + \text{sen } y) = \frac{d}{dx}4,$$

ou seja,

$$y + x\frac{dy}{dx} + \cos y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + \cos y)\frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + \cos y}.$$

Processo de derivação implícita:

1. Derivar os dois membros da equação em relação a x, considerando y como uma função dependente de x;
2. Agrupar os termos que contém $\dfrac{dy}{dx}$ em um membro da equação;
3. Determinar $\dfrac{dy}{dx}$.

Exercício: Encontre $\frac{d}{dx}$ nas funções abaixo:

a) $x^3 + y^3 = 6xy$ **[R.** $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$**]**

b) $\text{sen}(x + y) = y^2 \cos x$ **[R.**$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(y^2 \text{sen } x + \cos(x+y)\right)}{\cos(x+y) - 2y \cos\ x}$**]**

2.6 Derivada da função inversa

Seja $y = f(x)$. Suponha que $f(x)$ admite uma função inversa $x = f^{-1}(y)$ contínua. Se $\frac{d}{dx}[f(x)]$ existe e é diferente de zero, então a derivada de $x = f^{-1}(y)$ é

$$\frac{d}{dy}\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{1}{\dfrac{d}{dx}[f(x)]}.$$

Exemplo: Calcule a derivada da inversa das funções abaixo:

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$

c) $f(x) = a^x$

Solução: Pela regra da derivada da função inversa, segue a)

$$\frac{d}{dy}\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3}.$$

b)

$$\frac{d}{dy}\left[f^{-1}(y)\right] = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2+6x+1}$$

c) Note que se $y = f(x) = a^x$, podemos escrever $x = f^{-1}(y) = \log_a y$. Daí,

$$f^{-1}(y) = [\log_a y]' = \left[\frac{\ln y}{\ln a}\right]' = \frac{\frac{1}{y}\ln a}{(\ln a)^2} = \frac{1}{a^x \ln a}$$

Observação: Em alguns casos possível (e mais simples) obter a derivada de uma função usando derivação implícita.Veremos mais adiante exemplos na prática.

Derivada das funções trigonométricas inversas

A inversa da função $f(x) = \text{sen}\, x$, para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a função $f^{-1}(x) = arc\mathring{s}enx$, para $x \in [-1, 1]$. Qual é a derivada de $f^{-1}(x)$?

Sabemos que a função $\text{sen}\, x$ é contínua no intervalo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ com imagem o intervalo $[-1, 1]$. Portanto, a inversa $f^{-1}(x) = \text{arcsen}\, x$ existe para $x \in [-1, 1]$. observemos que

$$y = \text{arcsen}\, x \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}\, y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar a derivada de $f^{-1}(x)$ usaremos o processo de derivação implicita, ou seja, derivando ambos os lados da equação acima com respeito a x obtemos:

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}.$$

Por outro lado, sabemos que $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ e, portanto,

$$x^2 + \cos^2 y = 1, \quad \text{ou seja,} \quad \cos y = \sqrt{1-x^2}$$

pois $\cos y \geq 0$ para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ o que nos permite concluir que

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \text{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De maneira análoga podemos definir as funções trigonométricas inversas do $\cos x$, tg x, $\sec x$ e cotg x, denominadas $\arccos x$, arctg x, arcsec x e arccotg x, respectivamente.

Exercício: Mostre que

a) $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\text{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$

c) $\text{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

d) $\text{arccotg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$

2.7 Derivadas de ordem superior

Seja f uma função derivável em A. A função $f' : A \to \mathbb{R}$ ou simplesmente f' é dita **derivada** de f ou **derivada primeira de** f. De modo análogo, podemos definir a derivada de f' que será chamada de

derivada segunda de f. Neste caso,

$$(f')'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

e escrevemos $f'' = (f')'$, quando o limite existir. As notações que podem ser utilizadas são

$$f^{(2)},\ \frac{d^2}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right).$$

A **derivada terceira de** f é a derivada da derivada segunda de f, escrevemos

$$f''',\ f^{(3)},\ \frac{d^3}{dx^3},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right).$$

E, mais geralmente se f é derivável k vezes, então podemos denotar a $k-$ésima derivada de f por, $f^{(k)} : A \to \mathbb{R}$, definida por

$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} f(x).$$

Exemplo: Calcule a derivada de segunda ordem da função $f(x) = x^6$

Solução: Observe que $f(x) = x^6$ é um polinômio de grau 6. Estudaremos agora as derivadas de f, isto é,

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 6x^{6-1} = 6x^5$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(6x^5\right) = 30x^4$$

Exemplo: Determine a terceira derivada da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde $a, b, c \in$ R.

Solução: Utilizando as regras de derivação e observando que a, b e c são constantes obtemos,

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f''(x) = [f'(x)]' = 2a \text{ e } f'''(x) = [f''(x)]' = 0$$

Notemos que a terceira derivada da função dada pelo problema é a função constante igual a zero. É fácil observar que qualquer função polinomial de grau n terá a derivada de de ordem $n+1$ igual a zero. Mas isto não se estende a todas as funções assim como podemos ver no seguinte exemplo.

Exemplo: Determine a derivada segunda da função $f(x) = ke^x$.

Solução: Não é difícil ver que usando as regras de derivação que a derivada procurada é $f''(x) = ke^x$. Em particular, para as funções do tipo $f(x) = ke^x$, a derivada de qualquer ordem será ela mesma, uma vez que f é um múltiplo constante da exponencial.

Exercício:

1. Estude as derivadas abaixo:

a) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ **[R.** $\frac{4}{x+1}$**]**

b) $\dfrac{d^{500}}{dx^{500}}\left(x^{131} - 3x^{79} + 4\right)$ **[R.** 0**]**

c) $f'''(x)$, se $f(x) = \ln(x+1)$ **[R.** $\frac{1}{(x+1)^4}$**]**

d) y'', se $y = \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$ **[R.** $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$**]**

e) $\dfrac{d^2}{dx^2}[x\text{arcsen}(x)]$ **[R.** $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$**]**

f) $f''(x)$ se $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ **[R.** $\frac{-2x^3+6x^2-6x}{x^3-3x^2+3x-1}$**]**

2. Mostre que a função $y = 2\text{sen}(x) + 3\cos(x)$ satisfaz a equação $y'' + y = 0$

2.8 A derivada como taxa de variação

Se x e y denotam quantidades, ou grandezas, associadas de forma que y depende de x, de forma que podemos escrever

$$y = f(x).$$

Se x sofre uma perturbação Δx se tornando $x + \Delta x$ então y sofre uma perturbação associada e expressa por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Se estamos interessados na taxa de variação de y com relação a x, devemos olhar para o quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Suponha, por exemplo, que x seja o raio de um circulo e y seja sua área e, além disso, x e y estejam relacionados através da expressão

$$y = \pi x^2$$

Então, a taxa de variação da área com relação ao raio se escreve como sendo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\pi(x + \Delta x)^2 - \pi x^2}{\Delta x},$$

ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\pi x\Delta x + \pi(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

notamos que nossa expressão não fica tão interessante, pois dependemos agora da perturbação Δx. Algo que podemos fazer para melhorar este estudo é considerar apenas perturbações muito pequenas de x, ou seja, devemos olhar para o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

fica claro que o limite anterior trata-se da derivada de y com relação a x, ou seja,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Então, se temos $y = f(x)$ define-se a taxa de variação instantânea de y com relação a x como sendo o valor de $f'(x)$.

Retornando ao nosso exemplo, quando temos $y = \pi x^2$, expressando a área y de um circulo de raio x, podemos escrever que a variação instantânea da área com relação ao raio é precisamente $2\pi x$.

Neste contexto surge o que chamamos de taxa relacionada. Tomando o mesmo exemplo anterior, suponhamos que $x = x(t)$ represente o raio do circulo em função do tempo (t). Se x está variando a $p\,m/s$, podemos determinar a que velocidade varia a área y quando o raio vale $q\,m$. Basta notar que

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt}$$

uma vez que estamos observando quando $x = q\,m$ e a variação de x no tempo é $p\,m/s$, então a variação de y é

$$\frac{dy}{dx} = 2\pi pq\,m^2/s.$$

Este exemplo ilustra a importância do estudo de taxas de variação em aplicações do Cálculo. Pois sempre que estamos estudando fenômenos da vida real temos quantidades de interesse associadas. Isto é, em aplicações de taxas relacionadas, o objetivo consiste em determinar a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação de outra. O processo consiste em escrever uma equação que relacione as duas grandezas e então utilizar derivação implícita e/ou regra da cadeia para diferenciar ambos os membros da equação em relação ao tempo t. Os passos a seguir representam um procedimento possível para a resolução de problemas envolvendo taxas relacionadas.

Estratégias para a resolução de problemas de taxas relacionadas:

1. Desenhe uma figura e identifique as variáveis e as constantes (se for possível). Use t para o tempo. Suponha que todas as variáveis são funções deriváveis do tempo t.

2. Escreva as informações numéricas (em termos dos símbolos que você escolheu).

3. Escreva aquilo que você deve encontrar (geralmente uma taxa, expressa como uma derivada).

4. Escreva uma equação que relacione as variáveis. Talvez você possa combinar duas ou mais equações para conseguir uma única, relacionando as variáveis que você quer com as variáveis que conhece.

5. Derive com relação a t. Em seguida, expresse a taxa que você quer em termos das taxas e variáveis cujos valores você conhece.

6. Use os valores conhecidos para encontrar a taxa desconhecida.

Exemplo: O raio r de um círculo está aumentando à razão de 2 mm/min. Calcule a taxa de variação da área quando:

a) $r = 6$mm

b) $r = 24$mm

Solução: A área do círculo é definida por:

$$A(t) = \pi r^2(t)$$

Derivando ambos os lados da equação acima com respeito a t, obtém-se:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}(\pi r^2),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}A = 2\pi r\frac{dr}{dt}.$$

Substituindo $r = 6$mm na expressão acima, segue:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(6)(2) = 24\pi \text{ mm}^2/\text{min}.$$

Para $r = 24$mm, tem-se:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(24)(2) = 96\pi \text{ mm}^2/\text{min}.$$

Exemplo: Um balão esférico é inflado com gás à razão de 20 cm^3/min. Com que rapidez o raio do balão está variando no instante em que:

a) $r = 1$cm

b) $r = 2$cm

Solução: O volume do balão é dado por:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t).$$

Derivando ambos os lados na expressão acima, obtemos

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right],$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}V = 4\pi r^2\frac{dr}{dt}.$$

Sabemos que a taxa de variação com que o balão é inflado é de $20\text{cm}^3/\text{min}$. Assim, a rapidez com que o raio do balão está variando no instante em que $r = 1$cm é:

$$20 = 4\pi 1^2\frac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{5}{\pi}\text{cm}/\text{min}.$$

Faça $r = 2$cm e obtenha

$$\frac{dr}{dt} = \frac{5}{4\pi}\text{cm}/\text{min}. \qquad \text{Exercício!}$$

Exercício: Todas as arestas de um cubo estão se expandindo à razão de 3cm/s. Determine com que rapidez o volume está variando quando cada aresta é:

a) 1cm **[R. 9cm^3/s]**

b) 10cm] **[R. 900cm^3/s]**

2.9 Aplicação da derivada

Derivação e os extremos de uma função

Nesta seção usaremos derivadas para determinar valores extremos das funções e analisar as formas dos gráfico e para determinar numericamente em que ponto uma função é igual a zero.

Definição 2.9.1. *Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um ponto de **máximo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é um máximo local.*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo local** de f, se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é mínimo local.*

- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo local**, se x_0 for um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local.*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de máximo global (ou absoluto)** de f, se $f(x) \leq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é máximo global.*

- *Diremos que $x_0 \in I$ é um **ponto de mínimo global (ou absoluto)** de f, se $f(x) \geq f(x_0)$, para todo $x \in I$. Neste caso, diremos que $f(x_0)$ é mínimo global.*

- *Um ponto $x_0 \in I$ será dito um **ponto extremo global**, se x_0 for um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global.*

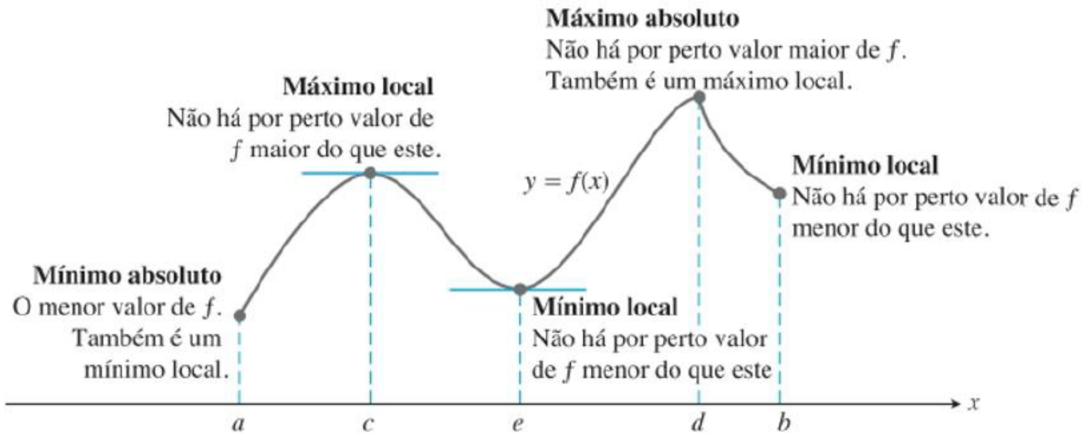


Figura retirada do livro de Cálculo 1 do Thomas p.214

Teorema 2.9.1 (Teorema do valor extremo)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função continua sobre $[a, b]$. Então existe x_0, x_1 tais que, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in [a, b]$. Em outras palavras f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.*

Consideremos a seguinte definição

Definição 2.9.2 (Ponto crítico)**.** *Um ponto crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Exemplo: Os pontos críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$ são $\dfrac{3}{2}$ e 0.
Solução: Observemos inicialmente a derivada de f, ou seja,

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}(4 - x) + x^{\frac{3}{5}}(-1) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}(4 - x) - x^{\frac{3}{5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}.$$

Para estudar os pontos críticos da função f, devemos observar para quais valores de x, $f'(x) = 0$, isto é,

$$\frac{12 - 8x}{5x^{2/5}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 12 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

Além disso, observe que quando $x = 0$, $f'(0)$ não existe e, portanto, fica provado que os pontos críticos de f são $\dfrac{3}{2}$ e 0.

O seguinte teorema nos dá critérios para determinar se um número c no domínio de uma função é ponto de máximo ou mínimo

Proposição 2.9.2. *Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.*

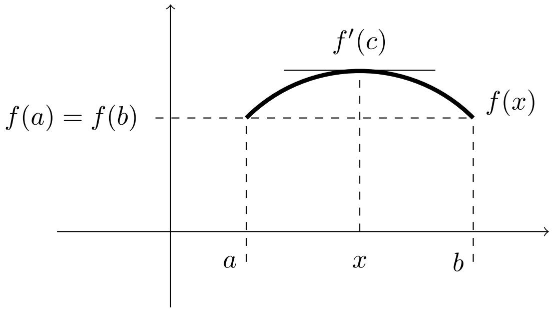
Com estes teoremas e definições já enunciados, somos capazes de determinar os máximos e os mínimos de uma função em um intervalo fechado. Basta que avaliemos a função nos extremos do intervalo e em seus números criticos, em seguida o menor destes números será o mínimo absoluto no intervalo e o maior deles será o máximo absoluto no intervalo.

Dando continuidade a nossos estudos temos um dos mais importantes teoremas do Cálculo diferencial de uma variável.

Terema do valor médio e suas consequências

Teorema 2.9.3 (Teorema de Rolle)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. f continua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Interpretação: Seja $x = f(t)$ a posição de um objeto em movimento. Se o objeto estiver no mesmo lugar em 2 instantes diferentes, então pelo Teorema de Rolle existirá um tempo no qual a velocidade é nula.



Como consequência do Teorema 2.9.3 temos o seguinte

Teorema 2.9.4 (Teorema do valor médio). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. f continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a).$$

Observação: O TVM nos diz que, se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)$ é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Agora vamos estudar a relação entre o comportamento dos gráficos de funções e suas derivadas.

Funções crescentes e decrescentes e o teste da primeira derivada

O seguinte teorema nos mostra como encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento de uma função através de sua derivada

Teorema 2.9.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ uma função, f continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então*

(*i*) *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$*

(*ii*) *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$*

Exemplo: Determine os intervalos para os quais a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente.
Solução: É possível observar que o gráfico mostra que f é estritamente decrescente para $x < 2$ e estritamente crescente para $x > 2$. Isso pode ser confirmado, estudando-se o sinal da primeira derivada de $f(x)$.

A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 2x - 4$. Portanto, tem-se que

$$f'(x) < 0, \quad \text{se} \quad x < 2$$

$$f'(x) > 0, \quad \text{se} \quad x > 2$$

Uma vez que f é contínua em todos os pontos, pelo teorema anterior, pode-se afirmar que f é estritamente decrescente no intervalo de $(-\infty, 2)$ e estritamente crescente no intervalo de $(2, +\infty)$.

Se sabemos onde uma função cresce e onde uma função decresce, então podemos determinar seus extremos locais. A ideia essencial é a seguinte, se uma função é crescente a esquerda de um número c e decrescente a direita, é conveniente imaginar que c seja um ponto de máximo. Reciprocamente, se uma função é decrescente a esquerda de um número c e crescente a direita deste número, então é conveniente que c seja um ponto de mínimo da função. E isto é o que explica precisamente o seguinte teorema

Teorema 2.9.6 (Teste da primeira derivada)**.** *Seja f uma função continua e c um ponto crítico de f*

(i) *Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.*

(ii) *Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.*

A seguir trabalharemos o conceito de concavidade do gráfico de uma função.

Concavidades e o teste da segunda derivada

A ideia de concavidade de uma função, é de grande importância, pois possuem resultados que nos ajudam a determinar extremos de uma função, e além disso nos mostra como varia a função derivada.

Definição 2.9.3 (Concavidade para cima e para baixo)**.** *Seja f uma função derivável em (a, b). Diremos que*

1. *$f(x)$ é dita **côncava para cima** em (a, b) se f' é uma função crescente em (a, b).*
2. *$f(x)$ é dito **côncava para baixo** em (a, b) se f' é uma função decrescente em (a, b).*

Reconhecer os intervalos onde uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo auxilia no traçado do gráfico. Faz-se isso pela análise do sinal da derivada segunda $f''(x)$.

Teorema 2.9.7 (Teste de concavidade)**.** *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até 2^a ordem no intervalo (a, b).*

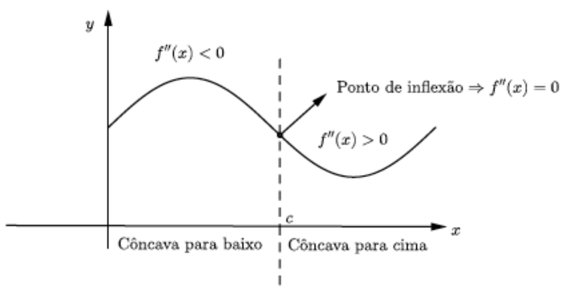
1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então o gráfico de $f(x)$ é concavo para cima em I.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então o gráfico de $f(x)$ é concavo para baixo em I.*

Definição 2.9.4 (Ponto de inflexão)**.** *Um ponto $(c, f(c))$ sobre o gráfico de uma função f, é chamado **ponto de inflexão**, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra:*

(i) *f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b).*

(ii) *f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).*

Pode-se ainda afirmar que o ponto $(c, f(c))$ é dito ponto de inflexão do gráfico da função $f(x)$, se neste ponto da curva o gráfico da $f(x)$ troca de concavidade. A figura abaixo ilustra este fato.



A segunda derivada também nos ajuda a determinar extremos locais de uma função. O seguinte teorema nos mostra como proceder

Teorema 2.9.8 (Teste da derivada segunda). *Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponha que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c, e além disso f'' é continua em um intervalo aberto que contem c. Se $f''(c)$ existe e*

(i) *se $f''(c) < 0$, então f tem valor máximo local em c.*

(ii) *se $f''(c) > 0$, então f tem mínimo local em c.*

Estratégias para construir gráfico de $y = f(x)$:

1. Identifique o domínio de f.
2. Determine f' e f''.
3. Determine os pontos críticos e identifique o comportamento da função.

Exemplo: Esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$
Solução:

1. O domínio de f é $\mathbb{R}$
2. Determinemos as derivada de primeira e segunda ordem de f

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{e} \quad f''(x) = 6x - 6$$

3. Análise dos pontos críticos de f

$$0 = f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Logo, $x = 0$ e $x = 2$ são pontos críticos de f

4. Analisar o comportamento da função. Observemos inicialmente que analisando o comportamento da primeira derivada de f, segue

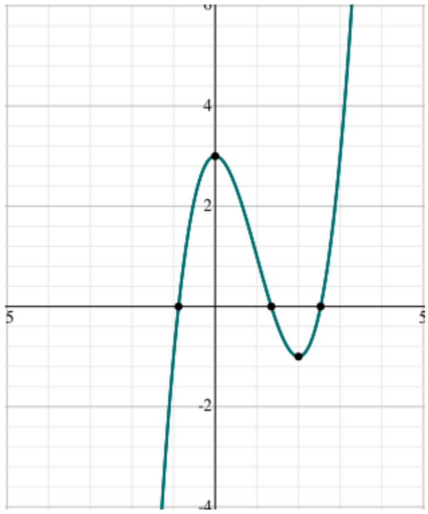
Intervalos	x<0	0<x<2	x>2
Sinal de f	+	-	+
Gráfico	crescente	decrescente	crescente

Por outro lado, pelo teste da segunda derivada

$$f''(0) = -6 \quad \Rightarrow \quad \text{Máximo local em } x = 0$$

$$f''(2) = 6 \quad \Rightarrow \quad \text{Mínimo local em } x = 0$$

Desta forma, o gráfico de f é:



2.10 A regra de L'Hôptal para limites indeterminados

Por muitas vezes no cálculo de limites aparecem formas indeterminadas do tipo, $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, as quais são contornadas, na maioria dos casos, por meio de manipulações algébricas. O teorema que será enunciado nesta seção diz essencialmente que, sob certas condições, o limite de um quociente de funções será igual ao limite do quociente das derivadas.

Teorema 2.10.1 (L'Hôptal–versão simples)**.** *Sejam f e g funções deriváveis em um certo número a com $f(a) = g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$. Então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Muitos problemas podem ser resolvidos com a versão anterior do teorema. No entanto, nos interessa a versão mais completa

Teorema 2.10.2 (L'Hôptal)**.** *Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contêm a (exceto possivelmente em a). Suponha que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad e \quad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

Então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(a)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)}{g'(x)}$$

se o limite do lado direito existir (ou for igual a ∞ ou $-\infty$).

Observação: O teorema anterior também será válido para limites laterais ou os limites no infinito.

Exemplo: Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução: Devemos notar que o limite satisfaz as condições da Regra de L'Hôptal, desta forma temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

Observação: O limite anterior já havia sido definido como **Limite fundamental** no Teorema 1.5.2.

Exemplo: Calcule $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(3x)\cot(5x)$

Solução: Devemos observar que podemos utilizar a definição de cotangente pra escrever o limite em termos de seno e cosseno, ou seja

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(3x)\cot(5x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(3x)\frac{\cos(5x)}{\operatorname{sen}(5x)}$$

e então podemos reorganizar o limite assim como se segue,

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(3x)\cot(5x) = \lim_{x \to 0} \cos(5x) \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}.$$

Note que na segunda parte do produto obtemos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$, e então aplicamos a regra de L'Hôptal para obter o resultado,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(3x)\cot(5x) &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \cos(5x) \lim_{x \to 0} \frac{3\cos(3x)}{5\cos(5x)} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Observação: Devemos notar que em alguns casos devemos manipular o limite a ser calculado. Com tais manipulações é possível calcular o limite de produtos indeterminados $(\pm\infty \cdot 0)$ e diferenças indeterminadas $(\infty - \infty)$.

Exercícios:

1. Calcule os seguintes limites usando a regra de L'Hôpital (se possível e necessário):

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x}$ **[R.** -1**]**

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{3x}}$ **[R.** 0**]**

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$ **[R.** 1**]**

d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3\cos x}{2x - \pi}$ **[R.** $-3/2$**]**

e) $\lim_{x \to 0^+} x e^{\frac{1}{x}}$ **[R.** $+\infty$**]**

f) $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$ **[R.** 0**]**

3 Integrais de funções reais de uma variável

Os dois conceitos principais do cálculo são desenvolvidos a partir de idéias geométricas relativas a curvas. A derivada provém da construção das tangentes a uma dada curva. A integral, conceito que estudaremos a partir de agora, tem origem no cálculo de área de uma região curva. A ideia é a seguinte: já trabalhamos o problema de encontrar a derivada de uma função $f(x)$, abordaremos na próxima seção o problema inverso, ou seja, dada uma função $f(x)$ queremos encontrar uma função $F(x)$ que satisfaça

$$F'(x) = f(x).$$

3.1 Primitivas

Seja f uma função definida em um intervalo I. Definimos primitiva (ou antiderivada) de f em I uma função F de finida em I tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x em I.

Exemplos:

1. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$. De fato,

$$F'(x) = \left[\frac{1}{3}x^3\right]' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2$$

2. $F(x) = \text{sen } x$ é uma primitiva de $f(x) = \cos x$. De fato,

$$F'(x) = [\text{sen } x]' = \cos x$$

3. $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$. De fato,

$$F'(x) = \left[x^2\right]' = 2x$$

Observando o Exemplo 3 acima é possível perceber que a função $F(x) = x^2$ não é a única função cuja derivada é $2x$. Basta observar que a função $x^2 + 1$ têm a mesma derivada, assim como x^+c, para qualquer que seja a constante c. Essa motivação nos permite enunciar os seguintes resultados:

Proposição 3.1.1. *Se F é uma primitiva de f em um intervalo I, então $F(x) + c$ também será uma primitiva de f para qualquer constante artitrária c.*

Proposição 3.1.2. *Se F e G são duas primitivas de f, ou seja, $F'(x) = G'(x) = f(x)$, para todo x em I, então existe uma constante c tal que*

$$F(x) = G(x) + c$$

Observação: Os resultados anteriores nos permitem concluir que, se nós conhecemos uma primitiva F de f, então podemos construir uma família de primitivas de f em I, basta variar a constante c.

Exemplo: Determine uma primitiva de $f(x) = \text{sen } x$ que satisfaça $F(0) = 3$.
Solução: Como a derivada de $-\cos x$ é sen x, a primitiva de f na forma

$$F(x) = -\cos x + c$$

nos fornece todas as primitivas de $f(x)$. A condição $F(0) = 3$ determina um valor específico para c, basta substituir na expressão acima, ou seja,

$$3 = F(0) = -\cos 0 + c = -1 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 4.$$

Logo, a primitiva que satisfaz $F(0) = 3$ é

$$F(x) = -\cos x + 4.$$

Regra de linearidade para primitivas

Sejam F e G primitivas de f e g, respectivamente.

	Função	Primitiva
1. Regra da multiplicação por constante	$kf(x)$	$kF(x) + c, \;\; k$ cte
2. Regra da oposta	$-f(x)$	$-F(x) + c$
3. Regra da soma algébrica de funções	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + c$

Exemplo: Determine a primitiva geral de

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + \mathrm{sen} 2x.$$

Solução: Podemos reescrever a função $f(x)$ da seguinte forma

$$f(x) = 3g(x) + h(x),$$

onde $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $h(x) = \mathrm{sen}2x$. Note que $G(x) = 2\sqrt{x}$ é uma primitiva para g e $H(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ é uma primitiva para $h(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} F(x) &= 3G(x) + H(x) + c \\ &= 3.2\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos 2x + c \\ &= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cos 2x + c. \end{aligned}$$

3.2 Integrais indefinidas

Definição 3.2.1. *O conjunto de todas as primitivas de f é o que chamamos de integral indefinida de f em relação a x e será denotada por*

$$\int f(x)dx,$$

onde $\displaystyle\int$ é o símbolo da integral, a função f é o integrando e x é a variável de integração.

Exemplo: Calcule

a) $\int x^2 dx$.

b) $\int dx$.

c) $\int \left(x^2 - 2x + 5\right) dx$.

Solução:

a) Observemos que $\dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva de x^2, assim,

$$\int x^2 dx = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{\text{Primitiva}} + \underbrace{c}_{\text{cte. arbitrária}}.$$

b) Note que o integrando é uma função constante igual a 1, além disso, x é uma primitiva de 1. Assim,

$$\int dx = \underbrace{x}_{\text{Primitiva}} + \underbrace{c}_{\text{cte. arbitrária}}.$$

c) Se reconhecemos $\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ como uma primitiva de $x^2 - 2x + 5$, podemos concluir

$$\int \left(x^2 - 2x + 5\right) dx = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{Primitiva}} + \underbrace{c}_{\text{cte. arbitrária}}.$$

Caso contrário, vejamos separadamente cada integral acima, ou seja,

$$\int \left(x^2 - 2x + 5\right) dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + c.$$

Exemplo: Calcule $\int x^\alpha dx$, onde $\alpha \neq -1$ é um número real fixo.

Solução: Observemos que

$$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

é uma primitiva de x^α. De fato,

$$\left[\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\right]' = x^\alpha.$$

Logo,

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c.$$

Observação: No exemplo anterior, se considerarmos $\alpha = -1$, devemos ter $\int \frac{1}{x} dx$ cuja primitica é $\ln x$ e, portanto,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c.$$

Exercício:

1. Calcule:

a) $\int x^5 dx$ **[R.** $\frac{x^6}{6} + c$**]**

b) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx$ **[R.** $2\sqrt{x} + c$**]**

c) $\int \operatorname{sen} 2x dx$ **[R.** $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$**]**

d) $\int \mathrm{e}^{-3x} dx$ **[R.** $-\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{3} + c$**]**

e) $\int \cos \dfrac{x}{2} dx$ **[R.** $2\operatorname{sen}\frac{x}{2} + c$**]**

f) $\int x \cos x dx$ **[R.** $x\operatorname{sen} x + \cos x + c$**]**

2. Considere as relações

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

calcule:

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x dx$ **[R.** $\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{4} + c$**]**

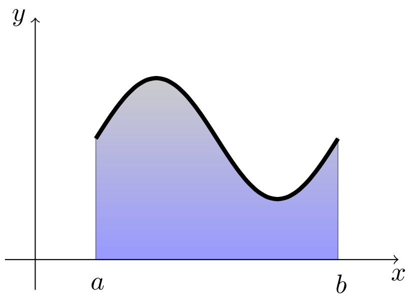
b) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$ **[R.** $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}2x}{4} + c$**]**

3.3 Integração

A ideia básica de integração é que muitas quantidades podem ser calculadas se forem "quebradas" em pedaços pequenos e, depois, somados cada parte.

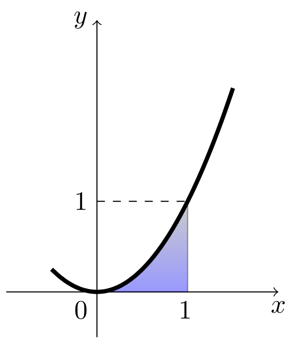
O problema da área

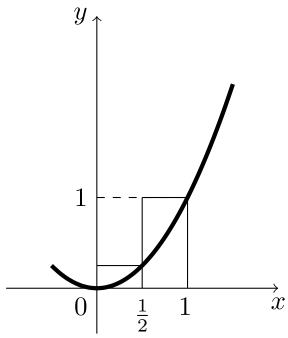
Nosso objetivo nesse momento é determinar a área de uma região S que está sob a curva $y = f(x)$ de a até b.



Note que S está limitada pelo gráfico de uma função contínua f $(f \geq 0)$, as retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o eixo x. Para fazer o estudo da área S podemos aproximar a área da região com contorno curvo somando as áreas de um conjunto de retângulos **[quanto maior a quantidade de retângulos, maior a precisão]**

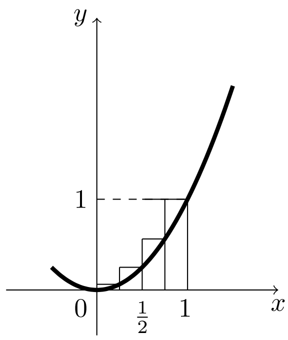
Exemplo: Qual é a área da região sombreada R que se encontra abaixo da curva $y = x^2$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$?





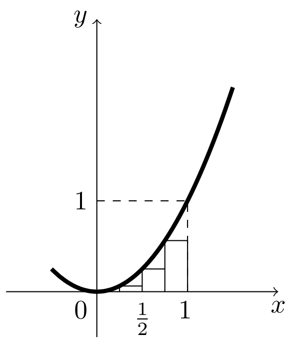
Usando dois retângulos que contém R obtemos uma estimatica superior na área, ou seja,

Quatro retângulos fornecem uma estimativa melhor para calcular a área de R. Neste caso,



$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\approx \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}\right]^2 + \frac{1}{4}.1^2 \\ &= \frac{1}{4}.\frac{1}{16} + \frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{4}.\frac{9}{16} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{32} = 0,468\end{aligned}$$

Suponha em vez disto que usaremos quatro retângulos contidos dentro da região R para estimar a área



$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\approx \frac{1}{4}.0^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\right]^2 + \frac{1}{4}.\left[\frac{3}{4}\right]^2 \\ &= \frac{7}{32} = 0,218.\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{7}{32} < \mathcal{A} < \dfrac{15}{32}$.

O que nós fizemos no exemplo anterior foi estimar a área abaixo da curva usando aproximações por um conjunto de retângulos. Para entender melhor como essas aproximações podem ser melhoradas, vamos estudaras seguintes definições:

Consideremos uma função arbitrária f definida em um intervalo $[a, b]$ (essa função pode assumir valores positivos e negativos). Dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, escolhendo $n - 1$ pontos entre a e b tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

O conjunto

$$P = \{x_0, x_1, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$$

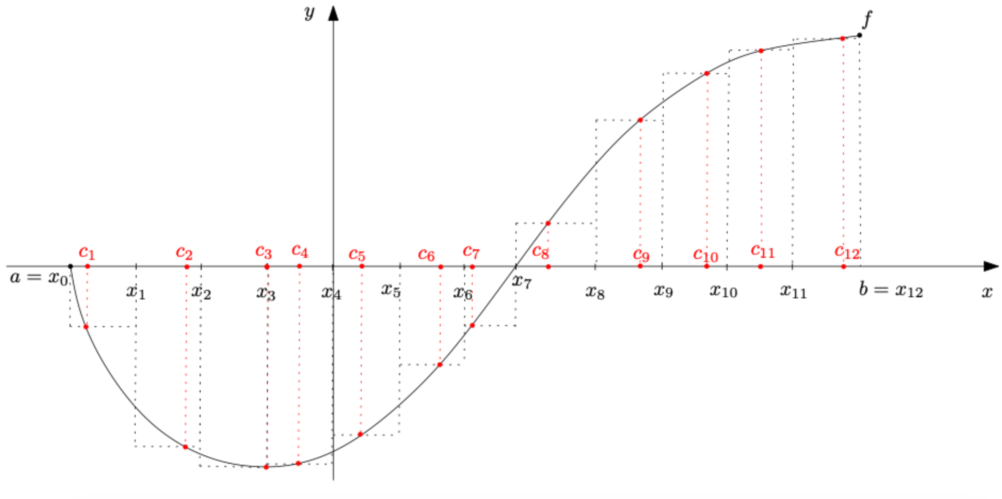
é chamado partição do intervalo $[a, b]$.

A partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos fechados

$$[x_0, x_1],\ \ [x_1, x_2],\ \ [x_2, x_3],\ \ \cdots,\ \ [x_{k-1}, x_k],\ \ \cdots,\ \ [x_{n-1}, x_n]$$

cujo comprimento pode ser definido por

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$



Em cada subintervalo constrímos um retângulo que tem como base o eixo x e toca a curva em $(c_k, f(c_k))$.

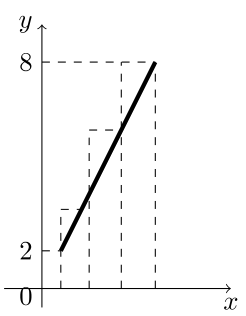
Em cada subintervalo formamos o produto $f(c_k).\Delta x_k$. Esse produto pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor de $f(c_k)$. Tomando a soma desses produtos, podemos definir a Soma de Riemann de uma função f limitada no intervalo $[a, b]$ associada à partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ e a um pontilhamento $c_i \in [x_{i?1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$, da seguinte maneira

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).\Delta x_k.$$

Observação: À medida que as partições de $[a, b]$ se tornam cada vez menores, espera-se que os retângulos definidos se aproximem cada vez mais da região delimitada entro o eixo e o gráfico da função, possibilitando uma precisão cada vez maior.

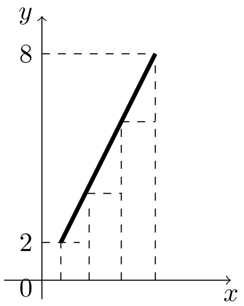
Exemplo: Determine a área abaixo da curva $f(x) = 2x$ em $[1, 4]$.
Solução:

∗ Soma superior



$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\approx S_n = \sum_{k=1}^{3} f(c_k)\Delta x_k \\ &= 4.1 + 6.1 + 8.1 = 18 \end{aligned}$$

∗ Soma inferior



$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\approx s_n = \sum_{k=1}^{3} f(c_k)\Delta x_k \\ &= 2.1 + 4.1 + 6.1 = 12 \end{aligned}$$

Logo, $12 < \mathcal{A} < 18$. Por outro lado, a área determinada abaixo da curva e o eixo x é equivalente a um paralelogramo e, portanto,

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(8+2).3}{2} = 15.$$

Definição 3.3.1 (A integral definida como limite das somas de Riemann)**.** *Seja f uma função definida em um intervalo $[a, b]$. Para qualquer partição P de $[a, b]$, se houver um número I tal que*

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I,$$

então f será integrável em $[a, b]$ e I será a integral definida de f em $[a, b]$, onde $\|P\|$ é o comprimento do maior subintervalo da partição P, chamado de norma.

O simbolo para o número I na definição é

$$\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 3.3.1 (Existência de integrais definidas)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então existe sua integral definida em $[a, b]$.*

Observação: O Teorema anterior nos diz que funções contínuas em $[a, b]$ são integráveis nesse intervalo. As funções descontínuas podem ou não ser integráveis. Para não ser integrável a função precisa ser descontínua a ponto de a região entre a curva e o eixo x não poder ser aproximada por retângulos cada vez mais estreitos.

Exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

não é integrável no intervalo $[0, 1]$.

Propriedades das integrais

Sejam f e g funções integráveis no intervalo $[a, b]$. A integral definida satisfaz as seguintes regras:

1. **Ordem de integração:**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2. **Intervalo de largura zero:**

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. **Multiplicação por constante:**

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

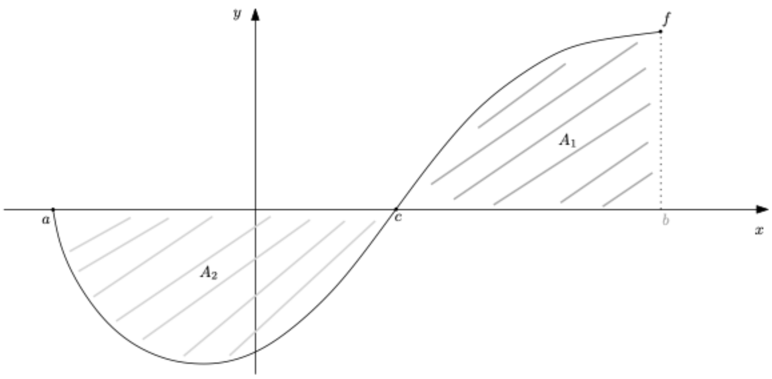
$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$

4. **Soma e subtração:**

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

5. **Aditividade:**

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$



6. **Desigualdade** max − min Se f tem valor máximo ($\max f$) e valor mínimo ($\min f$) em $[a, b]$, então

$$\min f(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f(b-a)$$

7. **Dominação:**

$$f(x) \geq g(x) \quad \text{em} \quad [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

$$f(x) \geq 0 \quad \text{em} \quad [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{(caso especial)}$$

Exemplo 1: Suponha que f e h sejam contínuas e que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 5 \qquad \int_1^4 f(x)dx = -2 \qquad \int_{-1}^1 h(x)dx = 7.$$

Determine:

1. $\displaystyle\int_4^1 f(x)dx$

2. $\displaystyle\int_{-1}^4 f(x)dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)]\, dx$

Solução:

1. $\int_4^1 f(x)dx = -\int_1^4 f(x)dx = -(-2) = 2$
2. $\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = 5 + (-2) = 3$
3. $\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)]\, dx = 2\int_{-1}^1 f(x)dx + 3\int_{-1}^1 h(x)dx = 2.5 + 3.7 = 21$

Exemplo 2: Mostre que o valor de $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\, dx$ é menor que $\frac{3}{2}$.

Solução: De fato, o valor máximo que a função $\sqrt{1+\cos x}$ assume no intervalo $[0,1]$ é $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ em $x = 0$. Assim, pela propriedade 6 devemos ter

$$\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\, dx \leq \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Exemplo 3: Que valores de a e b maximizam o valor de

$$\int_a^b (x - x^2)dx?$$

Solução: Queremos encontrar os valores de a e b de modo que $x - x^2 \geq 0$. Note que

$$x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1.$$

Como essa equação representa uma parábola cuja concavidade está voltada para baixo, então $f(x) = x - x^2$ assume máximo valor em $0 < x < 1$ (ou seja, $x - x^2 > 0$ em $0 < x < 1$). Logo, basta considerar $a = 0$ e $b = 1$.

3.4 O Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) estabelece uma relação entre os conceitos de derivada e integral. Em termos práticos, ele fornece um método muito poderoso para calcular integrais sem recorrer a definição como limite de um somatório.

Teorema 3.4.1 (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo). *Seja f uma função contínua em $[a,b]$, então*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) e

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Exemplos: Use o primeiro TFC para determinar:

a) $\frac{d}{dx}\int_a^x \cos t dt$ b) $\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ c) $\frac{d}{dx}$ se $y = \int_x^5 3t\text{sen}\, tdt$

Solução:

a)

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \cos t dt = \cos x$$

b)

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{1+x^2}$$

c)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_x^5 3t\text{sen } tdt = -\frac{d}{dx}\int_5^x 3t\text{sen } tdt = -3x\text{sen } x$$

Teorema 3.4.2 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Observação: O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite estabelecer uma diferença clara entre integral definida (número) e integral indefinida (função).

Exemplos: Calcule as seguintes integrais:

1. $\displaystyle\int_1^3 7dx$
2. $\displaystyle\int_0^2 5xdx$
3. $\displaystyle\int_1^2 3u^2du$
4. $\displaystyle\int_{-2}^0 \sqrt{2}dx$
5. $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 + x - 5\right) dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \text{sen}2xdx$

Solução:

1. $\displaystyle\int_1^3 7dx = 7x\Big|_1^3 = 7(3-1) = 14$
2. $\displaystyle\int_0^2 5xdx = \frac{5}{2}x^2\Big|_0^2 = \frac{5}{2}(4-0) = 10$
3. $\displaystyle\int_1^2 3u^2du = u^3\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$
4. $\displaystyle\int_{-2}^0 \sqrt{2}dx = \sqrt{2}x\Big|_{-2}^0 = \sqrt{2}(0-(-2)) = 2\sqrt{2}$
5. $\displaystyle\int_0^2 \left(3x^2 + x - 5\right) dx = \left(x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x\right)\Big|_0^2 = 2^3 + \frac{2^2}{2} - 10 = 0$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \text{sen}2xdx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = -\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right] = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}.$

Definição 3.4.1 (Média ou valor médio de uma função)**.** *Se f for integrável em $[a, b]$, então seu valor médio em $[a, b]$, também chamado sua média, será:*

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo: Determine o valor médio de $f(x) = x^2 - 1$ em $[0, \sqrt{3}]$.
Solução: Usando a definição acima é possível obter:

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{1}{\sqrt{3}-0}\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2-1\right) dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \left(x^2-1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x^3}{3} - x\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{3\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right] \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Teorema 3.4.3 (Teorema do valor médio para integrais definidas)**.** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$, então em algum ponto $c \in [a,b]$,*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Observação: Definimos anteriormente que o valor médio de uma função contínua ao longo de um intervalo fechado $[a,b]$ como sendo a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ dividida pelo comprimento $b-a$ do intervalo. O TVM para integrais definidas afirma que esse valor médio é sempre assumido pelo menos uma vez pela função f no intervalo.

Exemplo: Determine o valor médio de $f(x) = 4 - x$ em $[0,3]$ e em que ponto do domínio f assume o valor médio.

Solução: Sabemo, por definição de média, que

$$\begin{aligned} M(f) &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)dx = \frac{1}{3}\left[4x - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^3 \\ &= \frac{1}{3}\left[12 - \frac{9}{2}\right] = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Pelo T.V.M. para integrais, temos

$$\frac{5}{2} = f(c) = 4 - c \qquad \Rightarrow \qquad c = 4 - \frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{3}{2}.$$

Área total

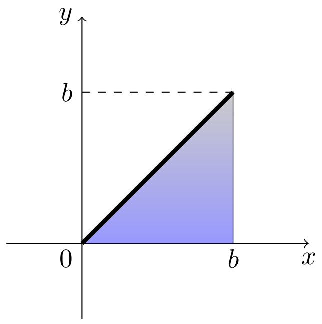
Definição 3.4.2. *Se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em $[a,b]$, então a área sob a curva $y = f(x)$ em $[a,b]$ será*

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplo: Calcule a área sob $y = x$ no intervalo $[0,b]$ com $b > 0$

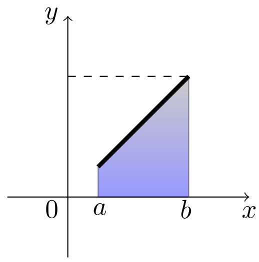
Solução:

$$\int_0^b x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^b = \frac{b^2}{2}.$$



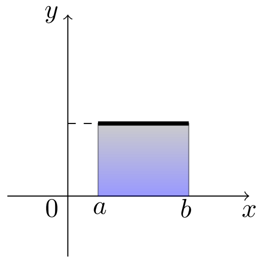
Se a área estiver em $[a, b]$,

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad a < b$$

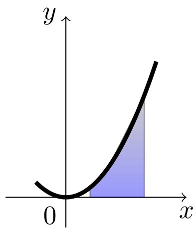


$$\int_a^b c dx = c(b - a),$$

c constante arbitrária



$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad a < b$$

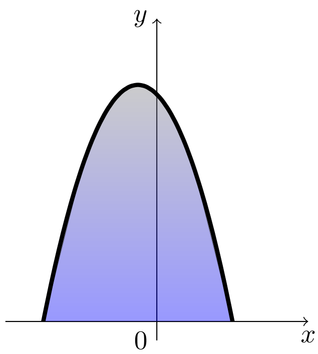


A soma de Riemann contém termos do tipo $f(c_k)\Delta x_k$ que fornecem a área de um retângulo quando $f(c_k)$ é positiva. Qaundo $f(c_k)$ é negativa, o produto $f(c_k)\Delta x_k$ é a área do retângulo com sinal negativo. Quando somamos tais termos para uma função negativa, obtemos o oposto da área. Neste caso, para obter área positiva, tomemos o valor absoluto.

Exemplo 1: Calcule a área determinada pela curva $y = -x^2 - x + 6$ e o eixo x.

Solução: Podemos escrever a cursa y na forma

$$y = -(x + 3)(x - 2)$$



Notemos que a curva y é não negativa em $[-3, 2]$. Logo,

$$\int_{-3}^{2} \left[-x^2 - x + 6\right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]\Bigg|_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

Exemplo 2: Calcule:

a) a integral definida de $f(x) = \operatorname{sen} x$ em $[0, 2\pi]$

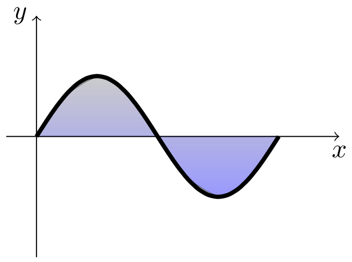
b) a área entre o eixo x e $f(x)$ em $[0, 2\pi]$.

Solução:

a)

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0.$$

É natural observar que a integral se anula pois as partes do gráfico acima e abaixo do eixo x se anulam.



b) Dividindo o domínio, temos:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$

e

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -1 - (1) = -2.$$

Portanto,

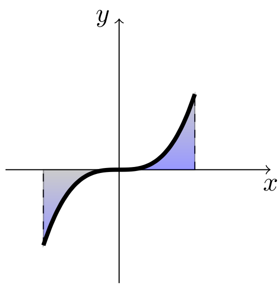
$$\mathcal{A} = |2| + |-2| = 4.$$

Exemplo 3:

a) Calcule a área da região limitada pelo gráfico de $f(x) = x^3$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$ e $x = 1$.

b) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 dx$.

Observemos inicialmente a região delimitada pelas curvas do ítem a).



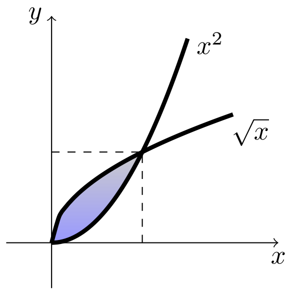
Portanto,

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Exemplo 4: Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ em $[0, 1]$.

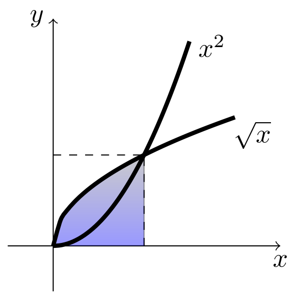


Para calcular a área da região delimitada pelas curvas acima basta considerar:

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

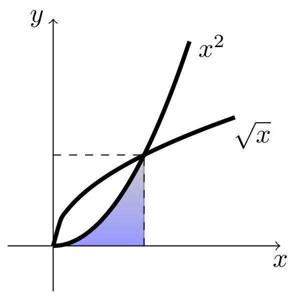
Outra forma de estudar o cálculo de área de regiões arbitrárias é:

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$



e

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



Portanto,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

3.5 Mudança de variável ou regra da substituição

A regra da substituição é uma técnica de integração desenvolvida invertendo-se a regra da cadeia.

Sejam f e g tais que $\Im(g) \subset D(f)$. Suponha que F é uma primitiva de f. Então $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g'(x)$. De fato, pela regra da cadeia,

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Portanto,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c, \quad c \text{ constante arbitrária.}$$

Assim, se fizermos a substituição $u = g(x)$, então:

$$\begin{aligned}\int f(g(x))g'(x)dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx = F(g(x)) + c \\ &= F(u) + c = \int F'(u)du = \int f(u)du.\end{aligned}$$

Mais precisamente, temos os seguinte resultado:

Teorema 3.5.1 (Regra da substituição)**.** *Se $u = g(x)$ é uma função derivável cuja imagem é um intervalo I e f é contínua em I, então*

$$\int f(g(x))g'(x) = \int f(u)du.$$

Exemplo: Calcule as integrais abaixo:

a) $\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$ b) $\int \cos(7\theta + 5)d\theta$ c) $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$

Solução:

a) Consideremos a seguinte substituição: $u = 1 + x^2$, ou seja, $du = 2xdx$. Desta forma,

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + c = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + c$$

b) Considerando $u = 7\theta + 5$, temos $du = 7d\theta$ e, portanto,

$$\int \cos(7\theta+5)d\theta = \int \cos u\frac{1}{7}du = \frac{1}{7}\int \cos udu = \frac{1}{7}\text{sen } u + c = \frac{1}{7}\text{sen}(7\theta+5) + c$$

c) Seja $u = x^4 + 2$, assim, $du = 4x^3dx$. Logo,

$$\int x^3\cos(x^4+2)dx = \int \cos\ u\frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\int \cos udu = \frac{1}{4}\text{sen u} + c = \frac{1}{4}\text{sen}(x^4+2) + c.$$